Relatório

Marcos Alexandre Laudelino Orseli

29 de novembro de 2016

Sumário

1 Variedades Projetivas e Fibrados Vetoriais

1.1 Espaço Projetivo

O espaço afim $\mathbb{A}^n$ possui uma compactificação natural $\mathbb{P}^n$ obtida adicionando um ponto no infinito em cada direção. Esta compactificação será chamada espaço projetivo e nesta seção vamos mostrar como defini-la e algumas propriedades.

Definição 1.1. O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ é o conjunto dos subespaços de dimensão 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$.

O espaço projetivo pode ser interpretado como o quociente

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

onde $\sim$ denota a relação de equivalência de dois pontos que estão sobre a mesma reta através da origem ou seja, $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \neq 0$ e $(x_0, \ldots, x_n) = (\lambda y_0, \ldots, \lambda y_n)$. Um ponto no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ pode ser visto como uma classe de equivalência

$$[(x_0 \ldots, x_n)] = \{(\lambda x_o, \ldots, \lambda x_n); \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0\}.$$

Denotamos um ponto em $\mathbb{P}^n$ por um representante de sua classe de equivalência e para distinguir a classe de equivalência de um representante usamos a seguinte notação $[x_0 : \ldots : x_n]$ para a classe de equivalência e dizemos que $[x_0 : \ldots : x_n]$ são coordenadas homogêneas.

Seja $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n; x_i \neq 0\}$. Com a função

$$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_n}{x_i})$$

identificamos cada U_i com um $\mathbb{C}^n$ e assim obtemos uma cobertura do espaço projetivo com espaços afins. Pensando no U_i como a parte finita de $\mathbb{P}^n$ e em $\mathbb{P}^n \setminus U_i$ como os pontos no infinito podemos ver de varias maneiras o espaço projetivo escolhendo diferentes U_i como a parte finita.

1.2 Variedades Projetivas

Vamos definir nesta seção o que serão variedades projetivas. Dizemos que um polinômio $F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ é homogêneo de grau d se $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0 \ldots, x_n)$. Observe que se um ponto $(x_0 \ldots, x_n)$ é tal que $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ então $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo o conjunto de zeros de um polinômio homogêneo está bem definido em $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.2. Uma variedade projetiva V em $\mathbb{P}^n$ é o conjunto de zeros de uma coleção de polinômios homogêneos em $n+1$ variáveis ou seja, $V = \mathbb{V}(\{F_i\}_{i \in I}) \subset \mathbb{P}^n$.

Exemplo: A variedade projetiva $V = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{P}^2$ é chamada de cônica. Esta cônica pode ser escrita como $V = (V \cap U_x) \cup (V \cap U_y) \cup (V \cap U_z)$. Em U_z esta cônica pode ser escrita como $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ou seja, é um circulo. Por outro lado em U_x e em U_y a cônica será dada pelas equações $1 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + 1 - z^2 = 0$ ou seja, hipérboles.
Temos em geral assim como no exemplo que toda variedade projetiva pode ser escrita como união de variedades afins usando a mesma decomposição.

1.3 Fibrados Vetoriais Algébricos

Nesta seção variedade significa variedade algébrica abstrata, a definição e algumas propriedades podem ser consultadas em [7] e [9].

Definição 1.3. Um fibrado vetorial de dimensão n sobre uma variedade X é uma variedade E e um morfismo $p\colon E \to X$ chamado projeção tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- Existe uma cobertura aberta $\bigcup_i U_i$ de X tal que existem isomorfismos
$$\varphi_i\colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n$$
de forma que o seguinte diagrama comuta:
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "p"'] & U_i \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\pi"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$
onde π é a projeção no primeiro fator

- Os isomorfismos φ_i são compatíveis no seguinte sentido: Em $U_i \cap U_j$ a composição
$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\colon U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^n \to U_i \times U_j \times \mathbb{C}^n$$
é da forma $(x, v) \mapsto (x, A(x)v)$, onde $A\colon U_i \cap U_j \to GL_n(\mathbb{C})$ é um morfismo de variedades.

Fixando um $x \in X$ observamos que esses isomorfismos φ_i induzem um isomorfismo de variedades entre $p^{-1}(x)$ e $\mathbb{C}^n$. Com isso obtemos uma estrutura de espaço vetorial em cada fibra e usando a segunda propriedade na definição de fibrados vetoriais obtemos que esta estrutura não depende do U_i escolhido que contém x.

Observe que o morfismo $X \xrightarrow{s} E$ definido por $x \mapsto \varphi_i^{-1}(x, 0)$ está bem definido, este morfismo é chamado de seção zero do fibrado vetorial. Todo fibrado vetorial possui uma seção zero.

Definição 1.4. Seja $E \xrightarrow{p} X$ um fibrado vetorial e seja $U \subseteq X$ um aberto. Uma seção de E sobre U é um morfismo $U \xrightarrow{s} E$ tal que $p \circ s$ é a identidade em U.

