CONJUNTOS INTEIROS E O TEOREMA DE SCHÜTZENBERGER

1. Conjuntos inteiros e monóides aperiódicos

Um subconjunto $\mathscr{F}$ de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$ é *integralmente fechado* se $\varnothing$ e 1 pertencem a $\mathscr{F}$ e se para todo A e A' em $\mathscr{F}$,

$$A \cup A', \; AA' \text{ e } \bar{A}$$

também pertencem a $\mathscr{F}$. É fácil ver que a intersecção de subconjuntos integralmente fechados de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$ também é integralmente fechada. Denotamos por

$$Int\ \Sigma$$

o menor subconjunto integralmente fechado de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$ que contém os conjuntos unitários σ, para todo σ em Σ. Os elementos de $Int\ \Sigma$ são chamados de *subconjuntos inteiros* de Σ^*.

Como $Int\ \Sigma$ é fechado sob união e complementação, ele é uma álgebra booleana de subconjuntos de Σ^* e é fechado portanto sob intersecção. Alguns exemplos de subconjuntos inteiros de Σ^* ($\Sigma = \{\sigma, \tau\}$), são:

$$\begin{aligned}
I &= \Sigma^* = \bar{\varnothing},\\
I_1 &= (\sigma\tau)^* = 1 \cup (\sigma I \cap I\tau \cap \overline{I\sigma\sigma I} \cap \overline{I\tau\tau I}),\\
I_2 &= \tau(\sigma\tau)^* = \tau I_1,\\
I_3 &= \sigma(\tau\sigma)^* = I_1\sigma,\\
I_4 &= (\sigma\tau \cup \tau\sigma)^* = \overline{\overline{I\sigma}I_2\overline{\sigma I} \cup \overline{I\tau}I_3\overline{\tau I}}.
\end{aligned}$$

A verificação destas igualdades é deixada para o leitor, como um exercício interessante. Observamos que esta verificação pode ser feita algoritmicamente, embora neste livro não apresentemos os meios para isto.

Em vista do Corolário II.3, é imediato que

$$Int\ \Sigma \subseteq Rac\ \Sigma.$$

Um monóide M é *aperiódico* sse para todo m em M existe um natural n, tal que $m^n = m^{n+1}$. Mencionamos aqui que um monóide finito M é aperiódico sse todo grupo em M for trivial.

Os subconjuntos inteiros de Σ^* aparecem na Teoria dos Autômatos de diversas maneiras e possuem várias caracterizações. Aqui limitamo-nos a apresentar a seguinte caracterização:

TEOREMA 1 (Schützenberger). *Seja Σ um alfabeto finito. Um subconjunto A de Σ^* é inteiro sse o monóide sintático M_A de A é finito e aperiódico.*

Uma conseqüência do Teorema de Schützenberger é que existe um algoritmo para decidir se um conjunto racional dado A é inteiro ou não. Para tanto, basta construir o monóide sintático M_A de A e verificar se este é aperiódico ou não. Mais ainda, caso o monóide M_A de A seja aperiódico, seguindo-se a demonstração da parte "se" do teorema, podemos efetivamente construir uma expressão para A a partir dos conjuntos unitários σ, utilizando-se um número finito de vezes as operações de união, concatenação e complementação. Na Seção 4 apresentamos um exemplo desta construção.

2. Algumas propriedades de monóides aperiódicos

As propriedades que seguem serão utilizadas na demonstração do Teorema 1.

PROPOSIÇÃO 1. *Seja β: $M \to M_1$ um epimorfismo de monóides. Se M é aperiódico então M_1 também o é.*

Demonstração. Seja a em M_1. Como β é sobrejetora, $a = b\beta$ para algum b em M. Como M é aperiódico, $b^n = b^{n+1}$ para algum n, logo $a^n = (b\beta)^n = b^n\beta = b^{n+1}\beta = (b\beta)^{n+1} = a^{n+1}$. ■

PROPOSIÇÃO 2 (Lei de cancelamento para monóides aperiódicos). *Sejam a, b, e m elementos do monóide aperiódico M. Se $m = amb$ então $m = am = mb$.*

Demonstração. Seja n, tal que $a^n = a^{n+1}$. De $m = amb$, resulta que $m = a^n mb^n$, logo

$$m = a^n mb^n = a^{n+1} mb^n = a(a^n mb^n) = am.$$

Analogamente, $m = mb$. ■

Seja M um monóide, e J um subconjunto não vazio de M.

J é um *ideal à esquerda* sse $MJ = J$.
J é um *ideal à direita* sse $JM = J$.
J é um *ideal bilateral* sse $MJM = J$.

