

## Introdução à Teoria dos Grafos

### Lista de exercícios número 12

Data para entrega dos exercícios: 27/abril/2015

1. Prove que é impossível cobrir um tabuleiro de xadrez com casas diametralmente opostas removidas usando peças de dominó.
2. Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Dado  $S \subseteq V$ , o conjunto de todos os vizinhos dos vértices em  $S$  é denotado por  $N^*(S)$ . (Note que poderia acontecer  $S \cap N^*(S) \neq \emptyset$ ).
  - 2.i) Prove que um grafo bipartido  $G = (V, E)$  tem um emparelhamento perfeito se e somente se para todo  $S \subseteq V$ ,  $|N^*(S)| \geq |S|$ .  
(Se  $G$  é um grafo  $(X, Y)$ -bipartido e  $S \subseteq X$ , então  $N^*(S) \cap S = \emptyset$  e  $N^*(S) = N(S)$ .)
  - 2.ii) Mostre uma família infinita de grafos que satisfazem esta condição mas que não contenham um emparelhamento perfeito.
3. Prove que todo grafo bipartido  $G$  tem um emparelhamento de tamanho pelo menos  $|E(G)|/\Delta(G)$ . (Dica: use o teorema de König-Egerváry)
4. Prove que cada subgrafo de  $K_{n,n}$  com mais do que  $(k-1)n$  arestas tem um emparelhamento de tamanho pelo menos  $k$ .
5. Deduza o Teorema de Hall do Teorema de König-Egerváry.

Mais problemas em Teoria dos Grafos podem ser encontrados no site:

<http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/>

### RECOMENDAÇÕES:

- (a) Tente resolver os exercícios antes de procurar as respostas na internet ou com os amigos.
- (b) Resolva os exercícios numa *folha sulfite*.
- (c) Identifique a folha, colocando o seu nome completo.
- (d) Escreva o enunciado antes de cada exercício.
- (e) Use a terminologia adotada.
- (f) Entregue no início da aula da data de entrega. (Pode ser manuscrito.)

**Resolva individualmente!**

### Referências

- [1] John Adrian Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, Springer, New York, 2008.
- [2] Reinhard Diestel, *Graph theory*, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer, Heidelberg, 2010.
- [3] Daniel J. Velleman, *How to prove it*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2006. A structured approach.