Sabemos que todo fibrado vetorial admite ao menos uma seção, a seção zero.
Exemplos:

Fibrado Trivial: O fibrado trivial sobre X é
$$X \times \mathbb{C} \xrightarrow{p} X$$
onde p é a projeção na primeira coordenada.
Observe que uma seção deste fibrado é dada por $x \overset{s}{\mapsto} (x, f(x))$, onde f é uma função regular em X. Portanto uma seção do fibrado trivial é o mesmo que uma função regular $X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$.

Fibrado Vetorial Tautológico: Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Seja $B = \{(x, l) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n; x \in l\}$ com a projeção $B \xrightarrow{p} X$. $B \xrightarrow{p} X$ é um fibrado vetorial de dimensão 1 sobre X.

2 Teorema de Grothendieck

2.1 Fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^1(k)$

Fibrados vetoriais sobre $\mathbb{A}^1(k)$

Nesta seção vamos mostrar que todo fibrado vetorial $p\colon E \to \mathbb{A}^1(k)$ é trivial. Para isso mostraremos que as seções globais $\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ são finitamente geradas como módulo sobre $k[t]$ e usando o teorema de classificação de módulos sobre domínios de ideais principais concluiremos que $\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ é livre sobre $k[t]$.

Proposição 2.1. *E é um fibrado vetorial trivial se, e somente se, $\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ é um $k[t]$-módulo livre.*

Demonstração. Observe que se E é trivial então é claro que $\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ é livre. Se $\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ é livre então uma base deste módulo será um conjunto de seções l.i. que formam uma base em cada fibra e portanto E é trivial.

□

Proposição 2.2. *$\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ é finitamente gerado como um $k[t]$-módulo.*

Demonstração. Temos um conjunto finito de polinômios $\{f_i\}$ tais que E é trivial sobre U_{f_i} e $\mathbb{A}^1(k) = \bigcup U_{f_i}$.
Para cada U_{f_i} existe um conjunto finito de seções $\{s_i\} \subset \Gamma(U_{f_i}, E)$ que geram $\Gamma(U_{f_i}, E)$ como $\mathcal{O}(U_{f_i})$-módulo.
Dada uma seção $s \in \Gamma(U_{f_i}, E)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^N s \in \Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$. Portanto temos um conjunto finito de seções $\{s_i\} \subset \Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ tal que $\{s_i|_{U_{f_j}}\}$ geram $\Gamma(U_{f_i}, E)$ como $\mathcal{O}(U_{f_i})$-módulo.
Dado $s \in \Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ temos que

$$s|_{U_{f_i}} = \sum_j r_j^i s_j|_{U_{f_i}}, r_j^i \in \mathcal{O}(U_{f_i}).$$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g_j^i = f_i^N r_j^i \in k[x]$ para todo i,j. Temos

$$g_j^i(x) = \begin{cases} f_i^N r_j^i(x), \text{ se } x \in U_{f_i} \\ 0, \text{ se } x \in V(f_i) \end{cases}.$$

Temos

$$f_i^N s = \sum_j g_j^i s_j$$

e como $\mathbb{A}^1(k) = \bigcup U_{f_i^N}$ existem $Q_i \in k[x]$ tais que $\sum Q_i f_i^N = 1$. Logo

$$s = \sum_i \sum_j Q_i g_j^i s_j.$$

Portanto $\{s_i\}$ geram $\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ como um $k[t]$-módulo. □

Proposição 2.3. *$\Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$ é um $k[t]$-módulo livre.*

Demonstração. Seja $M = \Gamma(\mathbb{A}^1(k), E)$. Pelo teorema 1.3, temos que M é finitamente gerado sobre $k[t]$ e como $k[t]$ é um domínio de ideais principais pelo teorema de classificação de módulos sobre um domínio de ideais principais temos que $M = M_F \oplus T$, onde M_F é um módulo livre e T é o submódulo de torção de M.
Basta mostrarmos agora que M não tem elemento de torção ou seja, $T = 0$.
Seja $f \in k[t]$ e $s \neq 0 \in M$, vamos mostrar que $fs = 0 \Rightarrow f = 0$.
Se $s \neq 0$ existe $x \in \mathbb{A}^1(k)$ tal que $s(x) \neq 0$. Existe uma vizinhança aberta U de x em $\mathbb{A}^1(k)$ tal que $p^{-1}(U) \cong U \times k^n$. Portanto s é da forma $s(y) = (s_1(y), \ldots, s_n(y))$ para y em U.
Como $s(x) \neq 0$ algum s_i é tal que $s_i(x) \neq 0$, logo existe uma vizinhança aberta W de x tal que $s_i(y) \neq 0$ para $y \in W \cap U$.
Como $x \in W \cap U$ temos que $W \cap U \neq \emptyset$ e como $W \cap U$ é aberto temos que $W \cap U$ é infinito.
Se $fs = 0$ temos que $fs_i(y) = 0$ para todo $y \in W \cap U$ e portanto $f(y) = 0$ para todo $y \in W \cap U$. Como $W \cap U$ é infinito concluimos que f tem infinitas raízes e portanto $f = 0$.
Assim, $M = M_F$ e portanto M é livre. □

Observação: Na verdade vale o teorema mais geral que todo fibrado vetorial $E \xrightarrow{p} \mathbb{A}^n$ é trivial. Este teorema é conhecido como teorema de Quillen-Suslin e foi um problema posto por Serre em [8] e resolvido por Daniel Quillen e Andrei Suslin independentemente em 1976. Mais sobre este tópico pode ser consultado em [5].

Fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^1(k)$

Dado um fibrado vetorial de dimensão m, $E \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ temos que $E|_{U_i}$, $i = 0, 1$, é trivial, onde U_i são os abertos afins de E. Logo E é isomorfo à variedade obtida colando $U_0 \times \mathbb{A}^m$ e $U_1 \times \mathbb{A}^m$ identificando $U_0 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^m$ e $U_1 \setminus 0 \times \mathbb{A}^m$ através de uma bijeção $\varphi\colon U_0 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^m \to U_1 \setminus 0 \times \mathbb{A}^m$ da forma $(s, v) \mapsto (s^{-1}, A(s, s^{-1})v)$, onde $A(s, s^{-1})$ é uma matriz inversível para todo $s \neq 0$.

Proposição 2.4. Os elementos inversíveis de $k[s, s^{-1}]$ são os da forma as^n, com $a \in k$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Temos que $(as^n)(a^{-1}s^{-n}) = 1$ logo todos elementos desta forma são inversíveis. Defina as funções $gr^+(p) =$ a maior potência de s em p e $gr^-(p) =$ a menor potência de s em p.
Observe que temos $gr^+(p) = gr^-(p) \Leftrightarrow p$ é da forma as^n e como k é um corpo temos que $gr^+(p) \geq gr^-(p)$, $gr^+(pq) = gr^+(p) + gr^+(q)$ e $gr^-(pq) = gr^-(p) + gr^-(q)$ se $p, q \in k[s, s^{-1}]$.
Logo se $pq = 1$ temos $0 = gr^+(p) + gr^+(q)$ e $0 = gr^-(p) + gr^-(q) \Rightarrow$

$$gr^+(p) \geq gr^-(p) = \; = -gr^-(q) \geq -gr^+(q) = gr^+(p)$$

$\Rightarrow gr^+(p) = gr^-(p)$ e $gr^+(q) = gr^-(q) \Rightarrow p$ e q são da forma as^n. □

Temos que E está definido exceto por um isomorfismo pela matriz A e se trocarmos os isomorfismos de trivialização obtemos uma matriz A' tal que

$$A'(s, s^{-1}) = V(s^{-1})A(s, s^{-1})U(s).$$

Pela proposição 2.4 temos que $det\ A(s, s^{-1}) = as^n$ para algum $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Segue que:

Proposição 2.5. Classes de isomorfismo de fibrados vetoriais de dimensão m sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspondem bijetivamente a classes de equivalência de matrizes $m \times m$ sobre $\mathbb{C}[s, s^{-1}]$ tais que $det\ A(s, s^{-1}) = s^n$, $n \in \mathbb{Z}$, onde a relação de equivalência é a seguinte: $A(s, s^{-1}) \sim A'(s, s^{-1})$ se existirem matrizes inversíveis $U(s)$ sobre $\mathbb{C}[s]$ e $V(s^{-1})$ sobre $\mathbb{C}[s^{-1}]$ tais que $A'(s, s^{-1}) = V(s^{-1})A(s, s^{-1})U(s)$.

2.2 Forma Canônica para matrizes sobre $k[s, s^{-1}]$

Proposição 2.6. Se A é uma matriz $m \times m$ sobre $k[s, s^{-1}]$ com determinante igual a s^n para algum $n \in \mathbb{Z}$, então existem matrizes inversíveis $U(s)$ e $V(s^{-1})$ tais que

$$V(s^{-1})A(s, s^{-1})U(s) = \begin{pmatrix} s^{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s^{r_m} \end{pmatrix}$$

com $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m$, $r_i \in \mathbb{Z}$ e os r_i são unicamente determinados por $A(s, s^{-1})$.

Demonstração. Seja

$$D(r_1, \ldots, r_n) = \begin{pmatrix} s^{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s^{r_m} \end{pmatrix}.$$

Suponha que existam duas matrizes $D(r_1, \ldots, r_n)$ e $D(r'_1, \ldots, r'_n)$ equivalentes a $A(s, s^{-1})$. Logo existem matrizes inversíveis $U(s)$ e $V(s^{-1})$ tais que

$$V(s^{-1})D(r_1, \ldots, r_m) = D(r'_1, \ldots, r'_m)U(s).$$

Se A é uma matriz, seja $A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ o determinante obtido eliminando as linhas com índice em $\{1, \ldots, m\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}$ e as colunas com índice em $\{1, \ldots, m\} \backslash \{j_1, \ldots, j_k\}$. Então temos $(AB)^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} = \sum_{r_1 < \cdots < r_k} A^{i_1,\ldots,i_k}_{r_1,\ldots,r_k} B^{r_1,\ldots,r_k}_{j_1,\ldots,j_k}$.