Os exercícios dão algumas propriedades de ideais. Em particular, se $m \in M$, então Mm, mM e MmM são ideais à esquerda, à direita e bilaterais, respectivamente, chamados de *ideais principais gerados por m*. Um elemento 0 em M é um *zero* sse $M0M = 0$, isto é, $\{0\} \subseteq M$ é um ideal bilateral. É fácil ver que 0 em M é um zero sse para todo m em M,

$$m0 = 0m = 0.$$

Para um subconjunto X de M, definimos

$$W_X = \{m \in M \mid MmM \cap X = \emptyset\}.$$

PROPOSIÇÃO 3. *Para todo subconjunto X de um monóide M, W_X é vazio ou é um ideal bilateral.*

Demonstração. Basta mostrar que $MW_XM = W_X$. De fato,

$$W_X = 1W_X1 \subseteq MW_XM.$$

Por outro lado, para mostrar que $MW_XM \subseteq W_X$, é suficiente provar que se a, $b \in M$ e $m \in W_X$, então $amb \in W_X$. Temos:

$$M(amb)M = (Ma)m(bM) \subseteq MmM.$$

Assim, se $MmM \cap X = \emptyset$, então $M(amb)M \cap X = \emptyset$, isto é, $amb \in W_X$. ■

PROPOSIÇÃO 4. *Seja m um elemento do monóide aperiódico M. Então*

$$m = (Mm \cap mM) \backslash W_m.$$

Demonstração. Está claro que $m \in Mm \cap mM$. Por outro lado, $m \in MmM$, isto é $MmM \cap m \neq \emptyset$. Logo $m \notin W_m$.

Assim,

$$m \subseteq (Mm \cap mM) \backslash W_m.$$

Seja agora m' um outro elemento de $(Mm \cap mM) \backslash W_m$. Como $m' \in Mm$ e $m' \in mM$, existem a e b em M, tais que

$$m' = am \text{ e } m' = mb. \tag{1}$$

Como $m' \notin W_m$, resulta que $Mm'M \cap m \neq \emptyset$. Isto é, existem c e d em M, tais que

$$m = cm'd. \tag{2}$$

De (1) e (2), resulta que

$$m = cm'd = camd,$$

assim, pela Proposição 2,

$$m = cam = cm'. \tag{3}$$

De (1) e (3), resulta que

$$m = cm' = cmb,$$

logo, pela Proposição 2,

$$m = mb = m'.$$

Isto completa a demonstração. ∎

3. Demonstração do Teorema 1

Começamos com a parte "se" do Teorema 1, que afirma que se o monóide sintático M_A de A é finito e aperiódico, então A é um subconjunto inteiro de Σ^*. De fato, mostramos a afirmação mais forte:

PROPOSIÇÃO 5. *Sejam Σ um alfabeto finito, M um monóide finito aperiódico e $\gamma: \Sigma^* \to M$ um epimorfismo. Para todo subconjunto X de M, $X\gamma^{-1}$ é um subconjunto inteiro de Σ^*.*

Demonstração. Procedemos por indução em *card* M. Se *card* $M = 1$, então $M = 1$ e para os dois subconjuntos de M, temos:

$$\emptyset\gamma^{-1} = \emptyset \text{ e } 1\gamma^{-1} = \Sigma^* = \overline{\emptyset}.$$

Ambos os subconjuntos de Σ^* são inteiros, estabelecendo a base da indução.

No que segue, fixamos M e γ como no enunciado, e adotamos a seguinte hipótese de indução:

HI: Se $\gamma' : \Sigma^* \to M'$ é um epimorfismo, M' é finito e aperiódico, $card\ M' < card\ M$ e $X \subseteq M'$, então $X\gamma'^{-1}$ é inteiro.

Os Lemas 1, 2, 3 e 3′, a seguir, serão demonstrados usando *HI*.

LEMA 1. *Seja J um ideal bilateral de M e seja $m \in M\backslash J$. Se $card\ J \geq 2$, então $m\gamma^{-1}$ e $J\gamma^{-1}$ são inteiros.*

LEMA 2. *Para todo m em M, $(MmM)\gamma^{-1}$ é inteiro.*

LEMA 3. *Para todo m em M, $(mM)\gamma^{-1}$ é inteiro.*

LEMA 3′. *Para todo m em M, $(Mm)\gamma^{-1}$ é inteiro.*

Adiamos a demonstração dos lemas e prosseguimos com a prova da Proposição 5. Seja $X \subseteq M$. Como X é finito e

$$X\gamma^{-1} = \bigcup_{m \in X} m\gamma^{-1},$$

basta mostrar que para todo $m \in M$, $m\gamma^{-1}$ é inteiro. De fato, pela Proposição 4,

$$m\gamma^{-1} = [(Mm \cap mM)\backslash W_m]\gamma^{-1} = [(Mm)\gamma^{-1} \cap (mM)\gamma^{-1}]\backslash (W_m\gamma^{-1}). \quad (1)$$

