TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR: ESPAÇOS AFINS

Paulo A. Martin
&
Maria Lúcia Singer

Sumário

CAPíTULO 1

Espaços Afins

1. Espaços Afins

1.1. Espaços Afins. Seja $\mathcal{U}$ um conjunto não vazio cujos elementos serão chamados de *pontos*. Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial. Suponha que esteja definida uma função sobrejetora:

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbf{V}$$
$$(A, B) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \overline{AB} \in \mathbf{V}$$

Como essa função é sobrejetora temos que a cada vetor v em $\mathbf{V}$ está associado um par ordenado (A, B) de pontos de $\mathcal{U}$. Diremos então que $v = \overline{AB}$ é o vetor determinado pelo par (A, B).

Definição 1.1. *O conjunto $\mathcal{U}$ será chamado de espaço afim associado ao espaço vetorial $\mathbf{V}$ se forem verdadeiros os seguintes axiomas:*
(i) Dados um ponto A em $\mathcal{U}$ e um vetor v em $\mathbf{V}$ existe um único ponto B em $\mathcal{U}$ tal que $v = \overline{AB}$.
(ii) Se $v = \overline{AB}$ e $w = \overline{BC}$ então $v + w = \overline{AC}$.

Dados um ponto A em $\mathcal{U}$ e um vetor v em $\mathbf{V}$ o axioma (i) nos diz que existe um único ponto B em $\mathcal{U}$ tal que $v = \overline{AB}$.

Definição 1.2. *Chamamos o ponto B de soma do ponto A com o vetor v e o denotamos por:*

$$B = A + v$$

Assim $B = A + v$ significa que $v = \overline{AB}$.

Observações.

1) Fixe um ponto A em $\mathcal{U}$. Se B é um ponto em $\mathcal{U}$ então $\overline{AB}$ é um vetor do espaço vetorial associado, $\mathbf{V}$. Por outro lado, dado um vetor v em $\mathbf{V}$ pelo axioma (i) da definição de espaço afim existe um único ponto B em $\mathcal{U}$ tal que $v = \overline{AB}$, ou seja a função:

$$B \in \mathcal{U} \to \overline{AB} \in \mathbf{V}$$

é bijetora. Nesse sentido o espaço afim $\mathcal{U}$ pode ser identificado, *como conjunto*, ao espaço vetorial $\mathbf{V}$.

2) O espaço vetorial $\mathbf{V}$ tem um elemento especial que é o seu vetor nulo, $\mathbf{0}$, o qual tem a propriedade que $v + \mathbf{0} = v$ para todo vetor v em $\mathbf{V}$, enquanto que o espaço afim $\mathcal{U}$ não tem nenhum ponto particular que se distinga dos outros pontos.

DEFINIÇÃO 1.3. *Se o espaço vetorial* $\mathbf{V}$ *tiver dimensão* n *diremos que* $\mathcal{U}$ *é um espaço afim de dimensão* n.

EXEMPLO 1.4. *Consideramos* $\mathcal{U} = E^3$ *o conjunto dos pontos do espaço, e* $\mathbf{V} = V^3$ *o espaço vetorial dos vetores da geometria.* E^3 *é um espaço afim de dimensão 3, associado a* V^3.

EXEMPLO 1.5. *Seja* $\mathcal{S}$ *um subespaço vetorial de um espaço vetorial,* $\mathbf{V}$. *Então* $\mathcal{S}$, *como conjunto, é um espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathcal{S}$.
De fato, considere a função:

$$(s_1, s_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to s_2 - s_1 \in \mathcal{S}$$

Essa função é sobrejetora pois dado um vetor v *em* $\mathcal{S}$, *ao par ordenado* $(\mathbf{0}, v)$ *está associado o vetor* v.
Vamos mostrar que valem os axiomas (i) e (ii) nesse caso.
(i) Dados o ponto s_1 *em* $\mathcal{S}$ *e o vetor* v *em* $\mathcal{S}$, *temos que o ponto* $s_2 = s_1 + v$ *está em* $\mathcal{S}$, *pois* $\mathcal{S}$ *é subespaço vetorial. O ponto* $s_2 = s_1 + v$ *é único porque a função dada associa o vetor* v *ao par ordenado* (s_1, s_2).
(ii) Se $v = s_2 - s_1$ *e* $w = s_3 - s_2$, *então* $v + w = s_3 - s_1$, *dessa forma ao par ordenado* (s_1, s_3) *está associado o vetor* $v + w$ *como queríamos.*

EXEMPLO 1.6. *O conjunto solução de um sistema linear não homogêneo compatível é um espaço afim associado ao subespaço solução do sistema linear homogêneo associado.*

De fato, considere o sistema linear:

$$(1): \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

e seja

$$(1_h): \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

o sistema linear homogêneo associado.
É fácil verificar que que o conjunto solução do sistema (1) *pode ser escrito na forma:*

$$\mathcal{B} = \{(b_1, \ldots, b_n) + (h_1, \ldots, h_n) : (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{H}\}$$

em que $(b_1, \ldots, b_n)$ *é uma solução particular do sistema linear não homogêneo,* (1), *e* $\mathcal{H}$ *é o conjunto solução do sistema homogêneo associado* (1_h), *que é um subespaço vetorial de* $\mathbf{R}^n$.
Usamos esse fato para verificar que a função:

$$(s_1, s_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to s_2 - s_1 \in \mathcal{H}$$

é sobrejetora e que valem os axiomas (i) e (ii).
A função é sobrejetora pois dado o vetor $(h_1, \ldots, h_n)$ *em* $\mathcal{H}$ *se considerarmos os pontos* $s_1 = (b_1, \ldots, b_n)$ *e* $s_2 = (b_1 + h_1, \ldots, b_n + h_n)$ *em* $\mathcal{B}$ *vemos que a função associa* $s_2 - s_1 = (h_1, \ldots, h_n)$ *ao par ordenado* (s_1, s_2). *A verificação dos axiomas (i) e (ii) fica a cargo do leitor.*

Teorema 1.7. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathbf{V}$. *Então o vetor nulo de* $\mathbf{V}$, $\mathbf{0}$, *está associado ao par* (A, A), *isto é,* $\overline{AA} = \mathbf{0}$, *para todo ponto* A *de* $\mathcal{U}$.

Prova: Seja A um ponto em $\mathcal{U}$ e denotamos por x o vetor $\overline{AA}$. Consideramos um vetor qualquer,v, em $\mathbf{V}$. Pelo axioma (i) da definição de espaço afim existe um único ponto B em $\mathcal{U}$ tal que $\overline{AB} = v$. Calculamos

$$x + v = \overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB}$$

pelo axioma (ii) da definição de espaço afim. Como $\overline{AB} = v$ é um vetor qualquer de $\mathbf{V}$ concluímos que $x = \mathbf{0}$. $\square$

Observação. Em vista do Teorema acima e do axioma (i) da definição de espaço afim concluímos que se dois pontos A e A' de $\mathcal{U}$ são distintos então o vetor $\overline{AA'}$ é não nulo.

Teorema 1.8. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathbf{V}$.*Se o vetor* v *de* $\mathbf{V}$, *está associado ao par de pontos* (A, B) *de* $\mathcal{U}$, *isto é,* $\overline{AB} = v$ *então ao par* (B, A) *está associado o vetor* $-v$, *isto é,* $\overline{BA} = -v$.

Prova: Seja $y = \overline{BA}$ então

$$y + v = \overline{BA} + \overline{AB} = \overline{BB} = \mathbf{0}$$

pelo Teorema anterior. Portanto $y = -v$. $\square$

Teorema 1.9. *Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ então $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.*

Prova: Temos, pelo axioma (ii) da definição de espaço afim, que

$$\overline{AB'} = \overline{AB} + \overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{A'B'}$$

como por hipótese $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, temos $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. $\square$

Observação. O teorema acima pode ser interpretada como sendo a *lei do paralelogramo* nos espaços afins. Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, no plano, então A, B, A', B' são vértices de um paralelogramo e assim $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

1.2. Coordenadas Afins. Considere $\mathcal{U}$ um espaço afim associado a um espaço vetorial, $\mathbf{V}$, de dimensão n. Fixe um ponto O em $\mathcal{U}$ e uma base $\beta = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbf{V}$.
Chama-se *sistema de coordenadas afins em* $\mathcal{U}$ o par (O, β). O ponto O é chamado de *origem* do sistema de coordenadas afins.
A um ponto M de $\mathcal{U}$ temos associado um único vetor em $\mathbf{V}$ que é $\overline{OM}$. Podemos então escrever esse vetor na base β fixada:

$$\overline{OM} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Como os números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são univocamente determinados pela base β, a n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é chamada de *coordenadas afins do ponto* M *em relação ao sistema de coordenadas afins* $\sum = (O, \beta)$.

Notação: $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\sum}$ significa $\overline{OM} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Teorema 1.10. *Se $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\sum}$ e $B = (\gamma_1, ..., \gamma_n)_{\sum}$ então*

$$\overline{AB} = (\gamma_1 - \alpha_1)e_1 + \cdots + (\gamma_n - \alpha_n)e_n.$$

Prova: Basta observar que $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. $\square$

Teorema 1.11. *Se $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\sum}$ e $v = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$ então*

$$B = A + v = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)_{\sum}.$$

Prova: A notação $B = A + v$ significa que $v = \overline{AB}$. De acordo com a proposição anterior, sendo $B = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)_{\sum}$ temos $\overline{AB} = (\gamma_1 - \alpha_1)e_1 + \cdots + (\gamma_n - \alpha_n)e_n$. Assim $v = (\gamma_1 - \alpha_1)e_1 + ... + (\gamma_n - \alpha_n)e_n$ e conseqüentemente $\gamma_j - \alpha_j = \beta_j$ para todo $j = 1, \dots, n$. $\square$

Observação: Podemos construir um sistema de coordenadas afins em um espaço afim de dimensão n a partir de $n + 1$ pontos desse espaço. Uma $(n+1)$ - upla de pontos $\{A_0, \dots, A_n\}$ em um espaço afim $\mathcal{U}$ determina um sistema de coordenadas afins em $\mathcal{U}$ se o conjunto de vetores $\{\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, \dots, \overline{A_0A_n}\}$ for uma base do espaço vetorial associado $\mathbf{V}$. Nesse caso o ponto A_0 é a origem do sistema.

2. Variedades Afins

Definição 2.1. *Seja $\mathcal{U}$ um espaço afim e seja $\mathbf{V}$ o espaço vetorial associado. Um subconjunto não vazio, $\mathcal{P}$, de $\mathcal{U}$ é uma variedade afim se para algum ponto A em $\mathcal{P}$ o conjunto de vetores:*

$$\mathcal{S}_A(\mathcal{P}) = \{\overline{AB} : B \in \mathcal{P}\}$$

for um subespaço vetorial de $\mathbf{V}$.

Observações.

(1) Veremos adiante que um subconjunto não vazio, $\mathcal{P}$, de $\mathcal{U}$ é uma variedade afim se para algum ponto A em $\mathcal{P}$ temos

$$\mathcal{P} = \{B \in \mathcal{U} : \overline{AB} \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})\}$$

e $\mathcal{S}_A(\mathcal{P})$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{V}$.

(2) A definição de $\mathcal{S}_A(\mathcal{P})$, é independente do ponto A.
De fato, consideramos A' em $\mathcal{P}$. Vamos verificar que $\mathcal{S}_{A'}(\mathcal{P}) = \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$.
Seja $B \in \mathcal{P}$ então temos:

$$\overline{A'B} = \overline{A'A} + \overline{AB} = -\overline{AA'} + \overline{AB}.$$

Como $\overline{AA'}$ e $\overline{AB}$ pertencem a $\mathcal{S}_A(\mathcal{P})$ que é um subespaço, concluímos que $\overline{A'B} \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$. Portanto $\mathcal{S}_{A'}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$.
Agora consideramos $v \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$ e chamamos $u = \overline{AA'} \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$, então $u + v \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$. Seja $B' \in \mathcal{P}$ tal que $\overline{AB'} = u + v$. Temos

$$\overline{AB'} = \overline{AA'} + \overline{A'B'}$$

o que implica que $u + v = u + \overline{A'B'}$, ou seja, $\overline{A'B'} = v$, o que mostra que $v \in \mathcal{S}_{A'}(\mathcal{P})$. Portanto $\mathcal{S}_A(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}_{A'}(\mathcal{P})$.

Assim concluímos que $\mathcal{S}_{A'}(\mathcal{P}) = \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$.

Provamos então que se $\mathcal{P}$ é uma variedade afim o subespaço $\mathcal{S}_A(\mathcal{P})$ é independente do ponto $A \in \mathcal{P}$.

DEFINIÇÃO 2.2. *O subespaço $\mathcal{S}_A(\mathcal{P})$ será chamado de subespaço diretor de $\mathcal{P}$ e será denotado por $\mathcal{S}(\mathcal{P})$.*

EXEMPLO 2.3. *Se A é um ponto em $\mathcal{U}$ então o conjunto $\{A\}$ é uma variedade afim já que $\mathcal{S}_A(\{A\}) = \{\overline{AA} = \mathbf{0}\}$ é sempre um subespaço vetorial de $\mathbf{V}$.*

EXEMPLO 2.4. *Dados dois pontos distintos A e B em um espaço afim $\mathcal{U}$, a reta determinada por A e B,*

$$r = \{A + \lambda\overline{AB} : \lambda \in \mathbf{R}\},$$

é uma variedade afim pois o ponto $A = A + 0\overline{AB}$, pertence a r e $\mathcal{S}_A(r) = \{\lambda\overline{AB} : \lambda \in \mathbf{R}\}$ é o subespaço vetorial de $\mathbf{V}$ gerado pelo vetor $\overline{AB}$.

EXEMPLO 2.5. *Dados tres pontos não colineares A, B, C em um espaço afim $\mathcal{U}$, (isto é, tais que o conjunto $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ seja **L.I.**), o plano determinado por A, B e C,*

$$\pi = \{A + \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$

é uma variedade afim pois o ponto $A = A + 0\overline{AB} + 0\overline{AC}$, pertence a π e o conjunto $\mathcal{S}_A(\pi) = \{\alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$ é o subespaço vetorial de $\mathbf{V}$ gerado por $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

EXEMPLO 2.6. *O espaço afim $\mathcal{U}$ é uma variedade afim cujo subespaço diretor é o espaço vetorial $\mathbf{V}$.*
De fato, sendo $\mathcal{U}$ um espaço afim temos que $\mathcal{U}$ é um conjunto não vazio, então existe um ponto A em $\mathcal{U}$ e $\mathcal{S}_A(\mathcal{U}) = \mathbf{V}$, pois dado $v \in \mathbf{V}$ pelo axioma (i) da definição de espaço afim, existe um ponto $B \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{AB} = v$.