Usando essa igualdade em $V(s^{-1})D(r_1, \ldots, r_n) = D(r'_1, \ldots, r'_n)U(s)$ temos que

$$V^{1,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k}(s^{-1})s^{r_{i_1}+\cdots+r_{i_k}} = s^{r'_1+\cdots+r'_k}U^{1,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k}(s)$$

para todo $i_1 < \cdots < i_k$. Para algum $i_1 < \cdots < i_k$ temos $U^{1,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k}(s) \neq 0$.

Logo $r'_1 + \cdots + r'_k \leq r_{i_1} + \cdots + r_{i_k}$ para algum $i_1 < \cdots < i_k$, e portanto $r'_1 + \cdots + r'_k \leq r_1 + \cdots + r_k$ para todo k. Multiplicando por $V(s^{-1})^{-1}$ pela esquerda e por $U(s)^{-1}$ pela direita em $V(s^{-1})D(r_1, \ldots, r_n) = D(r'_1, \ldots, r'_n)U(s)$ e repetindo o argumento nos dá $r_1 + \cdots + r_k \leq r'_1 + \cdots + r'_k$ para todo k e portanto $r_i = r'_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Agora resta provar a existência. Primeiramente multiplique $A(s, s^{-1})$ por uma potência s^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de forma que $s^n A(s, s^{-1})$ seja uma matriz polinomial

$B(s)$. Multiplicando pela direita por uma matriz $U(s)$ adequada podemos obter uma matriz $B'(s)$ com $b'_{11} \neq 0$ e $b'_{1i} = 0$, $i = 2, \ldots, m$. Temos que $b_{11} = s^{k_1}$ para algum $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pois *det* $B(s)$ é uma potência de s. Vamos terminar a demonstração por indução no tamanho m da matriz. Para $m = 1$ o resultado é trivial. Seja B_2 a matriz $(m-1) \times (m-1)$ obtida eliminando a primeira linha e a primeira coluna de B. Pela hipótese de indução existem matrizes $V_2(s^{-1})$ e $U_2(s)$ tais que $V_2(s^{-1})B_2U_2(s) = D(k_2, \ldots, k_m)$, com $k_2 \geq \cdots k_m$.

Portanto

$$C(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & s^{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ c_m & \cdots & 0 & s^{k_m} \end{pmatrix}$$

com $c_i \in k[s, s^{-1}]$, $i = 2, \ldots, m$. Subtraindo $k[s^{-1}]$-múltiplos da primeira linha das linhas $2, \ldots, m$, o que corresponde a multiplicar pela esquerda por uma matriz $V(s^{-1})$, podemos assumir que $c_i \in k[s]$.

Agora considere todas as matrizes no mesmo formato de $C(s)$ que são equivalentes a $B(s)$. Podemos escolher uma matriz entre essas de forma que k_1 seja maximal pois $k_1 < grau(det\ B(s))$ devido ao fato de $k_2, k_3, \ldots, k_m \geq 0$. Vamos mostrar que neste caso $k_1 \geq k_i$, $i = 2, \ldots, m$. Suponha que $k_1 < k_i$ para algum i. Subtraindo um $k[s^{-1}]$-múltiplo adequado da primeira linha da i-ésima linha obtemos uma matriz do mesmo formato com $c_i = s^{k_1+1}c'(s)$. Agora troque a primeira linha com a i-ésima linha para obter uma matriz polinomial $B'(s)$ tal que o *mdc* dos elementos da primeira linha é $s^{k'_1}$ com $k'_1 \geq k_1 + 1$. Agora aplicando em $B'(s)$ o mesmo procedimento aplicado em $B(s)$ nos dá uma matriz $C'(s)$ do mesmo formato de $C(s)$ com $k'_1 > k_1$, uma contradição pois k_1 é maximal. Portanto podemos assumir que $k_1 \geq k_i$, $c_i \in k[s]$, $i = 2, \ldots, m$. Subtraindo $k[s]$-múltiplos adequados das colunas $2, \ldots, m$ da primeira coluna obtemos uma matriz do mesmo formato com $grau(c_i) \leq k_i$. Mas então $grau(c_i) < k_1$ logo um $k[s^{-1}]$-múltiplo adequado de s^{k_1} é igual a c_i e portanto uma multiplicação a esquerda por uma matriz $V(s^{-1})$ nos dá uma matriz do mesmo formato com $c_2 = \cdots = c_m = 0$. Logo, permutando linhas e colunas se necessário, existem $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ e matrizes $U(s)$, $V(s^{-1})$ inversíveis tais que

$$V(s^{-1})s^nA(s, s^{-1})U(s) = V(s^{-1})B(s)U(s) = D(k_1, \ldots, k_m).$$

Multiplicando por s^{-n} obtemos $V(s^{-1})A(s, s^{-1})U(s) = D(r_1, \ldots, r_m)$, onde $r_i = k_i - n$. □

2.3 Teorema de Grothendieck

Seja $O(n)$ o fibrado vetorial sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ definido pela matriz $A(s, s^{-1}) = s^{-n}$. Temos que o fibrado vetorial definido pela matriz

$$D(r_1, \ldots, r_n) = \begin{pmatrix} s^{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s^{r_n} \end{pmatrix}$$

é igual à soma direta $O(-r_1) \oplus O(-r_2) \oplus \cdots \oplus O(-r_n)$.