Pelos Lemas 3′ e 3 $(Mm)\gamma^{-1}$ e $(mM)\gamma^{-1}$ são inteiros. Por outro lado, pela Proposição 3, W_m é vazio ou é um ideal bilateral. No segundo caso, pelo Exercício 3,

$$W_m = \bigcup_{m' \in W_m} Mm'M,$$

logo,

$$W_m\gamma^{-1} = \bigcup_{m' \in W_m} (Mm'M)\gamma^{-1}.$$

Como W_m é finito e pelo Lema 2 $(Mm'M)\gamma^{-1}$ é inteiro para cada m' em M, resulta que nos dois casos $W_m\gamma^{-1}$ é inteiro. Pela fórmula (1), $m\gamma^{-1}$ é um subconjunto inteiro de Σ^* para todo m em M. ■

Demonstração do Lema 1. Seja $\sim$ a relação de equivalência sobre M, dada por:

$$m_1 \sim m_2 \text{ sse } m_1 = m_2 \text{ ou } \{m_1, m_2\} \subseteq J.$$

Mostramos que $\sim$ é uma congruência. De fato, sejam $m_1, m_2, m_3 \in M$, tais que $m_1 \sim m_2$. Se $m_1 = m_2$ então $m_1m_3 = m_2m_3$. Se $m_1, m_2 \in J$, então $m_1m_3, m_2m_3 \in J$, já que J é um ideal bilateral. Assim $m_1m_3 \sim$ $\sim m_2m_3$. Analogamente $m_3m_1 \sim m_3m_2$. Temos então

$$card\, M/\!\sim\; = (card\, M) - (card\, J) + 1 < card\, M,$$

pois $card\, J \geq 2$. Por outro lado, sendo $\beta\colon M \to M/\!\sim$ a projeção canônica, $\gamma\beta : \Sigma^* \to M/\!\sim$ é um epimorfismo. Agora, para $m \notin J, m = m\beta\beta^{-1}$ e portanto

$$m\gamma^{-1} = m\beta\beta^{-1}\gamma^{-1} = (m\beta)\,(\gamma\beta)^{-1}.$$

Também $J = J\beta\beta^{-1}$, logo $J\gamma^{-1} = (J\beta)\,(\gamma\beta)^{-1}$. O resultado segue de HI, já que $M/\!\sim$ é aperiódico pela Proposição 1. ■

Demonstração do Lema 2. Seja $A = (MmM)\gamma^{-1}$. Já que MmM é um ideal bilateral, resulta que

$$A = \Sigma^* A \Sigma^*. \tag{2}$$

Se $MmM = M$, então $A = \Sigma^* = \varnothing$ que é inteiro. Caso contrário

$$1\gamma \notin MmM \quad \text{e} \quad 1 \notin A. \tag{3}$$

Seja

$$B = A \backslash (\Sigma^*\Sigma A \Sigma^* \cup \Sigma^* A \Sigma\Sigma^*).$$

Observamos que

$$B = \{s \in A \mid \text{nenhum segmento } t \text{ de } s,\ t \neq s, \text{ pertence a } A\}.$$

Seja

$$\Sigma_0 = \Sigma \cap B,$$

e consideremos

$$T = \{(\sigma, m', \tau) \mid \sigma, \tau \in \Sigma,\ m' \in M \text{ e } \sigma(m'\gamma^{-1})\tau \cap B \neq \varnothing\} =$$
$$= \{(\sigma, t\gamma, \tau) \mid \sigma, \tau \in \Sigma,\ t \in \Sigma^* \text{ e } \sigma t \tau \in B\}.$$

Vamos mostrar que

$$A = \Sigma^*\Sigma_0\Sigma^* \cup \left(\bigcup_{(\sigma, m', \tau) \in T} \Sigma^*\sigma(m'\gamma^{-1})\tau\Sigma^* \right) \tag{4}$$