EXEMPLO 2.7. *Todo subespaço vetorial de $\mathbf{V}$ é uma variedade afim; nesse caso o subespaço diretor é o próprio subespaço.*
De fato, se W for um subespaço vetorial de $\mathbf{V}$, vimos que W é um espaço afim, então, pelo exemplo anterior, W é um variedade afim cujo subespaço diretor é o próprio W.

EXEMPLO 2.8. *Considere* $\mathbf{R}^4$ *como espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathbf{R}^4$*. Os pontos* $A = (1,1,0,0)$, $B = (0,1,1,0)$ *e* $C = (0,0,1,1)$ *não são colineares pois o conjunto de vetores:*

$$\{\overline{AB} = (-1,0,1,0),\ \overline{AC} = (-1,-1,1,1)\}$$

é **L.I.**. *O plano determinado por* A, B *e* C *é:*

$$\pi = \{(1,1,0,0) + \alpha(-1,0,1,0) + \beta(-1,-1,1,1) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$

que é uma variedade afim em $\mathbf{R}^4$*, pelo Exemplo 2.5.*

EXEMPLO 2.9. *O conjunto vazio é uma variedade afim pois verifica a definição vaziamente.*

DEFINIÇÃO 2.10. *Se* $\mathcal{P}$ *for uma variedade afim cujo subespaço diretor* $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ *tenha dimensão* n*, diremos que* $\mathcal{P}$ *é uma variedade afim n-dimensional.*

Casos particulares.

(1) $n = 0$, $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \{\mathbf{0}\}$. A variedade afim consiste de um único ponto. Diz-se que a variedade é de dimensão zero.

(2) $n = 1$, $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \{\alpha v \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$ $v \neq \mathbf{0}$. A variedade afim é uma reta que passa por um ponto A.

(3) $n = 2$, $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \{\alpha u + \beta v \ : \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$, $\{u, v\}$ **L.I**. A variedade afim é um plano que passa por um ponto A.

No próximo Teorema fazemos a construção de uma variedade afim em $\mathcal{U}$ a partir de um subespaço de $\mathbf{V}$.

TEOREMA 2.11. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço afim associado a um espaço vetorial* $\mathbf{V}$*. Fixamos um ponto* A *em* $\mathcal{U}$ *e um subespaço vetorial* $\mathcal{W}$ *em* $\mathbf{V}$*. Então o conjunto dos pontos* M *de* $\mathcal{U}$ *tais que* $\overline{AM}$ *é um vetor de* $\mathcal{W}$ *é uma variedade afim que passa por* A *e tem a direção de* $\mathcal{W}$*.*

Prova: Denotamos por $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{U} : \overline{AM} \in \mathcal{W}\}$.
Observamos que o ponto A pertence a $\mathcal{P}$ pois $\overline{AA} = \mathbf{0}$ e $\mathcal{W}$ é subespaço. Vamos verificar que $\mathcal{W}$ é o subespaço diretor de $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}_A(\mathcal{P})$. Seja v um vetor em $\mathcal{S}_A(\mathcal{P})$ então $v = \overline{AB}$ para algum ponto B em $\mathcal{P}$. Pela definição do conjunto $\mathcal{P}$ temos que $v \in \mathcal{W}$. Portanto $\mathcal{S}_A(\mathcal{P}) \subset \mathcal{W}$.
Reciprocamente, seja $w \in \mathcal{W}$. Pelo axioma (i) da definição de espaço afim temos que existe um único ponto $C \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{AC} = w$, mas isso

nos diz que o ponto C está em $\mathcal{P}$ e então $\overline{AC} = w \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$, e portanto $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$. Concluímos então que $\mathcal{W} = \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$. $\square$

TEOREMA 2.12. *Toda variedade afim não vazia é um espaço afim.*

Prova: Considere o espaço afim $\mathcal{U}$ associado ao espaço vetorial $\mathbf{V}$. Seja $\mathcal{P}$ a variedade afim que passa por A e tem a direção do subespaço $\mathcal{S}$. Vamos provar que $\mathcal{P}$ é um espaço afim associado ao espaço vetorial $\mathcal{S}$.
Sejam $M, N \in \mathcal{P}$. Pela definição de espaço afim $\overline{MN} \in \mathbf{V}$ e pela definição de variedade afim os vetores $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ pertencem a $\mathcal{S}$ e portanto
$$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} \in \mathcal{S}.$$
Dessa forma podemos definir a função:
$$(M, N) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \overline{MN} \in \mathcal{S}$$
Essa função é sobrejetora pois dados $v \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{P}$ pelo axioma (i) da definição de espaço afim existe um único ponto $B \in \mathcal{U}$ tal que $v = \overline{AB}$, mas pela definição de variedade afim $B \in \mathcal{P}$.
O axioma (ii) da definição de espaço afim é verdadeiro em $\mathcal{P}$ pois é verdadeiro em todo $\mathcal{U}$. $\square$

2.1. Descrição das variedades afins. Nesta seção decrevemos as variedades afins algébrica e geometricamente. O primeiro teorema dá uma descrição da variedades afins como conjuntos *transladados* de subespaços.

TEOREMA 2.13. *Se $\mathcal{P}$ é uma variedade afim não vazia então existe um único subespaço vetorial, $\mathcal{W}$, de $\mathbf{V}$ tal que para todo ponto A de $\mathcal{P}$ tem-se:*
$$\mathcal{P} = A + \mathcal{W} = \{A + w \ : \ w \in \mathcal{W}\}.$$

Prova: Considere A um ponto em $\mathcal{P}$. Chamamos de $\mathcal{W}$ o subespaço diretor de $\mathcal{P}$, isto é, $\mathcal{W} = \mathcal{S}_A(\mathcal{P}) = \{\overline{AB} : B \in \mathcal{P}\}$. Pela definição de variedade afim um ponto $B \in \mathcal{P}$ se e somente se $B = A + s$ com $s \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$. Assim temos que $\mathcal{P} = A + \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$.
Vimos que o subespaço diretor de $\mathcal{P}$ independe do ponto A então concluímos que
$$\mathcal{P} = \{A + s \ : \ s \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})\} = A + \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$$

para todo $A \in \mathcal{P}$.
Temos que provar agora a unicidade do subespaço diretor de $\mathcal{P}$.
Suponha que $\mathcal{W}$ e $\mathcal{W}'$ sejam subespaços diretores de $\mathcal{P}$, ou seja, que para todo $A \in \mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = A + \mathcal{W} = A + \mathcal{W}'.$$

Vamos provar que $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$. Seja $w \in \mathcal{W}$. Dado $A \in \mathcal{P}$, como $\mathcal{P} = A + \mathcal{W}$ temos que $B = A + w \in \mathcal{P}$ e como $\mathcal{P} = A + \mathcal{W}'$ existe $w' \in \mathcal{W}'$ tal que $B = A + w'$. Portanto $\overline{AB} = w = w'$ e então $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. Da mesma maneira provamos que $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$. $\square$

Observação: Se $\mathcal{U}$ é um espaço afim de dimensão n e $\mathcal{P}$ é uma variedade n-dimensional em $\mathcal{U}$, então $\mathcal{P} = \mathcal{U}$.

O teorema a seguir caracteriza geométricamente as variedades afins.

Teorema 2.14. *Seja $\mathcal{U}$ um espaço afim associado a um espaço vetorial $\mathbf{V}$. Um subconjunto com mais de um ponto, $\mathcal{P}$, de $\mathcal{U}$ é uma variedade afim se e somente se a reta que une dois pontos quaisquer de $\mathcal{P}$ estiver contida em $\mathcal{P}$.*

Prova: Seja $\mathcal{P}$ uma variedade afim com mais de um ponto. Sejam A e B pontos de $\mathcal{P}$. A reta que une A e B é $r = \{X = A + \alpha\overline{AB} : \alpha \in \mathbf{R}\}$. Considere um ponto $X \in r$. então $\overline{AX} = \alpha\overline{AB}$ para algum $\alpha \in \mathbf{R}$. Como $\overline{AB} \in \mathcal{S}_A(\mathcal{P})$ e $A \in \mathcal{P}$, temos, pela proposição anterior, que $X \in \mathcal{P}$.
Vamos provar a recíproca. Seja $\mathcal{P}$ um subconjunto de $\mathcal{U}$ com mais de um ponto, com a propriedade que a reta que une dois pontos quaisquer de $\mathcal{P}$ está contida em $\mathcal{P}$. Fixamos um ponto $A \in \mathcal{P}$. Consideramos o conjunto $\mathcal{W} = \{\overline{AB} : B \in \mathcal{P}\}$. Vamos provar que $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{V}$ e concluir assim que $\mathcal{W}$ é o subespaço diretor de $\mathcal{P}$. É claro que $0 = \overline{AA} \in \mathcal{W}$. Sejam $\alpha \in \mathbf{R}$ e $v = \overline{AB} \in \mathcal{W}$. Como a reta que une os pontos A e B está contida em $\mathcal{P}$ temos que o ponto $C = A + \alpha\overline{AB}$ pertence a $\mathcal{P}$. Assim $\overline{AC} = \alpha\overline{AB} \in \mathcal{W}$ ou $\alpha v \in \mathcal{W}$. Agora, sejam $v = \overline{AB}, w = \overline{AC} \in \mathcal{W}$. Se $w = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbf{R}$ temos que $v + w = (1+\alpha)v \in \mathcal{W}$ pelo caso anterior. Caso contrário, ou seja, quando A, B, C não pertençam à mesma reta, considere o ponto $D = B + (1/2)\overline{BC}$ que pertence a $\mathcal{P}$, já que a reta determinada por B e C está contida em $\mathcal{P}$. Da mesma forma concluímos que $E = A + 2\overline{AD} \in \mathcal{P}$ e então $\overline{AE} \in \mathcal{W}$.
Vamos provar que $v + w = \overline{AE}$. Observe que

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = v + (1/2)\overline{BC} \Longrightarrow v = \overline{AD} - (1/2)\overline{BC}$$

e

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = w + (1/2)\overline{CB} \Longrightarrow w = \overline{AD} + (1/2)\overline{BC}$$

Portanto $v + w = [\overline{AD} - (1/2)\overline{BC}] + [\overline{AD} + (1/2)\overline{BC}] = 2\overline{AD} = \overline{AE}$. $\square$

TEOREMA 2.15. *Seja $\mathcal{P}_i$, $i \in I$, uma família de variedades afins com subespaços diretores $\mathcal{S}_i$, $i \in I$, tal que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}_i \neq \emptyset$. Então $\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}_i$ é uma variedade afim cujo subespaço diretor é $\bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$.*

Prova: Seja $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}_i$. Dado um ponto $B \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}_i$ temos que $\overline{AB} \in \mathcal{S}_i$ para todo $i \in I$ e então $\overline{AB} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$.
Reciprocamente, dado um vetor $v \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$, para cada índice i existe um ponto $B_i \in \mathcal{P}_i$ tal que $\overline{AB_i} = v$.
Como existe um único ponto $B \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{AB} = v$, devemos ter $B_i = B$ para todo i.
Assim $B \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}_i$ e $\overline{AB} = v$.
Mostramos então que

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}_i = \{B \in \mathcal{U} : \overline{AB} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i\}$$

o que significa que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}_i$ é uma variedade afim cujo subespaço diretor é $\bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$. $\square$

Exercícios

1. Prove que se $\mathcal{P}$ é uma variedade afim que contem o vetor nulo do seu subespaço diretor, $\mathcal{S}(\mathcal{P})$, então $\mathcal{P}$ coincide com $\mathcal{S}(\mathcal{P})$.

2. Dado um subconjunto $\mathcal{K}$ de um espaço afim $\mathcal{U}$ existe uma variedade afim minimal $\mathcal{P}$ que contém $\mathcal{K}$. (Considere $\mathcal{P} = \bigcap_{W\subset\mathcal{P}_i} \mathcal{P}_i$.)

3. Prove que o conjunto solução de um sistema linear compatível é uma variedade afim cujo subespaço diretor é o conjunto solução do sistema linear homogêneo associado.

2.2. Equações paramétricas das variedades afins. Nesta seção descrevemos as variedades afins usando equações.

Consideramos $\mathcal{U}$ um espaço afim n-dimensional associado a um espaço vetorial $\mathbf{V}$. Fixamos em $\mathcal{U}$ um sistema de coordenadas afins, $\sum = (O, e_1, ..., e_n)$. Seja A um ponto de $\mathcal{U}$ e seja $\mathcal{P}$ uma variedade afim k-dimensional que passa por A e tem a direção de um subespaço vetorial $\mathcal{S}$. Consideramos $\{f_1, ..., f_k\}$ uma base de $\mathcal{S}$. Podemos escrever:

$$\begin{gathered} f_1 = \alpha_{11}e_1 + ... + \alpha_{1n}e_n \\ \vdots \\ f_r = \alpha_{r1}e_1 + ... + \alpha_{rn}e_n \end{gathered}$$

Se $A = (a_1, ..., a_n)_{\sum}$ forem as coordenadas afins do ponto A em relação ao sistema de coordenadas afins $\sum$, sabemos que um ponto $X = (x_1, \ldots, x_n)_{\sum}$ pertence à variedade afim $\mathcal{P}$ se e somente se o vetor $\overline{AX}$ pertence ao subespaço $\mathcal{S}$. Escrevendo $\overline{AX} = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_r f_r$ e lembrando que $\overline{OX} = \overline{OA} + \overline{AX}$ obtemos as equações:

$$(*) : \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1\alpha_{11} + ... + \lambda_k\alpha_{k1} \\ \qquad\vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1\alpha_{1n} + ... + \lambda_k\alpha_{kn} \end{cases}$$

Essas equações são chamadas *equações paramétricas* da variedade $\mathcal{P}$ em relação ao sistema de coordenadas afins $\sum$.

Reciprocamente, é fácil ver que o conjunto de pontos X de $\mathcal{U}$ cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas afins $\sum$, satisfazem a um sistema de equações lineares do tipo $(*)$ é uma variedade afim que passa pelo ponto $A = (a_1, ..., a_n)_{\sum}$ e que tem a direção do subespaço gerado por $\{f_1, \ldots, f_k\}$.