Temos então o Teorema de Grothendieck:

Teorema 2.7. Se E é um fibrado vetorial algébrico de dimensão m sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ então E é isomorfo a uma soma direta de fibrados vetoriais de dimensão 1

$$E \cong O(k_1) \oplus O(k_2) \oplus \cdots \oplus O(k_m)$$

com $k_1 \geq k_2 \cdots \geq k_m$, $k_i \in \mathbb{Z}$, e os k_i são unicamente determinados pela classe de isomorfismo de E.

3 Quocientes em geometria algébrica

3.1 Quocientes

Seja G um grupo algébrico agindo em uma variedade X isto é, através de um morfismo $G \times X \to X$. Nosso objetivo é construir um "bom"quociente para esta ação. "Bom"pode ter dois significados neste contexto:

1. **Espaço de órbitas**: É quando o conjunto de órbitas X/G possui uma estrutura de variedade.

2. **Quociente Categórico**: Dizemos que $\phi\colon X \to Y$ é um quociente categórico de X por G se todo morfismo $X \to Z$ que é constante nas órbitas se fatora através de ϕ.

Nosso objetivo será construir quocientes categóricos com boas propriedades geométricas. Isto será feito usando a teoria geométrica de invariantes de Mumford.

3.2 Quociente Afim

Suponha que X é variedade afim e que buscamos um quociente que também é uma variedade afim. Uma ideia é tomar o anel de invariantes $A(X)^G$ e definir o quociente como sendo $Specm A(X)^G$
Temos o morfismo inclusão $A(X)^G \to A(X)$ que induz um morfismo de variedades afins $X \to Specm(A(X)^G)$.
Agora resta a questão de quando $Specm(A(X)^G)$ será uma variedade afim, o que se traduz em $A(X)^G$ ser uma k-álgebra finitamente gerada e sem nilpotentes. Temos que $A(X)^G$ não tem nilpotentes pois $A(X)$ não tem nilpotentes.
Agora temos apenas: $A(X)^G$ é finitamente gerado?
A resposta em geral para esta questão é não porém para uma classe de grupos chamados redutivos(que inclui os GL_n, SL_n, PGL_n, etc.) a resposta é sim.
Agora temos que isso é suficiente para construirmos quocientes no caso afim.

Teorema 3.1. Seja G um grupo redutivo agindo em uma variedade X. Então existe uma variedade afim Y e um morfismo $\phi\colon X \to Y$ tal que:

1. ϕ é constante nas órbitas;

2. ϕ é sobrejetora;

3. se U é um aberto de Zariski de Y, o homomorfismo induzido $\phi^*\colon A(U) \to A(\phi^{-1}(U))^G$ é um isomorfismo;

4. se $W \subset X$ é um fechado de Zariski G-invariante, então $\phi(W)$ é fechado em Y;

5. se $W_1, W_2 \subset X$ são fechado de Zariski G-invariantes e $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, então $\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset$.

Corolário 3.1.1. 1. Para cada aberto de Zariski $U \subset Y$, U é um quociente categórico de $\phi^{-1}(U)$ por G;

2. Se $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, então $\overline{G.x_1} \cap \overline{G.x_2} \neq \emptyset$;

3. Se G age em $\phi^{-1}(U)$ com órbitas fechadas, então $U = \phi^{-1}(U)/G$(ou seja, U é um espaço de órbitas).

3.3 Estabilidade

Suponha que $X \subset \mathbb{P}^n$. Para construir um quociente podemos tomar uma cobertura afim de conjuntos abertos invariantes de X, construir os quocientes afins e depois colar esses quocientes. Nem sempre podemos cobrir X dessa forma porém sempre podemos construir um quociente de um aberto de X, a união dos conjuntos abertos invariantes.
Observe que para a ação de G em X estender para $k[x_0, \ldots, x_n]$ ela deve ser linear. Se f é um polinômio não constante G-invariante para esta ação então $X_f = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ é um aberto afim invariante de X.

Definição 3.2. Um ponto $x \in X$ é

- *semi-estável* para a ação de G se existe $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogêneo e invariante de grau maior que 0 tal que $f(x) \neq 0$;

- *estável* para a ação de G se x possui estabilizador finito e existe f como acima tal que G age em X_f com órbitas fechadas.

Lema 3.3. Os subconjuntos X^{ss} (X^s) de pontos *semi-estáveis* (*estáveis*) de X são abertos G-invariantes de X e as condições do teorema

Demonstração. □

Definição 3.4. $\phi\colon X \to Y$ é:

- um bom quociente de X por G se ϕ é um morfismo afim (isto é, a imagem inversa de cada aberto afim em Y é afim) e as condições do teorema 3.1 são satisfeitas;

- um quociente geométrico se é um bom quociente e um espaço de órbitas.

Teorema 3.5. Se G é redutivo então:

1. existe um bom quociente $\phi \colon X^{ss} \to Y$ e $Y = X^{ss}//G$ é projetivo;
2. existe um aberto Y^s de Y tal que $\phi^{-1}(Y^s) = X^s$ e $Y^s = X^s/G$ é um quociente geométrico de X^s/G;
3. para $x_1, x_2 \in X^{ss}$, $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow \overline{G.x_1} \cap \overline{G.x_2} \neq \emptyset$;
4. se $\in X^{ss}$, x é estável se e somente se x tem estabilizador finito e $G.x$ é fechado em X^{ss}.