De fato, seja $s \in A$ e seja u um segmento de comprimento mínimo de s que também pertença a A. Então $u \in B$, e de (3), $u \neq 1$. Se $|u| = 1$, então $u \in \Sigma_0$ e $s \in \Sigma^*\Sigma_0\Sigma^*$. Se $|u| > 1$, sejam σ, t e τ, tais que $u = \sigma t \tau$. Vem que $(\sigma, t\gamma, \tau) \in T$ e

$$s \in \Sigma^*\sigma(t\gamma\gamma^{-1})\tau\Sigma^*.$$

Reciprocamente, $\Sigma_0 \subseteq B \subseteq A$, logo, de (2),

$$\Sigma^*\Sigma_0\Sigma^* \subseteq \Sigma^*A\Sigma^* = A.$$

Por outro lado, sejam $(\sigma, m', \tau) \in T$ e $t \in m'\gamma^{-1}$, tais que $\sigma t \tau \in B \subseteq A$. Se $v \in m'\gamma^{-1}$ então $(\sigma t \tau)\gamma = (\sigma v \tau)\gamma$, logo $\sigma v \tau \in A$. De (2),

$$\Sigma^*\sigma(t\gamma\gamma^{-1})\tau\Sigma^* \subseteq A.$$

Isto prova (4).

Mostramos agora, que para todo m' em M, tal que $(\sigma, m', \tau) \in T$ para algum $\sigma, \tau \in \Sigma$,

$$card\ W_{m'} \geq 2. \tag{5}$$

De fato, seja $(\sigma, t\gamma, \tau) \in T$ com $\sigma t \tau \in B$. Sejam

$$m' = t\gamma, \quad m_1 = \sigma\gamma \text{ e } m_2 = \tau\gamma.$$

Como $\sigma t \tau \in B \subseteq A = (MmM)\gamma^{-1}$, vem que $(\sigma t \tau)\gamma \in MmM$, isto é,

$$m_1 m' m_2 \in MmM. \tag{6}$$

Por outro lado, como $\sigma t \tau \in B$, resulta da construção de B, que σt, $t\tau \notin A$, logo

$$m_1 m' \notin MmM \quad \text{e} \quad m' m_2 \notin MmM. \tag{7}$$

Suponhamos agora que $m_1 m' \notin W_{m'}$. Resulta que $m' = a m_1 m' b$ para algum $a, b \in M$. Pela Proposição 2, $m' = a m_1 m'$, logo $m' m_2 = a m_1 m' m_2$. Ora, de (6), $m_1 m' m_2 \in MmM$, logo, sendo MmM um ideal bilateral, $m' m_2 \in MmM$. Isto contradiz (7), portanto

$$m_1 m' \in W_{m'}. \tag{8}$$

Pela Proposição 3, $W_{m'}$ é um ideal bilateral, logo

$$m_1 m' m_2 \in W_{m'}. \tag{9}$$

Agora (6) e (7) garantem que $m_1 m' \neq m_1 m' m_2$, e (5) segue de (8) e (9).

Finalmente, está claro que $m' \notin W_{m'}$. Assim, segue de (5) e do Lema 1, que $m'\gamma^{-1}$ é inteiro, para cada m' em M, tal que $(\sigma, m', \tau) \in T$ para algum σ e τ em Σ. Como T é finito, segue de (4), que $A = (MmM)\gamma^{-1}$ é um subconjunto inteiro de Σ^*. ■

Demonstração do Lema 3. Seja $A = (mM)\gamma^{-1}$. Já que mM é um ideal à direita, resulta que

$$A = A\Sigma^*. \tag{10}$$

Seja J o maior ideal bilateral contido em mM, ou $\varnothing$ se mM não contém ideais bilaterais. A existência de J é garantida, pois se J_1 e J_2 são ideais bilaterais contidos em mM, então $J_1 \cup J_2$ também é um tal ideal. Seja

$$B = A \backslash A\Sigma\Sigma^*.$$

Observamos que

$$B = \{s \in A \mid \text{nenhum segmento inicial } t \text{ de } s,\ t \neq s, \text{ pertence a } A\}.$$

Sejam

$$C = J\gamma^{-1} \quad \text{e} \quad D = B \backslash C.$$

Consideremos

$$T = \{(m', \sigma) \mid m' \in M,\ \sigma \in \Sigma \ \text{ e } \ (m'\gamma^{-1})\sigma \cap D \neq \varnothing\}.$$

Vamos mostrar que

$$A = C \cup \bigcup_{(m',\sigma)\in T} (m'\gamma^{-1})\sigma\Sigma^*. \tag{11}$$