EXEMPLO 2.16. *Consideramos em* $\mathbf{R}^4$ *a base canônica* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *e o subespaço* $\mathcal{S} = [f_1 = e_1 - e_3, f_2 = 2e_1 + e_2]$. *Fixamos em* $\mathbf{R}^4$ *o sistema de coordenadas afins* $\sum = ((0,0,0,0), e_1, e_2, e_3, e_4)$.

A variedade afim que passa pelo ponto $A = (2,1,0,1)_{\sum}$ *e tem a direção de* $\mathcal{S}$ *é:*

$$\mathcal{P} = \{(2 + \lambda_1 + 2\lambda_2, 1 + \lambda_2, 0 - \lambda_1, 1) \in \mathbf{R}^4 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Assim temos as equações paramétricas para $\mathcal{P}$ *em relação ao sistema de coordenadas afins* $\sum$ *:*

$$\begin{cases} x_1 = & 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 = & 1 + 3\lambda_2 \\ x_3 = & 0 - \lambda_1 \\ x_4 = & 1 \end{cases}$$

TEOREMA 2.17. *Se $\mathcal{P}$ é uma variedade afim k-dimensional em um espaço afim n-dimensional $\mathcal{U}$ então existe um sistema de coordenadas afins $\sum$ em $\mathcal{U}$ tal que um ponto $X = (x_1, \ldots, x_n)_{\sum}$ de $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{P}$ se e somente se $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$.*

Prova: Consideramos o subespaço diretor $\mathcal{S}$ da variedade afim $\mathcal{P}$ e fixamos $\{e_1, \ldots, e_k\}$ uma base de $\mathcal{S}$. Completamos essa base a uma base $\beta = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ do espaço vetorial associado a $\mathcal{U}$. Fixamos um ponto P_0 em $\mathcal{P}$ e consideramos o sistema de coordenadas afins $\sum = (P_0, \beta)$.
Dessa forma um ponto $X \in \mathcal{P}$ se e somente se $\overline{P_0X} \in \mathcal{S}$, isto é, se e somente se existirem $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{R}$ tais que

$$\overline{P_0X} = x_1e_1 + \cdots + x_ke_k$$

ou seja, $X = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)_{\sum} \in \mathcal{P}$ se e somente se $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. □

EXEMPLO 2.18. *Voltamos ao Exemplo 2.16 onde consideramos em $\mathbf{R}^4$ a base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, o subespaço $\mathcal{S} = [f_1 = e_1 - e_3, f_2 = 2e_1 + e_2]$ e construímos a variedade afim $\mathcal{P}$, que passa pelo ponto $A = (2, 1, 0, 1)_{\sum}$ e tem a direção de $\mathcal{S}$. Uma base do subespaço diretor de $\mathcal{P}$ é $\{f_1 = e_1 - e_3, f_2 = 2e_1 + 3e_2\}$ que podemos completar para uma base $\{f_1, f_2, e_3, e_4\}$ do $\mathbf{R}^4$. Vamos considerar um novo sistema de coordenadas afins em $\mathbf{R}^4$, $\sum_1 = (A, f_1, f_2, e_3, e_4)$. As coordenadas do ponto A nesse novo sistema são: $A = (0, 0, 0, 0)_{\sum_1}$*
Nesse caso temos as equações paramétricas para $\mathcal{P}$ em relação ao sistema de coordenadas afins $\sum_1$

$$\begin{cases} x_1 = & \lambda_1 \\ x_2 = & \lambda_2 \\ x_3 = & 0 \\ x_4 = & 0 \end{cases}$$

Teorema 2.19. *Seja* $\sum = (O, \beta)$ *um sistema de coordenadas afins em um espaço afim n-dimensional* $\mathcal{U}$. *Se* $\mathcal{P}$ *é uma variedade afim k-dimensional em* $\mathcal{U}$ *então existem uma matriz* $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $1 \le i \le n-k$, $1 \le j \le n$ *de posto* $n-k$ *e uma* $(n-k)$*-upla* $(b_1, \ldots, b_{n-k})$ *tais que um ponto* $X = (x_1, \ldots, x_n)_{\sum}$ *de* $\mathcal{U}$ *pertence a* $\mathcal{P}$ *se e somente se*

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + b_i = 0 \ , \ 1 \le i \le n-k.$$

Prova: Consideramos $\sum_1 = (P_0, \beta')$ um sistema de coordenadas afins como no Teorema 2.17.
Seja $X \in \mathcal{U}$ e denotamos as suas coordenandas afins em relação aos sistemas de coordenadas afins $\sum$ e $\sum_1$ por:

$$X = (y_1, \ldots, y_n)_{\sum} \quad X = (x_1, \ldots, x_n)_{\sum_1}.$$

A relação entre essas coordenadas é dada por:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + b_i \ \ 1 \le i \le n$$

em que $(a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ é a matriz de mudança da base β' para a base β e as coordenadas da origem, O, do sistema $\sum$ em relação ao sistema $\sum_1$ são $O = (b_1, \ldots, b_n)_{\sum_1}$, já que $\overline{P_0X} = \overline{P_0O} + \overline{OX}$.
Agora a tese segue facilmente do Teorema 2.17. $\square$

Observação. Concluímos da discussão acima que uma variedade afim k-dimensional $\mathcal{P}$ é o conjunto solução de um sistema linear não homogêneo compatível e o seu subespaço diretor $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ é o conjunto solução do sistema linear homogêneo associado.

Exemplo 2.20. *Seja* $\mathcal{U} = \mathbf{R}^2$ *espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathbf{R}^2$. *Fixemos em* $\mathcal{U}$ *o sistema de coordenadas afins* $\sum = (O, e_1, e_2)$ *em que* $O = (0,0)$ *e* $\{e_1, e_2\}$ *é a base canônica de* $\mathbf{R}^2$.
Consideremos em $\mathcal{U}$ *os pontos* $B_o = (0, b_o)$ *e* $B = (a, b)$ *com* $a \neq 0$.
Seja $f_1 = \overline{B_oB} = ae_1 + (b - b_o)e_2$. *Como* $a \neq 0$ *temos que* $\{f_1, e_2\}$ *é uma base de* $\mathbf{R}^2$.
Podemos contruir um novo sistema de coordenadas afins em $\mathcal{U}$, $\sum_1 = (B_o, f_1, e_2)$. *Temos que* $O = (0, -b_o)_{\sum_1}$ *e* $e_1 = (1/a)f_1 + [(b_o - b)/a]e_2$.
Seja $X \in \mathcal{U}$ *denotamos as suas coordenandas afins em relação aos sistemas de coordenadas afins* $\sum$ *e* $\sum_1$ *por:*

$$X = (y_1, y_2)_{\sum} \quad X = (x_1, x_2)_{\sum_1}.$$

Como $\overline{B_oX} = \overline{B_oO} + \overline{OX}$ *podemos escrever:*

$$x_1f_1 + x_2e_2 = (-b_o)e_2 + [y_1e_1 + y_2e_2] = (y_1/a)f_1 + [y_2 - b_o + [(b_o - b)/a]e_2$$

O ponto $X = (x_1, x_2)_{\Sigma_1}$ *pertence à reta determinada por* B *e* B_o *se e somente se* $x_2 = 0$. *Portanto* $X = (y_1, y_2)_{\Sigma}$ *pertence à reta determinada por* B *e* B_o *se e somente se* $y_2 = [(b - b_o)/a]y_1 + b_o$.

DEFINIÇÃO 2.21. *Se* n *for a dimensão do espaço afim* $\mathcal{U}$ *e* $n-1$ *for a dimensão da variedade afim,* $\mathcal{P}$*, então* $\mathcal{P}$ *será chamada de hiperplano de* $\mathcal{U}$.

EXEMPLO 2.22. *O Teorema 2.19 nos diz que um hiperplano* $\mathcal{H}$ *em um espaço afim de dimensão* n*,* $\mathcal{U}$ *pode ser representado por uma equação do tipo:*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d$$

em que nem todos os $a_{i's}$ *são nulos.*

Observações:

(1) Do Teorema 2.19 e do Exemplo 2.22 concluímos que uma variedade afim k-dimensional em um espaço afim $\mathcal{U}$, de dimensão n, pode ser vista como a interseção de $n - k$ hiperplanos de $\mathcal{U}$.

(2) Quando um sistema linear não homogêneo é incompatível geometricamente isso significa que não existe ponto comum a todos os hiperplanos dados por cada uma das equações do sistema.

(3) Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano em um espaço afim $\mathcal{U}$, de dimensão n, definido pela equação:

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx_j + b = 0$$

em relação a um sistema de coordenadas afins fixado.
O conjunto dos pontos de $\mathcal{U}$ que satisfazem:

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx_j + b > 0$$

e o conjunto dos pontos de $\mathcal{U}$ que satisfazem:

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx_j + b < 0$$

são chamados de *semi-espaços* determinados por $\mathcal{H}$. (Essa denominação ficará melhor explicada no Capítulo dos Espaços Euclideanos.)
O espaço afim $\mathcal{U}$ é a união disjunta de $\mathcal{H}$ e dos dois semi-espaços determinados por $\mathcal{H}$.

2.3. Variedade afim gerada por um conjunto de pontos. Dado um conjunto de pontos F em um espaço afim $\mathcal{U}$ a interseção de todas as variedades afins que contém F é uma variedade afim, que será denotada por $[F]$. É claro que $[F]$ é a menor variedade afim que contém F no sentido de ela estar contida em toda variedade afim de $\mathcal{U}$ que contém F.

DEFINIÇÃO 2.23. *A variedade afim $[F]$ é chamada variedade afim gerada pelo conjunto F.*

Em particular dadas duas variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ a variedade afim gerada pela união, $\mathcal{P}_1 \bigcup \mathcal{P}_2$, é denotada por $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$, ou seja,

$$[\mathcal{P}_1 \bigcup \mathcal{P}_2] = \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2.$$

EXEMPLO 2.24. *Dados dois pontos A e B em um espaço afim $\mathcal{U}$ a variedade afim gerada pelo conjunto $\{A, B\}$ é a reta determinada por A e B.*

EXEMPLO 2.25. *No espaço afim $\mathbf{R}^3$ consideramos o conjunto de pontos $F = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)\}$. A variedade afim gerada por F é:*

$$[F] = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

EXEMPLO 2.26. *No espaço afim $\mathbf{R}^2$ consideramos as variedades afins $\mathcal{P}_1 = \{(1,0)\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{(0,1)\}$. A variedade afim $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 = \{(1+\alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbf{R}\}$ é a reta determinada pelos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$.*

EXEMPLO 2.27. *Consideramos $\mathbf{R}^4$ como espaço afim associado ao espaço vetorial $\mathbf{R}^4$. Fixamos os pontos $A = (1,1,0,0)$, $B = (0,1,1,0)$ e $C = (0,0,1,1)$. A variedade afim gerada por esses pontos, $[A, B, C]$, tem como subespaço diretor $\mathcal{S} = [\{\overline{AB} = (-1,0,1,0), \overline{AC} = (-1,-1,1,1)\}]$. Equações paramétricas dessa variedade afim são:*

$$\begin{cases} x_1 = & 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 = & 1 - \lambda_2 \\ x_3 = & 0 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = & 0 + \lambda_2 \end{cases}$$

EXEMPLO 2.28. *Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são duas retas concorretes em E^3, então $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$ é o plano determinados por essas retas.*

Exemplo 2.29. *Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são duas retas reversas em E^3, então $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$ é todo o E^3.*

Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são variedades afins com subespaços diretores $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ respectivamente, sabemos que $\mathcal{S}_1 \bigcap \mathcal{S}_2$ é o subespaço diretor de $\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2$. O próximo Teorema relacionará o subespaço diretor de $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$ com $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

Teorema 2.30. *Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são variedades afins com subespaços diretores $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ respectivamente, e tais que $\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2$ é não vazia então o subespaço diretor de $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$ é $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.*

Prova: Seja $\mathcal{W}$ o subespaço diretor da variedade afim $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$. Vamos provar que $\mathcal{W} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.
Fixamos um ponto $A \in \mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2$ e consideramos $\mathcal{Q}$, a variedade afim que contém o ponto A e cujo subespaço diretor é $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.

$$\mathcal{Q} = \{B \in \mathcal{U} : \overline{AB} \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2\}.$$

Observamos que $\mathcal{Q}$ é uma variedade afim que contém as variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, pois se $X \in \mathcal{P}_1$, então $\overline{AX} \in \mathcal{S}_1$ e da defini ção de $\mathcal{Q}$ temos que $x \in \mathcal{Q}$. Portanto $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{Q}$. Da mesma maneira provamos que $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{Q}$. Então por definição de variedade afim gerada temos $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{Q}$ e portanto $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.
Por outro lado, seja $B \in \mathcal{Q}$ então $\overline{AB} \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, e assim podemos escrever $\overline{AB} = s_1 + s_2$ com $s_1 \in \mathcal{S}_1$ e $s_2 \in \mathcal{S}_2$. Agora, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são variedades afins, então existem pontos $C_1 \in \mathcal{P}_1$ e $C_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que $s_1 = \overline{AC_1}$ e $s_2 = \overline{AC_2}$ e assim $\overline{AB} = \overline{AC_1} + \overline{AC_2}$.
Como os pontos C_1 e C_2 pertencem a $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$ temos que os vetores $\overline{AC_1}$ e $\overline{AC_2}$ pertencem ao subespaço $\mathcal{W}$ e portanto $\overline{AB} \in \mathcal{W}$. Isso mostra que $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{W}$ e que $B \in \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$. Portanto $\mathcal{W} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ e $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 = \mathcal{Q}$. □

Corolário 2.31. *Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são variedades afins de dimensões finitas e tais que $\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2$ é não vazia então*

$$\dim(\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2) + \dim(\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2) = \dim(\mathcal{P}_1) + \dim(\mathcal{P}_2).$$

Prova: O resultado segue facilmente do teorema anterior e do teorema da dimensão da soma de espaços vetoriais que afirma que $\dim(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2)+\dim(\mathcal{S}_1 \bigcap \mathcal{S}_2) = \dim(\mathcal{S}_1) + \dim(\mathcal{S}_2)$, em que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são os subespaços diretores de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ respectivamente.