3.4 Critério Numérico

Em geral é muito difícil calcular o anel de invariantes de uma ação para poder fazer o quociente. Por outro lado, para mostrar algumas propriedades do quociente basta saber quais são os pontos estáveis e semi-estáveis da ação. Para isso Hilbert mostrou um critério para o caso em que $G = SL(n)$ e este mesmo critério foi posteriormente generalizado por Mumford para o caso em que G é um grupo redutivo qualquer.

Proposição 3.6. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e G um grupo redutivo agindo linearmente em X. Seja $x \in X$ e $\hat{x} \in k^{n+1}$ um ponto sobre x. Então:

- x é semi-estável se e somente se $0 \notin \overline{G.\hat{x}}$;
- x é estável se e somente se o estalizador de $\hat{x}$ é finito e $G.\hat{x}$ é fechado em k^{n+1}.

Ações de k^*

Suponha que k^* age linearmente em uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$. A ação induzida em k^{n+1} pode ser diagonalizada, logo existe uma base $e_0, \ldots, e_n$ de k^{n+1} tal que $t.e_i = t^{r_i} e_i$ para inteiros r_i.
Escolha $\hat{x} \in k^{n+1}$ tal que $\hat{x} \in x \in X$ e escreva $\hat{x} = \Sigma \hat{x}_i e_i$, logo

$$t.\hat{x} = \sum t^{r_i} \hat{x}_i e_i.$$

Defina

$$\mu(x) = max\{-r_i; x_i \neq 0\}.$$

Logo $\mu(x)$ é o único inteiro μ tal que o limite $\lim_{t \to 0} t^{\mu}(t.\hat{x})$ existe e é diferente de zero. Observe uma mudança da escolha do $\hat{x}$ só altera o valor de $t.\hat{x}$ por uma constante e
Obeserve que

$$\mu(x) > 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} t.\hat{x} \text{ não existe},$$

$$\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} t.\hat{x} \text{ existe e é diferente de zero}.$$

3.5 Exemplos

Pontos em $\mathbb{P}^1$

Considere o espaço vetorial $V_{n+1} = \{f = \sum a_i x_o^{n-i} x_1^i\}$ de polinômios homogêneos de grau n. Chamaremos de forma binária de grau n um elemento de $\mathbb{P}(V_{n+1})$.
Podemos representar uma forma binária por um $f \in V_{n+1}$ não nulo. Cada $f \in V_{n+1}$ pode ser fatorado em fatores lineares e portanto determina um conjunto de n pontos contados com multiplicidade em $\mathbb{P}^1$. Por outro lado, dado n pontos (contados com multiplicidade) em $\mathbb{P}^1$ podemos obter uma forma binária. Logo a ação usual de $SL(2)$ em $\mathbb{P}^1$ induz uma ação em $\mathbb{P}(V_{n+1})$. Vamos usar isso para descobrir quais as formas binárias que são estáveis e com isso ver quais as distribuições de pontos em $\mathbb{P}^1$ que são estáveis para a ação usual de $SL(2)$ em $\mathbb{P}^1$.
Sabemos que cada subgrupo 1-paramétrico de $SL(2)$ é conjugado a um da forma λ_r para algum $r \geq 0$, onde

$$\lambda_r(t) = \begin{pmatrix} t^r & 0 \\ 0 & t^{-r} \end{pmatrix}.$$

Levando em conta a fórmula $\mu(x, \lambda) = \mu(gx, g\lambda g^{-1})$ vemos que basta verificar o valor de μ para os λ da forma λ_r. Sabemos que uma forma binária é não-estável(não-semiestável) se, e somente se, é equivalente sob a ação de $SL(2)$ a uma forma binária f tal que $\mu(f, \lambda_r) \leq 0(< 0)$ para algum r.

Vemos que

$$\lambda_r(t)(\sum a_i x_0^{n-i} x_1^i) = \sum t^{r(2i-n)} a_i x_0^{n-i} x_1^i.$$

Logo a ação de λ_r é diagonal com a base usual de V_{n+1} e

$$\mu = \mu(\sum a_i x_0^{n-i} x_1^i) = r(n - 2i_0),$$

onde i_0 é o menor valor de i tal que $a_i \neq 0$. Logo $\mu \leq 0(< 0)$ se, e somente se, $a_i = 0$ sempre que $i < \frac{n}{2}(i \leq \frac{n}{2})$, isto é, se, e somente se, o ponto $[1 : 0]$ ocorre como um ponto de multiplicidade $\geq \frac{n}{2}(> \frac{n}{2})$ para a dada forma. Observando que a ação de $SL(2)$ é transitiva nos pontos de $\mathbb{P}^1$ temos que:

- a forma binária é estável se, e somente se, nenhum ponto de $\mathbb{P}^1$ ocorre como um ponto de multiplicidade $\geq \frac{n}{2}$;
- a forma binária é semi-estável se, e somente se, nenhum ponto de $\mathbb{P}^1$ ocorre como um ponto de multiplicidade $> \frac{n}{2}$.