De fato, suponhamos que $s \in A$. Se $s \in C$, não temos nada a mostrar, caso contrário

$$s \in A \backslash C.$$

Seja u o segmento inicial de comprimento mínimo de s que está em A. Por construção de B, $u \in B$. Por outro lado, $C = \Sigma^* C \Sigma^*$, logo $u \notin C$, pois caso contrário teríamos $s \in C$. Assim, $u \in B \backslash C = D$. Se $u = 1$, então $1 = u\gamma \in A\gamma = mM$. Vem que $M = mM$, logo $J = M$. Então $u \in J\gamma^{-1} = C$, uma contradição. Assim $u \neq 1$ e $u = t\sigma$ para algum

t em Σ^* e σ em Σ. Resulta que $(t\gamma, \sigma) \in T$ e $s \in (t\gamma\gamma^{-1})\sigma\Sigma^*$. Reciprocamente, já que $J \subseteq mM$,

$$C = J\gamma^{-1} \subseteq (mM)\gamma^{-1} = A.$$

Por outro lado, seja $(m', \sigma) \in T$ e seja $t \in m'\gamma^{-1}$, tal que $t\sigma \in D \subseteq A$. Seja $v \in m'\gamma^{-1}$. Então $(t\sigma)\gamma = (v\sigma)\gamma$, logo $v\sigma \in A$. De (10),

$$(m'\gamma^{-1})\sigma\Sigma^* \subseteq A.$$

Isto prova (11).

Mostramos agora, que para todo m' em M, tal que $(m', \sigma) \in T$ para algum σ em Σ,

$$card\ W_{m'} \geq 2. \tag{12}$$

De fato, seja $(t\gamma, \sigma) \in T$, com $t\sigma \in D$. Sejam

$$m' = t\gamma \text{ e } m_1 = \sigma\gamma.$$

Como $t\sigma \in D \subseteq A = (mM)\gamma^{-1}$, vem que $(t\sigma)\gamma \in mM$, isto é

$$m'm_1 \in mM. \tag{13}$$

Por outro lado, como $t\sigma \in D \subseteq B$, resulta da construção de B, que $t \notin A = (mM)\gamma^{-1}$, logo $t\gamma \notin mM$, isto é,

$$m' \notin mM. \tag{14}$$

Suponhamos agora que $m'm_1 \notin W_{m'}$. Resulta que $m' = am'm_1b$ para algum $a, b \in M$. Pela Proposição 2, $m' = m'm_1b$. Como mM é um ideal à direita, resulta de (13), que $m' = m'm_1b \in mM$. Isto contradiz (14), logo

$$m'm_1 \in W_{m'}. \tag{15}$$

De (13) e (15):

$$W_{m'} \cap mM \neq \varnothing. \tag{16}$$

Suponhamos agora, que $W_{m'} \subseteq mM$. Pela Proposição 3, $W_{m'}$ é um ideal bilateral, segue portanto da construção de J, que $W_{m'} \subseteq J$. Vem de (15), que $m'm_1 \in J$ e conseqüentemente $t\sigma \in C = J\gamma^{-1}$. Isto contradiz a escolha de t, portanto

$$W_{m'} \backslash mM \neq \varnothing. \tag{17}$$

Agora, (16) e (17) implicam (12).

Finalmente, como $m' \notin W_{m'}$, segue de (12) e do Lema 1, que $(m'\gamma^{-1})\sigma\Sigma^*$ é inteiro para cada (m', σ) em T. Como T é finito e C é inteiro pelos Lemas 1 e 2, segue de (11) que $A = (mM)\gamma^{-1}$ é um subconjunto inteiro de Σ^*. ■

Observamos que o Lema 3′ prova-se de maneira análoga ao Lema 3. Estamos prontos para mostrar o Teorema 1:

Demonstração do Teorema 1. Suponhamos que o monóide sintático M_A de A é finito e aperiódico. Seja

$$\gamma: \Sigma^* \to M_A$$

o morfismo sintático de A. Segue da definição da congruência sintática, que para s e t em Σ^*

$$\text{se } s\gamma = t\gamma \text{ então } s \in A \text{ sse } t \in A.$$

Em outras palavras, $A\gamma\gamma^{-1} = A$. Aplicando-se a Proposição 5 para $A\gamma \subseteq M_A$, resulta que A é um subconjunto inteiro de Σ^*.

Reciprocamente, seja A um subconjunto inteiro de Σ^*, devemos mostrar que M_A é finito e aperiódico. De fato, segue do Corolário II.3 que

$$Int\ \Sigma \subseteq Rac\ \Sigma.$$

Assim, pelo Teorema de Kleene e a Proposição II.9, o monóide sintático M_A de A é finito. Para mostrar que M_A é aperiódico, consideremos o seguinte subconjunto de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$:

$$\mathscr{F} = \{R \subseteq \Sigma^* \mid M_R \text{ é aperiódico}\}.$$

É fácil verificar que $\emptyset$, 1 e σ, para σ em Σ, pertencem a $\mathscr{F}$. Por outro lado, vamos mostrar que $\mathscr{F}$ é fechado sob união, concatenação e complementação. Segue então da definição de $Int\ \Sigma$, que

$$Int\ \Sigma \subseteq \mathscr{F}.$$

Assim fica provada a parte "somente se" do Teorema 1.