DEFINIÇÃO 2.32. *Um conjunto* $F = \{A_0, ..., A_p\}$ *com* $p+1$ *pontos de* $\mathcal{U}$ *é chamado linearmente independente se a variedade afim,* $[F]$*, gerada por* F *tiver dimensão* p*.*

TEOREMA 2.33. *Se o conjunto de pontos* $\{A_0, ..., A_p\}$ *de* $\mathcal{U}$ *for linearmente independente então o conjunto de vetores*

$$\{\overline{A_kA_0}, ..., \overline{A_kA_{k-1}},\ \overline{A_kA_{k+1}}, ..., \overline{A_kA_p}\}$$

é linearmente independente, para todo inteiro k*,* $0 \leq k \leq p$*.*

Prova: Suponhamos, por absurdo, que exista um índice j, $0 \leq j \leq p$ para o qual o conjunto

$$\{\overline{A_jA_0}, ..., \overline{A_jA_{j-1}}, ..., \overline{A_jA_p}\}$$

seja **L.D.**
Consideramos o subespaço vetorial

$$\mathcal{S} = [\{\overline{A_jA_0}, ..., \overline{A_jA_{j-1}},\ \overline{A_jA_{j+1}} ..., \overline{A_jA_p}\}]$$

e a variedade afim que contém o ponto A_j e tem a direção de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{P} = \{A_j + v \ : \ v \in \mathcal{S}\}$$

Então a dimensão de $\mathcal{P}$ é menor ou igual a $p-1$.
Por outro lado observamos que a variedade afim $\mathcal{P}$ contém o conjunto $\{A_0, ..., A_p\}$ e, portanto, contém a variedade afim gerada por esse conjunto, cuja dimensão é p, donde concluímos que $\dim \mathcal{P} \geq p$, o que é uma contradição.$\square$

TEOREMA 2.34. *Seja* $\{A_0, ..., A_p\}$ *um conjunto de pontos do espaço afim* $\mathcal{U}$*. Se existe um índice* k*,* $0 \leq k \leq p$*, para o qual o conjunto de vetores*

$$\{\overline{A_kA_0}, ..., \overline{A_kA_{k-1}}, \overline{A_kA_{k+1}}, ..., \overline{A_kA_p}\}$$

é **L.I.** *então, o conjunto de pontos* $\{A_0, ..., A_p\}$ *é* **L.I.**.

Prova: Consideramos o subespaço vetorial

$$\mathcal{S} = [\{\overline{A_kA_0}, ..., \overline{A_kA_{k-1}}, \overline{A_kA_{k+1}}, ..., \overline{A_kA_p}\}].$$

Como o conjunto de vetores $\{\overline{A_kA_0}, ..., \overline{A_kA_{k-1}}, \overline{A_kA_{k+1}}, ..., \overline{A_kA_p}\}$ é **L.I.** temos que
$\dim \mathcal{S} = p$.
Seja $\mathcal{P} = \{A_k + v \ : \ v \in \mathcal{S}\}$ a variedade afim que passa por A_k e tem a direção de $\mathcal{S}$.
Como a variedade afim gerada $[\{A_0, ..., A_p\}] \subset \mathcal{P}$ temos que o subespaço diretor de $[\{A_0, ..., A_p\}]$ está contido em $\mathcal{S}$. Portanto,

$\dim[\{A_0,...,A_p\}] \leq p$.
Por outro lado, como $\{A_0,...,A_p\} \subset [\{A_0,...,A_p\}]$ o subespaço diretor de $[\{A_0,...,A_p\}]$ contém os vetores $\overline{A_kA_0},...,\overline{A_kA_{k-1}},\overline{A_kA_{k+1}},...,\overline{A_kA_p}$ e, portanto, contém o subespaço $\mathcal{S}$. Assim, $\dim[\{A_0,...,A_p\}] \geq p$.
Concluímos assim que $\dim[\{A_0,...,A_p\}] = p$, e conseqüentemente, que o conjunto de pontos $\{A_0,...,A_p\}$ é **L.I.**. □

TEOREMA 2.35. *Seja $\mathcal{U}$ um espaço afim de dimensão n, então uma condição necessária e suficiente para que exista em $\mathcal{U}$ uma única variedade afim de dimensão p $(p < n)$ que contenha $p+1$ pontos dados $A_0,\ldots,A_p$ é que o conjunto $F = \{A_0,\ldots,A_p\}$ seja linearmente independente.*

Prova: Suponha, por absurdo, que a variedade afim, $[F]$, gerada por F tenha dimensão menor ou igual a $p-1$. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço diretor de $[F]$.
Como $p < n$ e $\dim \mathcal{S} \leq p-1$ podemos construir dois subespaços vetoriais distintos, $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, de dimensão p que contenham $\mathcal{S}$.
Consideramos $\mathcal{P}_i = \{A_0 + v \ : \ v \in \mathcal{S}_i\},\ i = 1,2$, a variedade afim que passa por A_0 e tem a direção de $\mathcal{S}_i$. Por construção, as variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, tem dimensão p, são distintas e contém F. Isso contradiz a hipótese de haver uma única variedade afim de dimensão p que contém F.
Para provarmos a recíproca suponhamos que o conjunto de pontos $F = \{A_0,...,A_p\}$ seja **L.I.**. Então, a variedade afim, $[F]$, gerada por F tem dimensão p. Suponhamos que $\mathcal{P}$ seja uma outra variedade afim de dimensão p que contenha F. Vamos provar que $[F] = \mathcal{P}$.
Como $\mathcal{P}$ contém F temos que $[F] \subset \mathcal{P}$ e, então, o subespaço diretor de $[F]$ está contido no subespaço diretor de $\mathcal{P}$, mas esses subespaços têm ambos dimensão p, portanto, devem ser iguais.
Ora, as variedades afins $\mathcal{P}$ e $[F]$ tem pontos em comum e tem o mesmo subespaço diretor, então elas devem ser iguais.

Exercícios.

(1) Dados dois pontos A e B em um espaço afim $\mathcal{U}$, prove que existe uma única reta em $\mathcal{U}$ que contem A e B.

(2) Se r e s são duas retas concorrentes em um espaço afim $\mathcal{U}$, prove que existe um único plano em $\mathcal{U}$ que contem r e s.

(3) Se r é uma reta em um espaço afim $\mathcal{U}$ e A é um ponto em $\mathcal{U}$ que não está em r, prove que existe um único plano em $\mathcal{U}$ que contem A e r.

(4) Prove que todo semi-espaço é um conjunto convexo.(Um conjunto é convexo se qualquer segmento de extremidades pertencentes a ele, nele está contido.)

2.4. Posição relativa de variedades afins. Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ va-riedades afins contidas em um espaço afim $\mathcal{U}$, com subespaços diretores $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$, respectivamente

DEFINIÇÃO 2.36. *Dizemos que a variedade afim $\mathcal{P}_1$ é paralela à variedade afim $\mathcal{P}_2$ se $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$ ou se $\mathcal{S}(\mathcal{P}_2) \subset \mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$,*

EXEMPLO 2.37. *Seja $\mathcal{P}$ uma variedade afim em um espaço afim $\mathcal{U}$. Se A é um ponto em $\mathcal{U}$ então a variedade afim*

$$\mathcal{Q} = \{B \in \mathcal{U} : \overline{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{P})\}$$

é paralela a $\mathcal{P}$ e contém o ponto A.

Observações.

(1) Se $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ diremos que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são paralelas.

(2) A variedade afim formada por um ponto A em um espaço afim $\mathcal{U}$ é paralela a qualquer varidade afim de $\mathcal{U}$, pois o subespaço diretor de $\{A\}$ é $\{\mathbf{0}\}$, que está contido em qualquer subespaço.

Exercícios.

(1) Prove que se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são duas variedades afins paralelas então vale uma das seguintes alternativas:
(a) $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$
(b) $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$
(c)$\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, não se interceptam.

(2) Encontre um exemplo de duas variedades afins que não se interceptem mas não são paralelas.

(3) Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ variedades afins de mesma dimensão, r. Prove que se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são paralelas então $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ ou $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ e $\dim(\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2) = r + 1$.

DEFINIÇÃO 2.38. *As variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ serão chamadas de variedades afins concorrentes se elas não forem paralelas e tiverem pelo menos um ponto em comum.*

Suponhamos que as variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sejam concorrentes, consideramos A um ponto comum entre elas. Se M é um ponto qualquer da variedade $\mathcal{P}_1$ (ou de $\mathcal{P}_2$) então o vetor $\overline{AM}$ pertence ao subespaço $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$ (ou a $\mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$). Assim a questão da posição relativa das variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, nesse caso, está naturalmente relacionada com o estudo dos subespaços $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$ no espaço vetorial $\mathbf{V}$.

Observações.

(1) Vimos que se as variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ se interceptam, então, a sua interseção, $\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2$, é uma variedade afim que passa por A e tem a direção de $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$.

(2) A variedade afim $\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2$. pode ser formada por um único ponto, por exemplo, se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ forem duas retas ou uma reta e um plano.

(3) Já sabemos que a variedade afim que passa pelo ponto A e tem a direção de $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) + \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$ é a variedade afim $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$, gerada pelo conjunto $\mathcal{P}_1 \bigcup \mathcal{P}_2$, essa é a única variedade afim de dimensão $\dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_2 - \dim(\mathcal{P}_1 \bigcap \mathcal{P}_2)$ que contém $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

DEFINIÇÃO 2.39. *Duas variedades afins serão chamadas reversas se elas não forem concorrentes nem paralelas.*

EXEMPLO 2.40. *No espaço tri-dimensional E^3 sabemos que duas retas podem ser reversas, enquanto que um plano e uma reta nunca serão reversos.*

Conforme a dimensão do espaço afim aumenta há possibilidade da e--xistência de variedades afins reversas com dimensão maior que 1. O teorema abaixo mostra uma maneira de construir variedades afins reversas.

TEOREMA 2.41. *Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ duas variedades afins concorrentes não paralelas de dimensões p e q respectivamente. Seja $\mathcal{P} \bigvee \mathcal{Q}$ a variedade afim gerada pela união das duas variedades afins dadas. Então qualquer variedade afim que não esteja contida em $\mathcal{P} \bigvee \mathcal{Q}$ que tenha dimensão q e que seja paralela a $\mathcal{Q}$ é reversa a $\mathcal{P}$.*

Prova: Chamamos de $\mathcal{Q}'$ a variedade afim que não esteja contida em $\mathcal{P}\bigvee\mathcal{Q}$, que tenha dimensão q e que seja paralela a $\mathcal{Q}$. Seja C um ponto de $\mathcal{Q}'$. Como $\mathcal{Q}'$ é paralela a $\mathcal{Q}$ e tem dimensão q podemos escrever:

$$\mathcal{Q}' = C + \mathcal{S}(\mathcal{Q}), \qquad (*)$$

onde $\mathcal{S}(\mathcal{Q})$ é o subespaço diretor de $\mathcal{Q}$.
Vamos provar que $\mathcal{Q}'$ e $\mathcal{P}$ são reversas.
Observamos que $\mathcal{Q}'$ não é paralela a $\mathcal{P}$, pois senão teríamos $\mathcal{S}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{P})$ ou $\mathcal{S}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{Q})$ e, assim, $\mathcal{Q}$ seria paralela a $\mathcal{P}$.
Vamos provar agora que $\mathcal{Q}'$ e $\mathcal{P}$ não se interceptam.
Por hipótese $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{P}$ são concorrentes, consideramos então um ponto $B \in \mathcal{Q}\bigcap\mathcal{P}$ e escrevemos:

$$\mathcal{P} = B + \mathcal{S}(\mathcal{P}). \qquad (**)$$

Suponhamos por contradição que exista um ponto $X \in \mathcal{Q}'\bigcap\mathcal{P}$. Então usando $(*)$ e $(**)$ concluímos que existem vetores $v \in \mathcal{S}(\mathcal{Q})$ e $w \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ tais que $X = C + v$ e $X = B + w$. O que implica em

$$C = B + (w - v).$$

De onde concluímos que $C \in B + (\mathcal{S}(\mathcal{Q}) + \mathcal{S}(\mathcal{P}))$.
Sabemos que $\mathcal{P}\bigvee\mathcal{Q} = B + (\mathcal{S}(\mathcal{P}) + \mathcal{S}(\mathcal{Q}))$, temos assim uma contradição pois por hipótese $\mathcal{Q}'$ não está contida em $\mathcal{Q}\bigvee\mathcal{P}$. $\square$

EXEMPLO 2.42. *Considere o espaço afim $\mathcal{U} = \mathbf{R}^4$ associado ao espaço vetorial $\mathbf{R}^4$. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de $\mathbf{R}^4$.*
Sejam $\mathcal{S}_1 = [e_1, e_2]$ e $\mathcal{S}_2 = [e_1, e_3]$ subespaços de $\mathbf{R}^4$.
Seja $\mathcal{P}_1$ a variedade afim que passa por $A = (1,1,1,1)$ e tem a direção de $\mathcal{S}_1$. Assim,

$$\mathcal{P}_1 = \{(1+\alpha, 1+\beta, 1, 1) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

Seja $\mathcal{P}_2$ a variedade afim que passa por $A = (1,1,1,1)$ e tem a direção de $\mathcal{S}_2$. Assim,

$$\mathcal{P}_2 = \{(1+\gamma, 1, 1+\delta, 1) : \gamma, \delta \in \mathbf{R}\}.$$

A interseção $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}$ é a variedade afim que passa por A e tem a direção de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [(1,0,0,0)]$:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \{(1+\alpha, 1, 1, 1) : \alpha \in \mathbf{R}\}$$

A variedade afim que passa por A e tem a direção de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ é

$$\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 = \{(1+\alpha, 1+\beta, 1+\gamma, 1) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

Observe que $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 \neq \mathbf{R}^4$ pois $B = (1,1,1,0) \notin \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$.

A variedade afim que passa por B e tem a direção de $\mathcal{S}_2$:

$$\mathcal{Q} = \{(1+\lambda, 1, 1+\gamma, 0) : \lambda, \gamma \in \mathbf{R}\}$$

é paralela a $\mathcal{Q}$ e reversa a $\mathcal{P}_1$.

