

Introdução à Teoria dos Grafos

Lista de exercícios número 2

Data para entrega dos exercícios: 09/março/2015

1. Prove que para todo grafo G , $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$, onde $\delta(G)$, $d(G)$ e $\Delta(G)$ são o grau mínimo, grau médio e o grau máximo de G , respectivamente.
2. Prove que
 - 2.i) todo caminho é bipartido,
 - 2.ii) um ciclo é bipartido se e só se seu comprimento é par.
3. Dizemos que um grafo pode-se *decompor* em ciclos C_1, \dots, C_r , se os ciclos formam uma partição do conjunto de arestas do grafo. Prove que um grafo pode-se decompor em ciclos se, e só se, cada vértice tem grau par.
4. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ a matriz de adjacência do grafo G . Prove que a entrada a'_{ij} da matriz $A^k = (a'_{ij})_{n \times n}$ é o número de passeios de comprimento k do vértice v_i ao vértice v_j .
5. Existe um grafo conexo com dois caminhos mais longos disjuntos em vértices? Justifique.
6. Prove que todo grafo (simples) G com $\delta(G) \geq 2$ tem um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.
7. Existe um grafo bipartido simples r -regular, com $r \geq 1$, onde os conjuntos da bipartição tem tamanho diferente? Justifique.
8. Se G tem vértices v_1, \dots, v_n , a sequência $(d(v_1), \dots, d(v_n))$ é chamada de *sequência de graus* de G . Seja \mathbf{d} uma sequência (d_1, \dots, d_n) de números inteiros não negativos. Suponha que $\sum_{i=1}^n d_i$ é um número par. Prove que existe um multigrafo que tem sequência de graus \mathbf{d} .
9. Leia as seções 1.1, 1.2, 1.3, 1.6 do livro do Diestel [2] e/ou a seções 1.1 e 1.2 do livro do Bondy e Murty [1].

RECOMENDAÇÕES:

- (a) Tente resolver os exercícios antes de procurar as respostas na internet ou com os amigos.
- (b) Resolva os exercícios numa *folha sulfite*.
- (c) Identifique a folha, colocando o seu nome completo.
- (d) Escreva o enunciado antes de cada exercício.
- (e) Use a terminologia adotada.
- (f) Entregue no início da aula da data de entrega. (Pode ser manuscrito.)

Resolva individualmente!

Referências

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, Springer, New York, 2008.
- [2] Reinhard Diestel, *Graph theory*, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer, Heidelberg, 2010.