Para mostrar que $\mathscr{F}$ é fechado sob complementação, observamos que $M_R = M_{\bar{R}}$. Assim $R \in \mathscr{F}$ implica $\bar{R} \in \mathscr{F}$.

Para mostrar que $\mathscr{F}$ é fechado sob união e concatenação, sejam R e S em $\mathscr{F}$ e s em Σ^*. Por hipótese, existem naturais n e m, tais que

$$s^n \equiv s^{n+1}\ (mod\ R) \text{ e } s^m \equiv s^{m+1}\ (mod\ S).$$

Definindo $p = max\{n, m\}$ é imediato que

$$s^p \equiv s^{p+1} \ (mod\ R) \ \text{ e } \ s^p \equiv s^{p+1} \ (mod\ S).$$

Resulta da definição de congruência sintática, que

$$s^p \equiv s^{p+1} \ (mod\ R \cup S).$$

Assim $R \cup S$ também pertence a $\mathscr{F}$. Definimos agora $q = n + m + 1$. Sejam u e v em Σ^*, tais que

$$us^q v \in RS.$$

Existem então t_1, $t_2 \in \Sigma^*$, tais que

$$us^q v = t_1 t_2, \ t_1 \in R \ \text{ e } \ t_2 \in S.$$

Segue da definição de q, que, para um w conveniente em Σ^*,

$$t_1 = us^n w \ \text{ ou } \ t_2 = ws^m v.$$

Assim, $us^{n+1}w \in R$ ou $ws^{m+1}v \in S$; em qualquer caso

$$us^{q+1}v \in RS.$$

Analogamente, $us^{q+1}v \in RS$ implica que $us^q v \in RS$. Portanto

$$s^q \equiv s^{q+1} \ (mod\ RS),$$

e RS também pertence a $\mathscr{F}$. Isto completa a demonstração do Teorema 1. ■

4. Um exemplo

Vamos aplicar o procedimento da Proposição 5, para obter uma expressão inteira que prove que

$$A = (\sigma\tau \cup \tau\sigma)^*$$

é um subconjunto inteiro de Σ^* ($\Sigma = \{\sigma, \tau\}$). Note que na Seção 1 já apresentamos uma tal expressão.

A Figura 1 mostra um autômato determinístico $\mathscr{A}$ que reconhece A e a Figura 2 representa o monóide $M_{\mathscr{A}} = M$ do autômato $\mathscr{A}$. Observamos que M é isomorfo ao monóide sintático de A, mas não vamos precisar deste fato. Os elementos de M são

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p\},$$

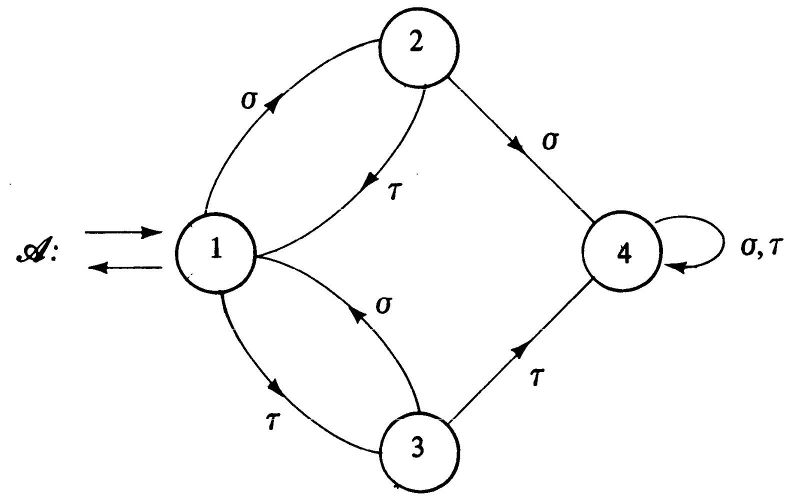

Figura 1 — Autômato $\mathscr{A}$ que reconhece A.