Teorema 2.43. *Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ variedades afins reversas de dimensoes finitas, contidas no espaço afim $\mathcal{U}$ com subespaços diretores são $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$ respectivamente. Seja $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$, a variedade afim gerada pela união das duas variedades afins. Então vale a expressão:*

$$\dim \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 = \dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_2 - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) + 1.$$

Prova: Consideramos um ponto A em $\mathcal{P}_1$ e um ponto B em $\mathcal{P}_2$.
Denotamos por $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{P}_1)+\mathcal{S}(\mathcal{P}_2)+[\overline{AB}]$. Chamamos de $\mathcal{Q}$ a variedade afim que passa por A e tem a direção de $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{Q} = \{X \in \mathcal{U} : \overline{AX} \in \mathcal{S}\}$$

Vamos provar primeiro que $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$. Observe que os pontos A e B estão em $\mathcal{Q}$, então é claro que $\mathcal{Q}$ contém $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Portanto $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$.
Reciprocamente, se $\mathcal{R}$ é uma variedade afim que contém $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ então o seu subespaço diretor, $\mathcal{S}(\mathcal{R})$, deve conter $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1), \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$ e $[\overline{AB}]$.
Portanto

$$\mathcal{S}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{S}(\mathcal{P}_k) + \mathcal{S}(\mathcal{P}_l) + [\overline{AB}].$$

Dessa forma temos que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Observamos agora que $P_1 \bigvee \mathcal{P}_2$ é uma variedade afim que tem a propriedade imposta na definição da variedade afim $\mathcal{R}$. Concluímos assim que $\mathcal{Q} \subset P_1 \bigvee \mathcal{P}_2$.
Vamos calcular agora a dimensão de $\mathcal{Q}$. Sabemos que

$$\dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) + \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) = \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) + \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_2) - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)).$$

Vamos provar que o subespaço $\mathcal{S}$ é soma direta de $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) + \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$ e $[\overline{AB}]$, e assim teremos que

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) + \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_2) - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) + 1$$

é a dimensão de $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$.
Suponhamos por contradição que $\overline{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_1)+\mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$. Então existem vetores $x \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$ e $y \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$ tais que $\overline{AB} = x + y$.
Como $A \in \mathcal{P}_1$ pelo axioma (i) da definição de espaço afim, existe um único ponto $C \in \mathcal{P}_1$ tal que $\overline{AC} = x$.
Agora pelo axioma (ii) da definição de espaço afim temos:

$$x + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

Logo, $\overline{CB} = y$ e $\overline{BC} = -y \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$. Assim, $C \in \mathcal{P}_2$ e, portanto, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ tem um ponto em comum, o que é uma contradição com a hipótese de as variedades afins serem reversas. $\square$

COROLÁRIO 2.44. *Se no espaço afim n-dimensional $\mathcal{U}$ existirem variedades afins $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ reversas então*

$$\dim(P_1) \leq n-2 \ \ e \ \ \dim(P_2) \leq n-2$$

Prova: Suponhamos, por contradição, que $\dim(P_1) \geq n-1$. Pelo Teorema 2.43 temos que:

$$\dim \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \bigcap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) + 1 =$$

$$\dim(P_1) + 1 + [\dim(P_2) - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \bigcap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2))]$$

Como $\dim(\mathcal{P}_1) \geq n-1$ temos que $\dim \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 \geq n + \dim(P_2) - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \bigcap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2))$. Então $\dim(P_2) = \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \bigcap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2))$ o que implica em $\mathcal{S}(\mathcal{P}_2) \subset \mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$, ou seja, que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são paralelas, o que é uma contradição. $\square$

TEOREMA 2.45. *Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ variedades afins no espaço afim n-dimensional $\mathcal{U}$ tais que $\dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_2 - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) = n$. Então, ou $\mathcal{P}_1 = \mathcal{U}$ ou $\mathcal{P}_2 = \mathcal{U}$ ou $\mathcal{P}_1$e P_2 são concorrentes.*

Prova: Suponhamos que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sejam variedades afins ambas distintas de $\mathcal{U}$. Assim $\dim \mathcal{P}_1 < n$ e $\dim \mathcal{P}_2 < n$.
Há somente três possibilidades para as posiçõses relativas possíveis entre $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$:
(i) $\mathcal{P}_1$ é paralela a $\mathcal{P}_2$;
(ii) $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ reversas;
(iii) $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ concorrentes.
Se $\mathcal{P}_1$ for paralela a $\mathcal{P}_2$, então a dimensão da interseção dos sub-espaços diretores $\mathcal{S}(\mathcal{P}_1)$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}_2)$, é igual ao mínimo entre $\dim \mathcal{P}_1$ e $\dim \mathcal{P}_2$. Como $\dim \mathcal{P}_1 < n$ e $\dim \mathcal{P}_2 < n$, não podemos ter $\dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_2 - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) = n$.
Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ forem reversas, pelo Teorema 2.43 a variedade afim $\mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2$ tem dimensão $\dim \mathcal{P}_1 \bigvee \mathcal{P}_2 = \dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_2 - \dim(\mathcal{S}\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) + 1$ e contém $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Então $\dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_2 - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) + 1 \leq n$ dessa forma não podemos ter $\dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_2 - \dim(\mathcal{S}(\mathcal{P}_1) \cap \mathcal{S}(\mathcal{P}_2)) = n$.
Concluímos então que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ devem interceptar-se. $\square$

Exercícios.

(1) Se r e s são duas retas contidas em um espaço afim de dimensão 2, prove que r e s são paralelas ou r e s tem um único ponto em comum.

(2)Se π_1 e π_2 são planos em um espaço afim tri-dimensional, prove que π_1 e π_2 são paralelos ou $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta.

(3) Prove que um hiperplano não pode ser reverso a nenhuma variedade afim.

4) Prove que por três pontos de um espaço afim, não pertencentes a uma mesma reta, passa um único plano.

5) Prove que num espaço afim de dimensão 3, uma reta e um plano não paralelos têm um único ponto em comum.

6) Prove que num espaço afim de dimensão 4, a interseção de dois hiperplanos não paralelos é um plano.

7) Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ duas variedades com subespaços diretores S_1 e S_2 respectivamente, em um espaço afim de dimensão finita, tais que

$$S_1 \oplus S_2 = \mathbf{V}.$$

Prove que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ têm um único ponto comum.

8) Prove que dois planos não paralelos de um espaço afim de dimensão 4 têm, em comum, ou um único ponto ou uma reta.

9) Demonstrar que, em um espaço afim de dimensão 4, existem uma reta e um plano, não paralelos, que não têm ponto comum.

10) Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto de $p+1$ pontos ($p \leq n$) seja linearmente e independente é que ele não esteja contido em nenhuma variedade linear de dimensão $p-1$.

11) Considere o espaço afim $\mathbf{R}^4$ associado ao espaço vetorial $\mathbf{R}^4$. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica em $\mathbf{R}^4$. Sejam $\mathcal{S} = [e_4 - e_2]$ e $\mathcal{T} = [e_1 - e_2, e_1 - e_4]$ subespaços de $\mathbf{R}^4$ Sejam $\mathcal{P}$ a variedade afim que passa por $A = (1, 0, 0, 1)$ e tem a direção de $\mathcal{S}$, e $\mathcal{Q}$ a variedade afim que passa por $B = (0, 1, 0, 0)$ e tem a direção de $\mathcal{T}$.
i) Dê equações paramétricas de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$;
ii) Qual é a posição relativa de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$?
iii) Dê equações da variedade afim $\mathcal{P} \bigvee \mathcal{Q}$, gerada por $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$.

12) Considere o espaço afim $\mathbf{R}^4$ associado ao espaço vetorial $\mathbf{R}^4$. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica em $\mathbf{R}^4$. Sejam $\mathcal{S} = [e_1 + e_3]$ e $\mathcal{T} = [e_1 - e_2 + 2e_3]$ subespaços de $\mathbf{R}^4$ Sejam $\mathcal{P}$ a variedade afim que passa por $A = (1, 1, 0, 0)$ e tem a direção de $\mathcal{S}$, e $\mathcal{Q}$ a variedade afim que passa

por $B = (0,0,1,0)$ e tem a direção de $\mathcal{T}$. i) Dê equações paramétricas de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$;
ii) Qual é a posição relativa de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$?
iii) Existe alguma variedade afim de $\mathbf{R}^4$ que contenha $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ e que tenha dimensão menor que 4? Em caso afirmativo exiba-a.

13) Em relação a um sistema de coordenadas de um espaço afim de dimensão 4, sejam A, B, C os pontos de coordenadas (1,0,0,0), (0,1,0,0) e (0,0,1,0). Dê equações paramétricas do plano que passa por A, B e C.

CAPíTULO 2

Espaços Euclideanos

1. Espaços Euclideanos

DEFINIÇÃO 1.1. *Um espaço afim* $\mathcal{U}$ *associado a um espaço vetorial* V *de dimensão finita,* m*, munido de produto interno,* $<,>$ *é chamado de espaço euclideano de dimensão* m*.*

EXEMPLO 1.2. *Em* V^3 *considere o produto interno,* $<\vec{u}, \vec{v}> = \cos\theta$*, onde* θ *é o ângulo entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v} \in V^3$*. O espaço* E^3 *é um espaço euclideano de dimensão 3.*

EXEMPLO 1.3. *Considere* $\mathbf{R}^n$ *como espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathbf{R}^n$ *munido do produto interno usual* $< u, v >$ *. O espaço afim* $\mathbf{R}^n$ *é um espaço euclideano de dimensão* n*.*

DEFINIÇÃO 1.4. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço euclideano. Se* A *e* B *são pontos de* $\mathcal{U}$*, a distância entre* A *e* B *é definida por* $||\overline{AB}||$*, sendo* $||\ \ ||$ *a norma em* V*.*

Notação: $d(A, B) = ||\overline{AB}||$ denota a distância entre A e B.

TEOREMA 1.5. *1)* $d(A, B) \geq 0$*;*
2) $d(A, B) = 0$ *se e somente se* $A = B$*;*
3) $d(B, A) = d(A, B)$*;*
4) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ *(desigualdade triangular).*

Prova:
1) $d(A, B) \geq 0$ pois $||v|| \geq 0,\ \forall v \in V$.
2) Se $d(A, B) = 0$ então $||\overline{AB}|| = 0$ e portanto $\overline{AB} = 0$.
Assim $A = B$. A recíproca é óbvia.
3) $\overline{BA} = -\overline{AB}$ e então $||\overline{BA}|| = ||\overline{AB}||$ e $d(B, A) = d(A, B)$.
4) $d(A, C) = ||\overline{AC}|| = ||\overline{AB} + \overline{BC}|| \leq ||\overline{AB}|| + ||\overline{BC}|| = d(A, B) + d(B, C)$. $\square$

DEFINIÇÃO 1.6. *Dados três pontos distintos, Q, P e R em um espaço euclideano $\mathcal{U}$, o ângulo $\angle QPR$ é definido como sendo o número real θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que*

$$\cos\theta = \frac{< \overline{PQ}, \overline{PR} >}{||\overline{PQ}||\ ||\overline{PR}||} \qquad (*)$$

Observe que, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$-1 \leq \frac{< \overline{PQ}, \overline{PR} >}{||\overline{PQ}||\ ||\overline{PR}||} \leq 1$$

Assim, o ângulo θ é univocamente determinado pela igualdade $(*)$ acima.
Se $Q = R$ e $Q \neq P$, então o ângulo $\angle QPR$ é definido como sendo 0.

TEOREMA 1.7. *Seja $\mathcal{U}$ um espaço euclideano. Considere P, Q e R pontos em $\mathcal{U}$, distintos dois a dois e seja $\theta = \angle QPR$. Então*

$$d(Q,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(R,P)^2 - 2d(P,Q)d(P,R)\cos\theta.$$

Prova: De fato, sejam $u = \overline{PQ}$, $v = \overline{PR}$ e $w = \overline{QR}$ então $w = v - u$. Calcule $< w, w >=< v-u, v-u >=< v, v > -2 < v, u > + < u, u >$. Portanto, $||w||^2 = ||v||^2 - 2||u||||v||\cos\theta + ||u||^2$, ou seja, $d(Q,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(R,P)^2 - 2d(P,Q)d(P,R)\cos\theta$. $\square$

O teorema acima mostra que vale a *lei dos cossenos* em um espaço euclideano.

DEFINIÇÃO 1.8. *Um sistema de coordenadas afins em um espaço euclideano $\mathcal{U}$, $\sum = (\mathcal{O}, e_1, ..., e_n)$, é chamado de sistema de coordenadas ortogonal ou sistema de coordenadas euclideano se $(e_1, ..., e_n)$ for uma base ortonormal do espaço vetorial associado* $\mathbf{V}$.

EXEMPLO 1.9. *No espaço euclideano $\mathbf{R}^2$, considerando-se em $\mathbf{R}^2$ o produto interno usual, os pontos $P_0 = (a, b)$, $P_1 = (a+\cos\theta,\ b+sen\theta)$ e $P_2 = (a - sen\theta,\ b + \cos\theta)$ determinam um sistema ortogonal de coordenadas.*
De fato, chamamos:

$$e_1 = \overline{P_0P_1} = (\cos\theta,\ sen\theta) \qquad e_2 = \overline{P_0P_2} = (-sen\theta,\ \cos\theta)$$

então $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbf{R}^2$ e $\sum = (P_0,\ e_1,\ e_2)$ é um sistema ortogonal de coordenadas em $\mathbf{R}^2$.

TEOREMA 1.10. *Um sistema de coordenadas afins* $\sum = (\mathcal{O},\ e_1, ..., e_n)$ *em um espaço euclideano* $\mathcal{U}$ *é um sistema de coordenadadas euclideano se e somente se a distância entre os pontos* $A = (a_1, ..., a_n)_{\sum}$ *e* $B = (b_1, ..., b_n)_{\sum}$ *puder ser expressa por:*

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}. \qquad (**)$$

Prova: Seja $\sum = (\mathcal{O},\ e_1, ..., e_n)$ um sistema de coordenadas euclideano em $\mathcal{U}$. Consideramos os pontos $A = (a_1, ..., a_n)_{\sum}$ e $B = (b_1, ..., b_n)_{\sum}$. Então $\overline{AB} = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)e_i$.Assim

$$d(A, B) = ||\overline{AB}|| = \sqrt{< \overline{AB}, \overline{AB} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2},$$

pois $(e_i, ..., e_n)$ é uma base ortonormal de V.
Reciprocamente, assumimos que $\sum = (\mathcal{O},\ e_1, ..., e_n)$ é um sistema de coordenadadas afins em $\mathcal{U}$ e que a distância entre os pontos $A = (a_1, ..., a_n)_{\sum}$ e $B = (b_1, ..., b_n)_{\sum}$ possa ser expressa por $(**)$.
Pelo axioma (i) da definição de espaço afim dados o ponto $\mathcal{O}$ e os vetores $e_j,\quad j = 1, \ldots, n$, existem pontos $P_1, \ldots, P_n$ em $\mathcal{U}$ tais que $e_j = \overline{\mathcal{O}P_j},\ \ j = 1, \ldots, n$.
Portanto $P_1 = (1, 0, ..., 0)_{\sum}, \ldots, P_n = (0, 0, ..., 1)_{\sum}$ e por hipótese temos que:

$$d(\mathcal{O}, P_j) = 1,\ \ j = 1, \ldots, n; \qquad d(P_i, P_j) = \sqrt{2}, \quad i \neq j,\ \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Da fórmula dada na Proposição anterior temos que $\cos\theta = 0$ para o ângulo $\theta = \angle P_i P_0 P_j,\ \ i \neq j$. Isso significa que $\{\overline{\mathcal{O}P_1}, \ldots, \overline{\mathcal{O}P_n}\}$ forma uma base ortonormal de V. Como $e_j = \overline{\mathcal{O}P_j},\ \ 1 \leq j \leq n$ temos que $\sum = (\mathcal{O}, e_1, ..., e_n)$ é um sistema de coordenadas euclideano. $\square$

2. Vetor Normal a uma Variedade Afim

Seja $\mathcal{U}$ um espaço euclideano associado a um espaço vetorial V. Se $\mathcal{P}$ é uma variedade afim com subespaço diretor $\mathcal{S}$, então, como toda variedade afim é um espaço afim, podemos olhar $\mathcal{P}$ como espaço euclideano com respeito ao produto interno em S, que é induzido pelo produto interno de V. Dessa forma diremos que $\mathcal{P}$ é uma *variedade afim euclideana* de $\mathcal{U}$.

