Introdução à Teoria dos Grafos

Lista de exercícios número 1

Data para entrega dos exercícios: 05/março/2015

1. Sejam A, B e C os conjuntos $\{u, z, v, x, y, z, u\}$, $\{x, x, y, y, y\}$ e $\{u, z, z, u\}$, respectivamente. Responda a cada afirmação se ela é verdadeira ou falsa e o por que.
 - 1.i) B é um subconjunto de A .
 - 1.ii) B tem mais elementos do que C .
 - 1.iii) B e C são subconjuntos de A .
 - 1.iv) O primeiro e o último elemento de C é o u .
 - 1.v) O número total de subconjuntos de B é 4.
2. Suponha que $\mathcal{F}$ é uma partição de A , $\mathcal{G}$ é uma partição de B , e os conjuntos A e B são disjuntos. Prove que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ é uma partição de $A \cup B$. É verdadeira a afirmação se os conjuntos A e B não são disjuntos? Por que?
3. Prove que $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos com exatamente k elementos escolhidos dentre o conjunto $\{1, \dots, n\}$.
4. Prove por indução que

$$1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
5. Prove que para cada $n \geq 4$, $n! > 2^n$.
6. Prove por indução que
 - 6.i) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$,
 - 6.ii) $(a^n)^m = a^{nm}$.
7. Seja n um número natural. Seja V o conjunto de todas as 0 – 1 sequências de tamanho n . O grafo com conjunto de vértices V no qual duas sequências são adjacentes se e só se elas diferem em exatamente uma posição é chamado do n -cubo. Diga quantos vértices, arestas, o grau mínimo, o grau máximo, é o grau médio do n -cubo.
8. Prove que todo grafo conexo G tem um caminho de comprimento pelo menos $\min\{2\delta(G), |G| - 1\}$.

RECOMENDAÇÕES:

- (a) Tente resolver os exercícios antes de procurar as respostas na internet ou com os amigos.
- (b) Resolva os exercícios numa *folha sulfite*.
- (c) Identifique a folha, colocando o seu nome completo.
- (d) Escreva o enunciado antes de cada exercício.
- (e) Use a terminologia adotada.
- (f) Entregue no início da aula da data de entrega. (Pode ser manuscrito.)

Resolva individualmente!