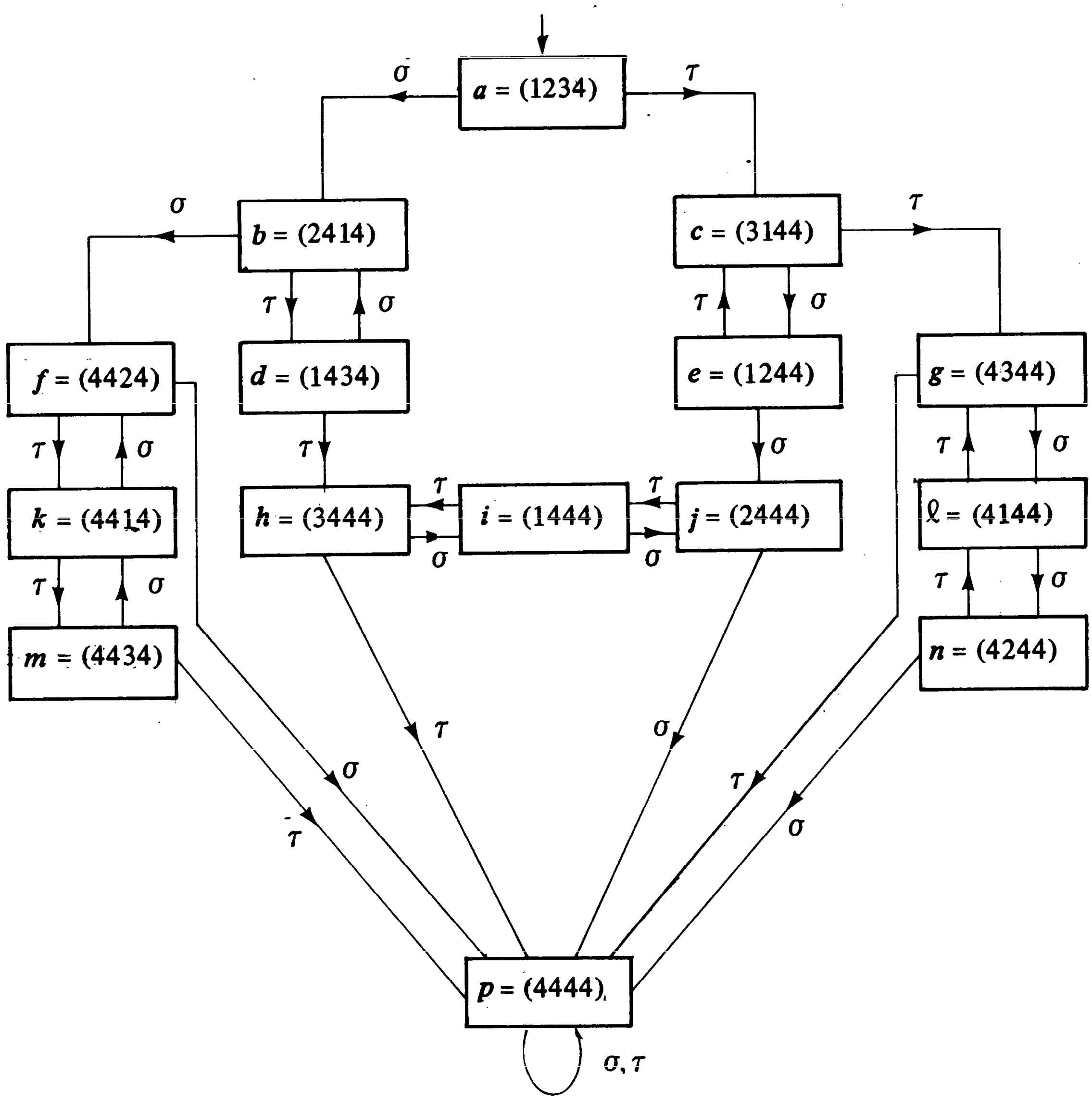

Figura 2 — O monóide $M = M_{\mathscr{A}}$ do autômato $\mathscr{A}$.

sendo a a identidade de M e p o seu zero. Na Figura 2, a notação $x = (n_1 n_2 n_3 n_4)$ indica que o elemento x de M é a função $P \to P$ que leva i em n_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Para cada s em Σ^*, $s\alpha = x$ sse na Figura 2, a palavra s leva a em x. Por exemplo:

$$(\sigma\tau)\alpha = d, \quad (\tau\sigma\tau)\alpha = c \quad \text{e} \quad (\sigma\tau\tau\sigma\tau)\alpha = h.$$

A multiplicação em M é obtida assim: sendo x e y elementos em M, sejam s e t em Σ^*, tais que $s\alpha = x$ e $t\alpha = y$. Resulta que $(st)\alpha = (s\alpha)(t\alpha) = xy$. Por exemplo: $dc = h$.