DEFINIÇÃO 2.1. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço euclideano de dimensão* m. *Seja* $\mathcal{P}$ *uma variedade afim euclideana de* $\mathcal{U}$. *Um vetor, não nulo,* $\mathbf{n} \in V$ *é* *chamado de vetor normal a* $\mathcal{P}$ *se* $<\mathbf{n}, s>= 0$ *para todo vetor* s *em* $\mathcal{S}$*, onde* $\mathcal{S}$ *é o subespaço diretor de* $\mathcal{P}$*.*

Dessa definição concluímos que um vetor não nulo $\mathbf{n} \in V$ é normal a $\mathcal{P}$ se e somente se $\mathbf{n} \in \mathcal{S}^{\perp}$, onde $\mathcal{S}^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $\mathcal{S}$ em V.

TEOREMA 2.2. *Seja* $\mathcal{P}$ *uma variedade afim euclideana em um espaço euclideano de dimensão finita* $\mathcal{U}$*. Se* A *é um ponto de* $\mathcal{U}$ *que não pertence a* $\mathcal{P}$ *então existe um único ponto* $B \in \mathcal{P}$ *tal que o vetor* $\overline{AB}$ *é normal a* $\mathcal{P}$*.*
Além disso, $d(A, B) < d(A, X)$ *para todo* $X \neq B, \quad X \in \mathcal{P}$*.*

Prova: Sejam $\mathbf{V}$ o espaço vetorial associado ao espaço euclideano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ o subespaço diretor de $\mathcal{P}$.
Seja C um ponto de $\mathcal{P}$. Lembrando que $V = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$ escrevemos:

$$\overline{CA} = w + w'$$

com $w \in \mathcal{W}$ e $w' \in \mathcal{W}^{\perp}$.
Pelo axioma (i) da definição de espaço afim, dados $C \in \mathcal{P}$ e $w \in \mathcal{W}$ existe um único ponto B tal que $\overline{CB} = w$. Agora,

$$\overline{BA} = \overline{CA} - \overline{CB} = (w + w') - w = w'$$

Portanto $\overline{AB} \in \mathcal{W}^{\perp}$, isto é, $\overline{AB}$ é normal a $\mathcal{P}$.
Para provar a unicidade considere B' um ponto de $\mathcal{P}$ tal que $\overline{AB'}$ seja normal a $\mathcal{P}$.
Então $\overline{BB'} = \overline{AB'} - \overline{AB} \in \mathcal{W}^{\perp}$, mas $\overline{BB'}$ pertence a $\mathcal{W}$. Lembrando que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \{0\}$ temos $\overline{BB'} = 0$, e então $B = B'$.
Agora, se X é um ponto qualquer de $\mathcal{P}$ temos $\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{BX}$ com $< \overline{AB}, \overline{BX} >= 0$.
Assim, $||\overline{AX}||^2 = ||\overline{AB}||^2 + ||\overline{BX}||^2 > ||\overline{AB}||^2$ a menos que $B = P$. Então, $d(A, X) > d(A, B)$ para todo $X \neq B, \quad X \in \mathcal{P}$. $\square$

O número real, $d(A, B)$, obtido no teorema acima, é chamado de *distância do ponto* A *'a variedade afim* $\mathcal{P}$ que será denotada por $d(A, \mathcal{P})$.

EXEMPLO 2.3. *Considere* $\mathbf{R}^5$ *como espaço euclideano associado ao espaço vetorial* $\mathbf{R}^5$ *munido do produto interno usual. Seja* $\sum = (\mathcal{O}, e_1, \ldots, e_5)$ *o sistema de coordenadas euclideano em que* $\{e_1, \ldots, e_5\}$ *é a base canônica de* $\mathbf{R}^5$*.*
Considere a variedade euclideana:

$$\mathcal{P} = \{(1, 0, 0, 0, 0)_{\sum} + \alpha(e_1 + e_2) + \beta(e_5 - e_3) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$

O subespaço diretor de $\mathcal{P}$ é $\mathcal{S} = [(e_1 + e_2), (e_5 - e_3)]$. Observe que o ponto $A = (0, 0, 1, 1, 0)_\sum \notin \mathcal{P}$.
Vamos calcular a distância de A a $\mathcal{P}$, para isso precisamos encontrar o ponto $B = (1 + \alpha_o, \alpha_o, -\beta_o, 0, \beta_o)_\sum \in \mathcal{P}$ tal que $\overline{AB}$ seja normal a $\mathcal{P}$.
Como $\overline{AB} = (1 + \alpha_o)e_1 + \alpha_o e_2 + (1 - \beta_o)e_3 - e_4 + \beta_o e_5$ e $\mathcal{S}^\perp = [e_1 - e_2, e_4, e_3 + e_5]$ achamos $B = (1/2, -1/2, -1/2, 0, 1/2)_\sum$ e assim $d(A, \mathcal{P}) = ||\overline{AB}|| = \sqrt{2}$.

3. Vetor Normal a um Hiperplano

Nesta seção veremos que um hiperplano pode ser descrito usando-se apenas um ponto e um vetor normal.

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{U}$ um espaço euclideano de dimensão m. Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{U}$ com subespaço diretor $\mathcal{S}$. Seja $\mathbf{n}$ um vetor normal a $\mathcal{H}$ e fixe B um ponto em $\mathcal{H}$. Então um ponto $X \in \mathcal{H}$ se e somente se $< \overline{BX}, \mathbf{n} >= 0$.*

Prova: De fato, se $X \in \mathcal{H}$ então $\overline{BX} \in \mathcal{S}$ e como $\mathbf{n} \in \mathcal{S}^\perp$ tem-se que $< \overline{BX}, \mathbf{n} >= 0$.
Reciprocamente, se X é um ponto de $\mathcal{U}$ tal que $< \overline{BX}, \mathbf{n} >= 0$ então $\overline{BX} \in [\mathbf{n}]^\perp$, mas $\mathbf{n}$ sendo normal a $\mathcal{H}$ temos que $\mathbf{n} \in \mathcal{S}^\perp$, o que é equivalente à inclusão $\mathcal{S} \subset [\mathbf{n}]^\perp$. Como$\mathcal{H}$ é um hiperplano de $\mathcal{U}$, a dimensão de $\mathcal{S}$ é $m - 1$ que é a dimensão de $[\mathbf{n}]^\perp$. Donde concluímos que $\mathcal{S} = [\mathbf{n}]^\perp$ e então $X \in \mathcal{H}$. □

Veremos a seguir o que o Teorema acima nos diz quando temos fixado em $\mathcal{U}$ um sistema de coordenadas euclideanas.

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{U}$ um espaço euclideano de dimensão m. Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{U}$. Seja $\mathbf{n}$ um vetor normal a $\mathcal{H}$ e fixe B um ponto em $\mathcal{H}$. Fixe em $\mathcal{U}$ um sistema de coordenadas euclideanas, $\sum = (O, e_1, ..., e_m)$. Se $\mathbf{n} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$ e $B = (b_1, ..., b_m)_\sum$ então uma equação para o hiperplano $\mathcal{H}$ é:*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = d,$$

onde $d = \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i$.

Prova: Pelo Teorema 3.2 um ponto $X = (x_1, ..., x_m)_\sum$ de $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{H}$ se e somente se $< \overline{BX}, \mathbf{n} >= \sum_{i=1}^m (x_i - b_i)\alpha_i = 0$.
Assim se chamarmos $d = \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i$, concluímos então que um ponto $X = (x_1, \ldots, x_m)_\sum$ de $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{H}$ se e somente se

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = d. \qquad \square$$

Portanto uma equação para o hiperplano $\mathcal{H}$ é:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = d \qquad (**)$$

Exercício: Prove que o número real d, do teorema acima, é independente da escolha do ponto $B = (B_1, \ldots, b_m)_{\sum}$ em $\mathcal{H}$.

Observação. Consideramos a equação $(**)$ de um hiperplano, $\mathcal{H}$, dada no Teorema 3.2. Dado um ponto A em $\mathcal{U}, A \notin \mathcal{H}$. Pelo Teorema 2.2 existe um único ponto $B \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{AB}$ é normal a $\mathcal{H}$, mas como $\mathcal{H}$ é um hiperplano temos $\overline{AB} = k\mathbf{n}$, para algum $k \in \mathbf{R}$. Assim se $A = (a_1, ..., a_m)_{\sum}$ então $B = (a_1 + k\alpha_1, \ldots, a_m + k\alpha_m)_{\sum}$. Substituindo em $(**)$ temos:

$$\alpha_1(a_1 + k\alpha_1) + ... + \alpha_m(a_m + k\alpha_m) = d,$$

ou seja,

$$k = \frac{d - \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}.$$

Ainda pelo Teorema 2.2 temos $d(A, \mathcal{H}) = d(A, B)$ então

$$d(A, \mathcal{H}) = \overline{AB} = |k|||\mathbf{n}|| = \frac{|\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i - d|}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \frac{|\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i - d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}}.$$

Em particular, se o ponto $A = O$ for a origem do sistema de coordenadas euclideanas em $\mathcal{U}$ então

$$d(O, \mathcal{H}) = \frac{|d|}{||\mathbf{n}||}.$$

Exemplo 3.3. *Consideramos $\mathbf{R}^3$ como espaço euclideano com um sistema de coordenadas euclideanas fixado. Seja $\mathcal{H}$ o plano dado pela equação:*

$$x + 2y - 2z + 4 = 0$$

Um vetor normal a $\mathcal{H}$ é $\mathbf{n} = (1, 2, -2)$, que tem módulo $||\mathbf{n}|| = 3$. Portanto a distância da origem do sistema de coordenadas fixado ao hiperplano $\mathcal{H}$ é $d(O, \mathcal{H}) = 4/3$.

TEOREMA 3.4. *Seja $\mathcal{U}$ um espaço euclideano de dimensão m. Fixe em $\mathcal{U}$ um sistema de coordenadas euclideanas, $\sum = (O, e_1, ..., e_m)$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são números reais tais que $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2 \neq 0$ então a equação*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = d$$

representa um hiperplano em $\mathcal{U}$ que tem $\mathbf{n} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$ como um vetor normal.

Prova: Chamamos

$$\mathcal{H} = \{X = (x_1, ..., x_m)_\sum \in \mathcal{U} : \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = d\}.$$

Vamos provar que $\mathcal{H}$ é um hiperplano em $\mathcal{U}$ que tem o vetor $\mathbf{n} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$ como um vetor normal.
Como, por hipótese, $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2 \neq 0$, temos que o sistema linear $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = d$ é indeterminado, portanto podemos considerar $A = (a_1, ..., a_m)_\sum$ e $B = (b_1, ..., b_m)_\sum$ dois pontos distintos em $\mathcal{H}$. O vetor $\overline{AB} = (a_1 - b_1)e_1 + \cdots + (a_m - b_m)e_m$ pertence ao subespaço $[\mathbf{n}]^\perp$, pois $< \overline{AB}, \mathbf{n} >= \sum_{i=1}^m (a_i - b_i)\alpha_i = d - d = 0$. Assim o subespaço diretor de $\mathcal{H}$ está contido em $[\mathbf{n}]^\perp$. Por outro lado seja $v = \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_m e_m \in [\mathbf{n}]^\perp$. Consideremos o ponto $P \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{AP} = v$. Vamos provar que $P \in \mathcal{H}$, daí concluiremos que v está no subespaço diretor de $\mathcal{H}$ e teremos então que $\mathcal{H}$ é um hiperplano que tem $\mathbf{n} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$ como um vetor normal.
Pela sua definição $P = (a_1 + \gamma_1, \ldots, a_m + \gamma_m)_\sum$ e já que $< v, \mathbf{n} >= \alpha_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_m\gamma_m = 0$ temos que $\alpha_1(a_1 + \gamma_1) + \cdots + \alpha_m(a_m + \gamma_m) = d$, isto é $P \in \mathcal{H}$. $\square$

4. Semi-Espaço

Sejam $\mathcal{U}$ um espaço euclideano de dimensão m e $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{U}$. Fixando em $\mathcal{H}$ um ponto A e um vetor normal $\mathbf{n}$, temos determinados por $\mathcal{H}$ dois *semi-espaços* em $\mathcal{U}$ que são definidos por:

$$S_1 = \{Y \in \mathcal{U} \ :< \overline{AY}, \mathbf{n} > > 0\}$$

e

$$S_2 = \{Y \in \mathcal{U} \ :< \overline{AY}, \mathbf{n} > < 0\}$$

Consideramos agora $\sum = (O, e_1, ..., e_m)$ um sistema de coordenadas euclideanas em $\mathcal{U}$. Se $\mathcal{H}$ é um hiperplano de $\mathcal{U}$ vimos na seção anterior que uma equação para $\mathcal{H}$, em relação ao sistema $\sum$, é do tipo:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = d,$$

onde $\mathbf{n} = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m$ é um vetor normal a $\mathcal{H}$. Sejam $A = (a_1, ..., a_m)_{\sum}$ e $Y = (y_1, ..., y_m)_{\sum}$ então

$$
\begin{aligned}
< \overline{AY}, \mathbf{n} >= & \\
& (y_1 - a_1)\alpha_1 + ... + (y_m - a_m)\alpha_m = \\
& \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_m y_m - (\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m) = \\
& \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_m y_m + d
\end{aligned}
$$

pois $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m = d$.
Concluímos que os semi-espaços S_1 e S_2 caracterizam-se pelas inequações:

$$S_1 : \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m - d \ > 0$$

$$S_2 : \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m - d \ < 0$$

EXEMPLO 4.1. *No* $\mathbf{R}^3$ *com o produto interno usual os pontos* $A = (1, 2, 4)$ *e* $B = (2, -1, -3)$ *pertencem a semi-espaços opostos relativamente ao plano* $\pi : 2x - 3y - z = 0$ *enquanto que os pontos* $A = (1, 2, 4)$ *e* $C = (0, 0, 1)$ *pertencem ao mesmo semi-espaço.*

5. Variedades Afins Ortogonais

DEFINIÇÃO 5.1. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço euclideano associado a um espaço vetorial* V *de dimensão* m *e sejam* $\mathcal{P}^1$ *e* $\mathcal{P}^2$ *variedades afins de* $\mathcal{U}$ *com subespaços diretores* $\mathcal{S}^1$ *e* $\mathcal{S}^2$, *respectivamente.Dizemos que a variedade afim* $\mathcal{P}^1$ *é ortogonal à variedade afim* $\mathcal{P}^2$ *se* $\mathcal{S}^1 \supset (\mathcal{S}^2)^{\perp}$ *ou* $(\mathcal{S}^1)^{\perp} \supset \mathcal{S}^2$.