4 Representação de Aljavas

4.1 Aljavas e Representações de Aljavas

Definição 4.1. Uma aljava Q é uma quadrupla (Q_0, Q_1, c, f), onde Q_0 é o conjunto de vértices, Q_1 é o conjunto de flechas e $c, f : Q_1 \to Q_0$ são funções que levam uma flecha ao seu inicio e fim, respectivamente.

Exemplos de aljavas:
Exemplo 1:

$$\bullet \longrightarrow \bullet$$

Exemplo 2:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet$$

Exemplo 3:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Exemplo 4

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[loop right] \arrow[loop below] \arrow[loop left] \end{tikzcd}$$

Exemplo 5

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \end{tikzcd}$$

Definição 4.2. Uma aljava $Q' = (Q'_0, Q'_1, c', f')$ é dita subaljava de Q se $Q'_0 \subset Q_0$, $Q'_1 \subset Q_1$, $c(Q'_1) \subset Q'_0$, $f(Q'_1) \subset Q'_0$ e c' e f' são as respectivas restrições de c e f.

Seja k um corpo. A partir de agora todo espaço vetorial V considerado será um k-espaço vetorial.

Definição 4.3. Uma representação de uma aljava Q é da forma $M = (M_x, M_\alpha)_{x,\alpha}$, onde M_x é um espaço vetorial para cada $x \in Q_0$, e $M_\alpha \colon M_{c(\alpha)} \to M_{f(\alpha)}$ são transformações lineares, para cada $\alpha \in Q_1$.

Logo uma representação de uma aljava é apenas associar a cada vértice um espaço vetorial e a cada flecha uma transformação linear.
Se cada M_x em uma representação M tiver dimensão finita dizemos que M tem dimensão finita, $\Sigma\ dim_k M_x$ é a dimensão de M e que $\underline{dim}M = (dim M_x)_{x \in Q_0}$ é o vetor dimensão de M.

Exemplo :

$$k \longrightarrow k$$

onde a flecha é a identidade.

Um homomorfismo entre representações é um homomorfismo entre espaços vetoriais que é compatível com as flechas ou seja, dadas representações M, M' um homomorfismo $g \colon M \to M'$ é dado por $g = (g_x)_{x \in Q_0}$, onde $g_x \colon M_x \to M'_x$ são transformações lineares tais que para cada $\alpha \in Q_1$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M_{c(\alpha)} \arrow[r, "g_{c(\alpha)}"] \arrow[d, "M_\alpha"'] & M'_{c(\alpha)} \arrow[d, "M_\alpha"] \\ M_{f(\alpha)} \arrow[r, "g_{f(\alpha)}"] & M'_{f(\alpha)} \end{tikzcd}$$

Exemplo:

Um loop é uma aljava composta de um vértice i e uma flecha α tal que $c(\alpha) = f(\alpha)$. Uma representação do loop é um par (V, h), onde V é um espaço vetorial e h um endomorfismo de h. Um isomorfismo $u\colon (V, h) \to (W, g)$ é um isomorfismo linear $u\colon V \to W$ tal que $gu = uh$.
Escolhendo uma base para V e para W podemos identificar h e g com matrizes $H, G \in M_{n\times n}$. Portando $H = UGU^{-1}$, onde U é a matriz correspondente a u. Logo classes de isomorfismo de representações correspondem a classes de conjugação de matrizes $n \times n$.

Dadas duas representações M, M' de uma aljava Q podemos construir uma representação $M \oplus M'$ fazendo $(M \oplus M')_x = M_x \oplus M'_x$ e usando os mapas usuais entre somas diretas.
Quando uma representação M pode ser escrita como uma soma direta de representações $P \oplus Q$ onde $P \neq 0$ e $Q \neq 0$ dizemos que M é *decomponível*, caso contrário M é dita *indecomponível*.
Observe que toda representação pode ser decomposta como soma de incecomponíveis. A unicidade da decomposição é dada por:

Teorema 4.4 (Krull-Schmidt)**.** Os indecomponíveis aparecendo na decomposição são unicos exceto por ordem e isomorfismo. Mais precisamente, se $V_1, \ldots, V_t$ e $W_1, \ldots, W_s$ são representações indecomponíveis tais que $V_1 \oplus \ldots \oplus V_t \cong W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$ então $s = t$ e existe uma permutação $\sigma \in S_t$ tal que $V_i \cong W_{\sigma(i)}$ para todo $1 \leq i \leq t$

4.2 Teorema de Gabriel

O Teorema de Gabriel responde a pergunta: Quais as aljavas possuem um conjunto finito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis?

Teorema 4.5 (Teorema de Gabriel)**.** Dada uma aljava Q e um vetor dimensão d, então Q tem um número finito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis com dimensão d se, e somente se, o grafo obtido "esquecendo"a orientação de Q é um dos diagramas Dynkin ADE.