Observamos que se $\mathcal{P}^1$ é ortogonal a $\mathcal{P}^2$ então $\mathcal{P}^2$ é ortogonal a $\mathcal{P}^1$.
De fato, se $\mathcal{S}^1 \supset (\mathcal{S}^2)^{\perp}$ então $(\mathcal{S}^1)^{\perp} \subset ((\mathcal{S}^2)^{\perp})^{\perp} = \mathcal{S}^2$. Portanto, $\mathcal{P}^2$ é ortogonal a $\mathcal{P}^1$. De modo análogo provamos para o caso em que $S^{1\perp} \supset S^2$.

Diremos então que $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$ são *ortogonais* quando $\mathcal{S}_1 \supset (\mathcal{S}^2)^{\perp}$ ou $(\mathcal{S}^1)^{\perp} \supset \mathcal{S}^2$.

Duas variedades afins são *perpendiculares* se elas forem ortogonais e concorrentes.

Teorema 5.2. *Se $\mathcal{P}$ é uma variedade afim de dimensão p e A é um ponto de $\mathcal{U}$, então existe uma única variedade afim $\mathcal{P}'$ de dimensão $m-p$, que passa por A e é perpendicular a $\mathcal{P}$.*

Prova: Seja $\mathcal{S}$ o subespaço diretor de $\mathcal{P}$. Sabemos que subespaço $\mathcal{S}^\perp$ tem dimensão $m-p$. A variedade afim que passa por A e tem a direção de $\mathcal{S}^\perp$ satisfaz as condições do enunciado pois $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp = V$.
Agora, seja $\mathcal{P}'$ uma variedade afim de dimensão $m-p$ que contém o ponto A e seja perpendicular a $\mathcal{P}$. Se $\mathcal{S}'$ é o subespaço diretor de $\mathcal{P}'$, como $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são perpendiculares, devemos ter $\mathcal{S} \subset (\mathcal{S}')^\perp$ ou $\mathcal{S}^\perp \subset \mathcal{S}'$. Como sabemos que $\dim \mathcal{S}' = m-p$ e $\dim \mathcal{S}^\perp = m-p$, então $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^\perp$ e, assim, $\mathcal{P}'$ é a variedade afim construída acima. □

Observação. As variedades afins $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, que satisfazem as condições do enunciado acima, possuem um único ponto em comum.
De fato, como $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}' = V$ temos que $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \{0\}$, então, se a variedade afim $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ não for vazia ela terá dimensão 0, e portanto ela será um ponto. É claro que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ não são paralelas. Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ fossem reversas a dimensão da variedade afim gerada pela união de $\mathcal{P} \cap P$ seria $\dim \mathcal{P} \bigvee \mathcal{P}' = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P}' + 1 = p + (m-p) + 1 > m = \dim V$, o que é uma contradição. □

O ponto $B = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ chama-se *projeção ortogonal do ponto A em $\mathcal{P}$.*

O exemplo a seguir mostra que não há unicidade da variedade euclideana perpendicular a $\mathcal{P}$ se não impusermos que a sua dimensão seja $m-p$.

Exemplo 5.3. *Consideramos $\mathbf{R}^5$ como espaço euclideano associado ao espaço vetorial $\mathbf{R}^5$ munido do produto interno usual. Seja $\sum = (\mathcal{O}, e_1, \ldots, e_5)$ o sistema de coordenadas euclideanas em que $\{e_1, \ldots, e_5\}$ é a base canônica de $\mathbf{R}^5$.*
Consideremos a variedade euclideana:

$$\mathcal{P} = \{(1,0,0,0,0)_{\sum} + \alpha(e_1 + e_2) + \beta(e_5 - e_3) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$

O subespaço diretor de $\mathcal{P}$ é $\mathcal{S} = [(e_1+e_2), (e_5-e_3)]$. Observemos que o ponto $A = (0,0,1,1,0)_{\sum} \notin \mathcal{P}$.
O ponto $B = (1/2, -1/2, -1/2, 0, 1/2)_{\sum} \in \mathcal{P}$ é tal que $\overline{AB}$ é um vetor normal a $\mathcal{P}$.
Como $\mathcal{S}^\perp = [e_1 - e_2, e_4, e_3 + e_5]$ vemos que as variedades euclideanas $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$ que passam por B e têm a direção de $\mathcal{S}^1 = [\overline{AB}, e_4]$ e $\mathcal{S}^2 = [\overline{AB}, e_1 - e_2]$ respectivamente, são perpendiculares a $\mathcal{P}$ e têm dimensão 2.

A variedade euclideana que passa por A, é perpendicular a $\mathcal{P}$ e tem dimensão $5-2=3$ é:

$$\mathcal{P}' = \{(0,0,1,1,0)_{\sum} + \alpha(e_1 - e_2) + \beta e_4 + \gamma(e_3 + e_5) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

O ponto $B = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (1/2, -1/2, -1/2, 0, 1/2)_{\sum}$ é a projeção ortogonal do ponto A em $\mathcal{P}$.

Exercício: Usando a notação do Teorema acima prove que se $A \in \mathcal{P}$ então a reta determinada por A e B é perpendicular à variedade $\mathcal{P}$. Prove também que essa reta tem a direção de um vetor normal a $\mathcal{P}$.

Exercícios.

(1) No $\mathbf{R}^4$ com o produto interno usual:
(a) Calcule a distância entre os pontos $A = (1,0,-1,1)$ e $B = (-1,2,1,-1)$.
(b) Dê equação de uma reta que passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular à reta determinada por A e B.
(c) Determine um ponto $C \in \mathbf{R}^4$ tal que o triângulo ABC seja equilátero.

(2) Considere em $\mathbf{R}^2$ o produto interno dado por $< X, Y >= 2x_1y_1 + x_2y_2$ onde $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$.

(a) Mostre que os pontos $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1/\sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (0,1)$ determinam um sistema de coordenadas ortogonal em $\mathbf{R}^2$.

(b) Prove que um ponto $A = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ dista 1 de P_0 se e somente se $2a_1^2 + a_2^2 = 1$. (Essa é a equação da circunferência de centro P_0 e raio 1.)

OBS.: Nos exercícios de (3) a (9) use o produto interno usual em $\mathbf{R}^3$.

(3) No $\mathbf{R}^3$ considere os planos: $\pi_1 : x+y-z+3=0$ e $\pi_2 : 2x-y-1=0$.

(a) Calcule $d(A, \pi_1)$ e $d(A, \pi_2)$ onde $A = (-1,1,1)$.

(b) Ache a distância da origem $O = (0,0,0)$ à interseção $\pi_1 \cap \pi_2$.

(4) Ache o vértice B de um triângulo retângulo ABC sabendo que:

(a) $A = (1,1,1)$ e a cota de C é maior do que a de A;
(b) a hipotenusa AC é ortogonal ao plano $x+y-z-10=0$ e mede $\sqrt{3}$;
(c) o lado AB é ortogonal ao plano $2x-y-z=0$.

(5) Determine a projeção ortogonal

(a) do ponto $A = (4, 0, 1)$ sobre o plano $\pi : 3x - 4y + z = 0$,
(b) da reta $r : x + 1 = y + 2 = 3z - 3$ sobre o plano $\pi : x - y + 2z = 0$.

(6) Ache o simétrico de P em relação à reta r:

(a) $P = (0, 2, 1) \quad r : X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)$

(b) $P = (1, 1, -1) \quad r : \frac{x+2}{3} = y = z$

(7) Ache equações paramétricas da reta simétrica da reta r em relação ao plano π sendo r determinada por $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, -1, -1)$ e $\pi : x + y - z = 3$.

(8) Um cubo tem diagonal AB e uma de suas faces está contida no plano $\pi : x - y = 0$. Determine seus vértices dados $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, 3, \sqrt{2})$.

(9) Determine o ponto de $\pi : 2x - y + z - 2 = 0$ tal que a soma de suas distâncias a P e Q seja mínima nos seguintes casos:

(a) $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (1, -1, -1)$;

(b) $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (1, -1, 2)$;

(c) $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (0, 1, -1)$.

(10) No $\mathbf{R}^3$ com o produto interno usual considere os planos $\pi_1 : 2x - 3y + z = 0$ e $\pi_2 : x - 3y - z - 2 = 0$. Esses planos determinam quatro diedros. Chame de I o diedro que contém $B = (3, 2, -1)$, e de II o diedro que contém $A = (1, 0, 0)$. Quais pontos da reta $\sigma : X = (1, 2, -2) + \lambda(-1, 1, 1)$ pertencem a I e quais pertencem a II?

(11) Considere $\mathbf{R}^4$ como espaço euclideano munido do produto interno usual. Seja $\sum = (\mathcal{O}, e_1, e_2, e_3, e_4)$ um sistema de coordenadas ortogonal em $\mathbf{R}^4$ em que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de $\mathbf{R}^4$.
Seja $\mathcal{P}$ a variedade euclideana que passa pelo ponto $A = (1, 0, 0, -1)$ e tem a direção do subespaço $\mathcal{S} = [e_1 + e_2, e_1 - e_4]$.

(a) Determine a variedade euclideana $\mathcal{P}'$ que passa por A, é perpendicular a $\mathcal{P}$ e tem dimensão 2.

(b) Prove que $\mathcal{P} \bigvee \mathcal{P}' = \mathbf{R}^4$.

(c) É possível achar uma reta que seja paralela simultâneamente a $\mathcal{P}$ e a $\mathcal{P}'$? Justifique.

(12) Seja $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de V com $1 \leq \dim \mathcal{S} < m$. Fixe um ponto A em $\mathcal{U}$. Verifique que

$$\mathcal{R} = \{X \in \mathcal{U} : < \overline{AX}, s >= 0 \quad \forall s \in \mathcal{S}\}$$

é uma variedade afim euclideana cujo subespaço diretor é $\mathcal{S}^{\perp}$.

CAPíTULO 3

Transformações Afins

1. Transformações Afins

Sejam $\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{U}^2$ espaços afins associados aos espaços vetoriais V^1 e V^2 respectivamente. Seja $f : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{U}^2$ uma função. Para cada ponto $A \in \mathcal{U}^1$ definimos uma função $\phi_A : V^1 \to V^2$ da seguinte forma: para $v \in V_1$ seja B o único ponto de $\mathcal{U}^1$ tal que $v = \overline{AB}$,

$$\phi_A(v) = \phi_A(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}.$$

Teorema 1.1. *Se ϕ_A for uma transformação linear, então para todo ponto $A' \in \mathcal{U}^1$ a função $\phi_{A'}$ coincide com a função ϕ_A.*

Prova: Usando o axioma (i) da definição de espaço afim, dados $v \in V^1$ e $A' \in \mathcal{U}^1$ podemos achar $B' \in \mathcal{U}^1$ tal que $v = \overline{A'B'}$. Vamos provar que $\phi_A(v) = \phi_{A'}(v)$. Usando o axioma (ii) da definição de espaço afim escrevemos:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB'} - \overline{AA'}$$

e

$$\overline{f(A')f(B')} = \overline{f(A)f(B')} - \overline{f(A)f(A')}.$$

Como ϕ_A é uma transformação linear obtemos:

$$\begin{aligned}\phi_A(\overline{A'B'}) = & \\ & \phi_A(\overline{AB'}) - \phi_A(\overline{AA'}) = \\ & \overline{f(A)f(B')} - \overline{f(A)f(A')} = \\ & \overline{f(A')f(B')} = \\ & \phi_{A'}(\overline{A'B'}).\end{aligned}$$

Então $\phi_A(v) = \phi_{A'}(v)$, para todo v em V^1, e assim $\phi_A = \phi_{A'}$.$\square$

O teorema acima mostra que dada uma função $f : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{U}^2$ a condição de que a função ϕ_A seja uma transformação linear implica que ϕ_A está determinada independentemente da escolha do ponto A.

Definição 1.2. *Uma função* $f : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{U}^2$ *é chamada de transformação afim se* ϕ_A *for uma transformação linear para algum ponto* $A \in \mathcal{U}^1$*. Essa transformação linear será denotada por* ϕ *e chamada de transformação linear associada à transformação afim* f*.*

Exemplo 1.3. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço afim associado a um espaço vetorial* V*. Fixe um vetor* $v_0 \in V$*. A função* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *definida por:*

$$f(A) = A + v_0 \qquad \forall A \in \mathcal{U}$$

é uma transformação afim cuja transformação linear associada é a função identidade em V*.*
De fato, fixe um ponto $A_o \in \mathcal{U}$ *e vamos determinar a função* ϕ_{A_o}*.*
Seja $v \in V$*. Pelo axioma (i) da definição de espaço afim existe um único ponto* $B_o \in \mathcal{U}$ *tal que* $v = \overline{A_oB_o}$*.*
Como $\phi_{A_o}(v) = \phi_{A_o}(\overline{A_oB_o}) = \overline{f(A_o)f(B_o)}$*,* $f(A_o) = A_o + v_0$ *e* $f(B_o) = B_o + v_0$*, então* $\overline{A_of(A_o)} = v_0 = \overline{B_of(B_o)}$*.*
Pelo Teorema 1.9, que fala da lei do paralelogramo em $\mathcal{U}$*, temos que* $\overline{A_oB_o} = \overline{f(A_o)f(B_o)}$ *e isso nos diz que* $\phi_{A_o}(\overline{A_oB_o}) = \overline{A_oB_o}$ *ou seja* ϕ_{A_o} *é a função identidade.*

A transformação afim $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ definida por $f(A) = A + v_0$ é chamada de *translação pelo vetor* v_0.