4.3 Espaço de Módulos de Representações

Seja Q uma aljava e d um vetor dimensão. Nos casos em que não temos o teorema de Gabriel uma outra forma de classificar as representações de Q com vetor dimensão d é construir uma variedade de forma que cada ponto desta variedade esteja identificado com uma representação indecomponível de Q com vetor dimensão d. Como existe apenas um espaço vetorial de dimensão d_i podemos assumir que temos um espaço vetorial V_i associado a cada vértice de Q.

Seja k um corpo algébricamente fechado de característica zero. Considere o k-espaço afim $R_d(Q) := \oplus_{\alpha\colon i\to j} Hom_k(V_i, V_j)$. Este é um espaço para todas as representações de Q com vetor dimensão d. O grupo $G_d = \prod\limits_{i\in Q_0} GL(V_i)$ age em

$R_d(Q)$ via $(g_i)_i(V_\alpha)_\alpha = (g_j \circ V_\alpha \circ g_i^{-1})_{\alpha:\, i \to j}$. Observe que duas representações são isomórficas se, e somente se, elas estão na mesma órbita desta ação, logo as órbitas desta ação correspondem a classes de isomorfismo de representações de Q com vetor dimensão d.

A teoria geométrica de invariantes nos diz então que podemos construir uma variedade tal que cada ponto corresponde a uma órbita desta ação.

5 Fibrados Vetoriais sobre $\mathbb{P}^2$

Seja $\mathcal{M}(c_1, c_2)$ o espaço de módulos de fibrados vetoriais estáveis de dimensão dois sobre o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ com classes de chern c_1 e c_2. Temos que esta variedade $\mathcal{M}(c_1, c_2)$ depende apenas do discriminante $D = 4c_2 - c_1^2$ e usaremos a notação $\mathcal{M}(D)$.

Nesta seção vamos mostrar uma maneira de calcular $\chi(\mathcal{M}(D))$. O método de calcular a característica de Euler será baseado no fato de que se um toro T age em uma variedade suave X, então $\chi(X) = \chi(X^T)$.

Temos a seguinte descrição dos fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^2$ com a ação de um toro T.

Teorema 5.1. A categoria dos fibrados vetoriais T-equivariantes sobre $\mathbb{P}^2$ é equivalente à categoria dos espaços vetoriais com uma tripla de filtrações decrescentes $E^\alpha(i)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $i \in \mathbb{Z}$.

$$\ldots \subset E^\alpha(i+1) \subset E^\alpha(i) \subset E^\alpha(i-1) \subset \ldots,$$

com $E^\alpha(i) = 0$ para $i \gg 0$ e $E^\alpha(i) = E$ para $i \ll 0$.

Temos no caso de fibrados vetoriais de dimensão 2 sobre $\mathbb{P}^2$ que o conjunto $\mathcal{M}(D)^T$ é finito e portanto $\chi(\mathcal{M}(D)) = \chi(\mathcal{M}(D)^T) = \left|\mathcal{M}(D)^T\right|$.

Para encontrar o valor de $\left|\mathcal{M}(D)^T\right|$ precisamos calcular c_1 e c_2 em termos das filtrações correspondentes. A partir deste cáculo obtemos que $\left|\mathcal{M}(D)^T\right|$ é o número de soluções $(a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$ de

$$-D = a_\alpha^2 + a_\beta^2 + a_\gamma^2 - 2a_\alpha a_\beta - 2a_\beta a_\gamma - 2a_\gamma a_\alpha,$$

onde $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma \in \mathbb{N}$ satisfazem as desigualdades triangulares.

Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 5.2.

$$\chi(\mathcal{M}(D)) = \begin{cases} 3H(D); \ D \equiv -1(mod 4), \\ 3H(D) - \frac{3}{2}d(\frac{D}{4}); \ D \equiv 0(mod 4), \end{cases}$$

onde H é a função de Hurwitz e $d(n)$ é o número de divisores do número n.

Corolário 5.2.1. Existe apenas um número finito de valores $D = 4c_2 - c_1^2$ tais que $\mathcal{M}(D)^T = \emptyset$.

Referências

[1] Assem I., Simson D., Skowronski A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* Cambridge University Press, Cambridge (2007).

[2] Hazewinkel M., *A short elementary proof of Grothendieck's theorem on algebraic vector bundles over the projective line.*
Journal of pure and applied Algebra **25**, 207–211, (1982).

[3] A.D.King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras.*Quart. J. Math. Oxford (2), 45 (1994), 515-530, Oxford University Press.

[4] Klyachko, A. A., *Moduli of Vector Bundles and Number of Classes.* Translated from Funktsionalnyi Analiz i Ego Prilozheniya, **25**, 81–83, (1991).

[5] T.Y. Lam, *Serre's Problem on Projective Modules.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.

[6] Peter Newstead. GEOMETRIC INVARIANT THEORY. 3ème cycle. Guanajuato(Mexique), 2006, pp.17.

[7] Daniel Perrin *Algebraic Geometry*
Springer-Verlag, London, 2008.

[8] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux Algebriques Coherents.*The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 61, No. 2. (Mar., 1955), pp. 197-278.

[9] Smith, Kahanpää, Kekäläinen e Traves *An Invitation to Algebraic Geometry*
Springer-Verlag, New York, 2000.