Exemplo 1.4. *Seja* $\mathcal{U}$ *um espaço afim associado a um espaço vetorial* V*. Fixe um ponto* A_0 *em* $\mathcal{U}$ *e um número real* ρ*. A função* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *definida por:*

$$f(X) = A_0 + \rho(\overline{A_0X})$$

é uma transformação afim denominada de homotetia de centro A_0 *e razão* ρ*.*
A transformação linear associada é a homotetia $v \in V \to \rho v \in V$*.*
De fato, vamos provar que $\phi_{A_o} : V \to V$ *é essa homotetia.*
Seja $v \in V$ *e escreva* $v = \overline{A_oB_o}$*. Por definição temos:*

$$\phi_{A_o}(v) = \phi_{A_o}(\overline{A_oB_o}) = \overline{f(A_o)f(B_o)},$$

mas, $f(A_o) = A_o$ *e* $f(B_o) = A_o + \rho(\overline{A_oB_o})$*, então* $\overline{A_of(B_o)} = \rho(\overline{A_oB_o})$*.*
Portanto $\phi_{A_o}(v) = \phi_{A_o}(\overline{A_oB_o}) = \overline{A_of(B_o)} = \rho(\overline{A_oB_o}) = \rho v$*.*

Exemplo 1.5. *Mais geralmente, dados dois pontos A e B de um espaço afim $\mathcal{U}$ associado a um espaço vetorial V e uma transformação linear $T : V \to V$ a função $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ definida por*

$$f(X) = B + T(\overline{AX})$$

é uma transformação afim cuja transformação linear associada é T e satisfaz $f(A) = B$.

O Teorema que segue dá uma caracterização geométrica das transformações afins.

Teorema 1.6. *Uma função $f : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{U}^2$ é uma transformação afim se e somente se a imagem por f de uma reta qualquer em $\mathcal{U}^1$, $r : X = A + \lambda\overline{AB}$, for um ponto, no caso em que $f(A) = f(B)$, ou for uma reta que passa por $f(A)$ e tem a direção de $\overline{f(A)f(B)}$.*

Prova: Suponhamos que $f : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{U}^2$ seja uma transformação afim. Então a função $\phi : V^1 \to V^2$ definida por

$$\phi(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}, \qquad \forall P, Q \in \mathcal{U}^1$$

é uma transformação linear.
Consideramos a reta, $r : \ X = A + \lambda\overline{AB}$, em $\mathcal{U}^1$. Como ϕ é linear temos

$$\phi(\overline{AX}) = \phi(\lambda\overline{AB}) = \lambda\phi(\overline{AB}) = \lambda\overline{f(A)f(B)}.$$

Sabemos que $\phi(\overline{AX}) = \overline{f(A)f(X)}$, por definição, então $\overline{f(A)f(X)} = \lambda\overline{f(A)f(B)}$ o que implica $f(X) = f(A) + \lambda\overline{f(A)f(B)}$. Assim se $f(A) = f(B)$ temos que $f(X) = f(A)$ para todo X em $\mathcal{U}^1$ e neste caso a imagem de f é o ponto $f(A)$. Caso contrário temos que $f(X) = f(A) + \lambda\overline{f(A)f(B)}$, ou seja, a imagem de f é uma reta que passa por $f(A)$ e tem a direção de $\overline{f(A)f(B)}$.
Reciprocamente suponhamos que a imagem por f de uma reta qualquer em $\mathcal{U}^1$, $\quad r : X = A + \lambda\overline{AB}$, seja o ponto $f(A)$ ou seja uma reta que passa por $f(A)$ e tem a direção de $\overline{f(A)f(B)}$. Em qualquer um desses casos podemos supor que $f(X) = f(A) + \lambda\overline{f(A)f(B)}$.
Fixamos um ponto $A_o \in \mathcal{U}^1$ e consideramos a função $\phi_{A_o} : V^1 \to V^2$ definida por $\phi_{A_o}(\overline{A_oQ}) = \overline{f(A_o)f(Q)}$. Vamos mostrar que ϕ_{A_o} é uma transformação linear.
Vamos provar inicialmente que $\phi_{A_o}(\lambda u) = \lambda\phi_{A_o}(u)$, para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ e para todo $u \in V^1$.

Sejam $\lambda \in \mathbf{R}$ e $u \in V^1$. Usando o axioma (i) da definição de espaço afim escrevemos $u = \overline{A_oB_o}$, e $\lambda u = \overline{A_oX}$. Então

$$\begin{aligned}\phi_{A_o}(\lambda u) = \phi_{A_o}(\lambda\overline{A_oB_o}) = \\ &\phi_{A_o}(\overline{A_oX}) = \\ &\overline{f(A_o)f(X)} = \\ &\lambda\overline{f(A_o)f(B_o)} = \\ &\lambda\phi_{A_o}(\overline{A_oB_o}) = \\ &\lambda\phi_{A_o}(u),\end{aligned}$$

pois a imagem por f da reta $X = A_o + \alpha\overline{A_oB_o}$ é $f(X) = f(A_o) + \alpha\overline{f(A_o)f(B_o)}$.
Agora sejam $u, v \in V^1$. Vamos provar que $\phi_{A_o}(u+v) = \phi_{A_o}(u)+\phi_{A_o}(v)$. Usando o axioma (i) da definição de espaço afim escrevemos $u = \overline{A_oB_o}$ e $v = \overline{A_oC_o}$. Se $u = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbf{R}$ temos que $v+u = (1+\alpha)v \in V^1$ então pelo caso anterior, concluímos a tese. Caso contrário, ou seja, quando A_o, B_o e C_o não pertencem à mesma reta, consideramos o ponto $D = B_o+(1/2)\overline{B_oC_o}$ que pertence à reta determinada por B_o e C_o. Por hipótese temos que $f(D) = f(B_o) + (1/2)\overline{f(B_o)f(C_o)}$.
Como na demonstração do Teorema 2.14 construímos o ponto $E = A_o + 2\overline{A_oD}$ então temos que $\overline{A_oE} = u + v$. Assim

$$\phi_{A_o}(u + v) = \phi_{A_o}(\overline{A_oE}) = 2\phi_{A_o}(\overline{A_oD}) = 2\overline{f(A_o)f(D)}.$$

Mas

$$\overline{f(A_o)f(D)} = \overline{f(A_o)f(B_o)} + \overline{f(B_o)f(D)} = \phi_{A_o}(u) + (1/2)\overline{f(B_o)f(C)}$$

e

$$\overline{f(A_o)f(D)} = \overline{f(A_o)f(C_o)} + \overline{f(C_o)f(D)} = \phi_{A_o}(v) - (1/2)\overline{f(B_o)f(C_o)}.$$

Portanto

$$\phi_{A_o}(u) + \phi_{A_o}(v) = 2\overline{f(A_o)f(D)} = \phi_{A_o}(\overline{A_oE}) = \phi_{A_o}(u + v). \quad \square$$

2. Matriz de uma Tranformação Afim

Seja $\mathcal{U}$ um espaço afim associado a um espaço vetorial $\mathbf{V}$ de dimensão n.
Sejam $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ uma trasformação afim e $\phi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a trasformação linear associada.
Vamos agora expressar a transformação afim f em termos de um sistema de coordenadas afins de $\mathcal{U}$ fixado, $\sum = (O, e_1, ..., e_n)$.

Sejam $(b_1, ..., b_n)_{\sum}$,$(x_1, ..., x_n)_{\sum}$ e $(y_1, ..., y_n)_{\sum}$ as coordenadas afins de $f(O)$, de $X \in \mathcal{U}$ e de $f(X) \in \mathcal{U}$ respectivamente.

Sendo $M = (a_{ij}),\ 1 \leq i, j \leq n$ a matriz da transformação linear ϕ, em relação à base $\{e_1, ..., e_n\}$ e lembrando que $\overline{f(O)f(X)} = \phi(\overline{OX})$, ou que $f(X) = f(O) + \phi(\overline{OX})$ temos:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \qquad i = 1, ..., n \qquad (*)$$

ou equivalentemente

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Chamamos $\beta = (b_i)$ a matriz $n \times 1$. Podemos assim expressar as equações $(*)$ matricialmente na forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

A matriz $\begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa a transformação afim f relativamente ao sistema de coordenadas afins $\sum$.

Exemplo 2.1. *Consideramos* $\mathbf{R}^3$ *como espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathbf{R}^3$. *Fixamos em* $\mathbf{R}^3$ *um sistema de coordenadas afins,* $\sum = (O, e_1, e_2, e_3)$.
Denotamos por $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *a translação pelo vetor* v_0, *isto é,*

$$f(A) = A + v_0, \ \ \forall A \in \mathbf{R}^3.$$

Vimos que a transformação linear associada a f *é a função identidade. Se* $f(O) = O + v_0 = (a, b, c)_{\sum}$, $X = (x_1, x_2, x_3)_{\sum}$ *e* $f(X) = (y_1, y_2, y_3)_{\sum}$ *então a representação matricial da translação pelo vetor* v_0 *é:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2. *Seja* $\mathbf{R}^2$ *espaço afim associado ao espaço vetorial* $\mathbf{R}^2$. *Consideramos o sistema de coordenadas afins* $\sum = (O, e_1, e_2)$ *em* $\mathbf{R}^2$. *Fixamos o ponto* $A_o = (a, b)_{\sum}$ *em* $\mathbf{R}^2$ *e o número real* ρ. *Denotamos por* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *a homotetia de centro* A_o *e razão* ρ, *isto é,*

$$f(X) = A_o + \rho\overline{A_oX}.$$

Vimos que a tranformação linear associada a f *é a homotetia:*

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ \phi(v) = \rho v.$$

Nessas condições

$$f(O) = A_o + \rho\overline{A_oO} = ((1-\rho)a, (1-\rho)b)_{\sum}$$

pois $\overline{Of(O)} = \overline{A_of(O)} - \overline{A_oO}$.
Se $X = (x_1, x_2)_{\sum}$ *e* $f(X) = (y_1, y_2)_{\sum}$ *a representação matricial da homotetia de centro* A_o *e razão* ρ *é:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & (1-\rho)a \\ 0 & \rho & (1-\rho)b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos agora dados um sistema de equações lineares com coeficientes em $\mathbf{R}$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \qquad i = 1, ..., n$$

um espaço afim $\mathcal{U}$ e um sistema de coordenadas afins $\sum = (O, e_1, ..., e_n)$ em $\mathcal{U}$.
Deixamos para o leitor verificar que a função que ao ponto de coordenadas afins $(x_1, ..., x_n)_{\sum}$ faz corresponder o ponto de coordenadas afins $(y_1, ..., y_n)_{\sum}$ é uma transformação afim de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{U}$ cuja transformação linear associada é representada pela matriz $M = (a_{ij})$ em relação à base $(e_1, ..., e_n)$.

Com a mesma notação anterior chamamos $\beta = (b_i)$ a matriz $n \times 1$. Essa tranformação afim pode ser representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em relação ao sistema de coodenadas afins $\sum$.

Definição 2.3. *Uma transformação afim* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *é chamada de transformação afim central se* f *fixa algum ponto de* $\mathcal{U}$.

TEOREMA 2.4. *Seja A_o um ponto em um espaço afim $\mathcal{U}$. Então, toda transformação afim $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ pode ser expressa de forma única como um produto $f = hg$, em que g é uma transformação afim central que fixa o ponto A_o e h é uma translação.*

Prova: Consideramos h a translação dada pelo vetor $\overline{A_o f(A_o)}$; então a transformação $g = h^{-1}f$ fixa o ponto A_o e, por construção,$f = hg$. Essa representação de f é única pois $f(A_o) = hg(A_o) = h(A_o)$, assim a transformação h deve ser a translação pelo vetor $\overline{A_o f(A_o)}$. $\square$

Observação: O teorema acima interpretado em termos de matrizes diz que toda matriz $M \in M_n(\mathbf{R})$ pode ser expressa de forma única por um produto de matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} M & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios.

(1) Sejam $\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{U}^2$ espaços afins.

(a) Prove que se uma função $f : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{U}^2$ é uma transformação afim então f leva reta paralelas em retas paralelas.

(b) Prove que se $f : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{U}^2$ é uma transformação afim então a imagem por f de uma variedade afim $\mathcal{P}^1$ de $\mathcal{U}^1$, $f(\mathcal{P}^1)$, é uma variedade afim em $\mathcal{U}^2$.

(2) Considere $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a transformação afim cuja representação matricial é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ache a imagem por f de cada uma das retas abaixo e descreva geometricamente a variedade afim encontrada.

(a) $x_1 = x_2$

(b) $2x_1 - x_2 = 3$

(3) Seja $\mathcal{U}$ um espaço euclideano de dimensão n e seja $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ uma transformação afim. Prove que a imagem por f de um semi-espaço é um semi-espaço.

(4) Ache uma transformação afim $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, 2$ sendo

$P_0 = (0, 0),\ P_1 = (1, 0),\ P_2 = (0, 1)$,

$Q_0 = (1, 2),\ Q_1 = (1, -1)$ e $Q_2 = (0, 1)$.

Dê a forma matricial de f.

(5) Ache uma transformação afim $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, 2, 3$ sendo

$P_0 = (1, 0, 1), \quad P_1 = (0, 1, 1), \quad P_2(1, 0, 0), \quad P_3 = (-1, 1, 2),$

$Q_0 = (1, 2, 1), \quad Q_1 = (-1, 2, 0), \quad Q_2(0, 3, 4)$ e $\quad Q_3 = (1, -2, 5).$

Dê a forma matricial de f.

Referências Bibliográficas

[1] N.V. Efimov and E.R. Rozendorn. "*Linear Algebra and Multi-Dimensional Geometry*" - English Translation, Mir Publishers - Moscow - 1975.

[2] E.L.Lima. "*Álgebra Linear*" - $2^{a\cdot}$ edição - Coleção Matemática Universitária - IMPA - Rio de Janeiro - 1996.

[3] K. Nomizu. "*Fundamentals of Linear Algebra*" - 2^{nd} edition - Chelsea Publishing Co. - New York - 1976.

[4] A.A.M. Rodrigues. "*Álgebra Linear e Geometria Euclidiana*" - $3^{a\cdot}$ edição - Livraria Nobel - São Paulo - 1970.