Ideais Principais à Direita

x	xM
a	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p\}$
b, d	$\{b, d, f, h, i, j, k, m, p\}$
c, e	$\{c, e, g, h, i, j, \ell, n, p\}$
f, k, m	$\{f, k, m, p\}$
g, ℓ, n	$\{g, \ell, n, p\}$
h, i, j	$\{h, i, j, p\}$
p	$\{p\}$

Ideais Principais à Esquerda

x	Mx
a	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p\}$
b, e	$\{b, e, f, i, j, k, \ell, n, p\}$
c, d	$\{c, d, g, h, i, k, \ell, m, p\}$
f, j, n	$\{f, j, n, p\}$
g, h, m	$\{g, h, m, p\}$
i, k, ℓ	$\{i, k, \ell, p\}$
p	$\{p\}$

Ideais Principais Bilaterais

x	MxM
a	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p\}$
b, c, d, e	$\{b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p\}$
$f, g, h, i, j, k, \ell, m, n$	$\{f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p\}$
p	$\{p\}$

Figura 3 — Ideais principais em M.

Deixamos ao leitor a verificação de que para todo x em M, $x^3 = x^4$, portanto M é aperiódico. A Figura 3 mostra os ideais principais gerados pelos elementos de M.

Sendo $\alpha\colon \Sigma^* \to M$ o morfismo do autômato $\mathscr{A}$, temos que

$$A = \{a, d, e, i\}\alpha^{-1}.$$

Aplicando o Lema 1 para o ideal bilateral: $\{f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p\}$, obtemos expressões inteiras B, C, D e E, tais que

$$a\alpha^{-1} = 1,\ b\alpha^{-1} = \sigma(\tau\sigma)^* = B,\ c\alpha^{-1} = \tau(\sigma\tau)^* = C,$$
$$d\alpha^{-1} = \sigma\tau(\sigma\tau)^* = D \ \text{e}\ e\alpha^{-1} = \tau\sigma(\tau\sigma)^* = E.$$

Deixamos como exercício a obtenção destas expressões.

Para obter uma expressão inteira para A, basta agora calcular $i\alpha^{-1}$. Pela Proposição 4, é suficiente calcular

$$W_i\alpha^{-1} = p\alpha^{-1},\ (iM)\alpha^{-1} = \{h, i, j, p\}\alpha^{-1} \ \text{e}\ (Mi)\alpha^{-1} = \{i, k, \ell, p\}\alpha^{-1},$$

e teremos

$$i\alpha^{-1} = ((Mi)\alpha^{-1} \cap (iM)\alpha^{-1})\backslash W_i\alpha^{-1}.$$

Para calcularmos $W_i\alpha^{-1} = p\alpha^{-1}$ aplicamos o Lema 2. Temos $\Sigma_0 = \emptyset$, e

$$T = \{(\sigma, b, \sigma),\ (\tau, c, \tau)\}.$$

Assim,

$$W_i\alpha^{-1} = p\alpha^{-1} = \Sigma^*\sigma(b\alpha^{-1})\sigma\Sigma^* \cup \Sigma^*\tau(c\alpha^{-1})\tau\Sigma^*.$$

Para calcularmos $(iM)\alpha^{-1}$, aplicamos o Lema 3. Temos

$$J = \{p\} \ \text{e}\ T = \{(d, \tau),\ (e, \sigma)\}.$$

Assim,

$$(iM)\alpha^{-1} = p\alpha^{-1} \cup (d\alpha^{-1})\tau\Sigma^* \cup (e\alpha^{-1})\sigma\Sigma^*.$$

Para calcular $(Mi)\alpha^{-1}$, aplicamos o Lema 3′. O maior ideal bilateral contido em Mi é $\{p\}$ e resulta que

$$J = \{p\} \ \text{e}\ T = \{(\sigma, d),\ (\tau, e)\}.$$

Assim,

$$(Mi)\alpha^{-1} = p\alpha^{-1} \cup \Sigma^*\sigma(d\alpha^{-1}) \cup \Sigma^*\tau(e\alpha^{-1}).$$

Finalmente, usando as expressões B, C, D e E, e colocando $\Sigma^* = \overline{\emptyset} = I$, obtém-se, após algumas simplificações evidentes

$$A = a\alpha^{-1} \cup d\alpha^{-1} \cup e\alpha^{-1} \cup i\alpha^{-1} =$$
$$= 1 \cup D \cup E \cup [(I\sigma D \cup I\tau E) \cap (D\tau I \cup E\sigma I)] \backslash (I\sigma B\sigma I \cup I\tau C\tau I).$$

Observamos que os conjuntos T podem ser obtidos algoritmicamente, porém o algoritmo correspondente é incômodo, pois envolve a construção de vários autômatos.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que $(\sigma\sigma)^*$ não é um subconjunto inteiro de Σ^*.
2. Seja M um monóide finito. Mostre que M é aperiódico sse todo grupo em M é trivial. Mostre que esta afirmação não é verdadeira se M for infinito.
3. Seja J um ideal bilateral do monóide M; então $1 \cup J$ é um submonóide de M.
   União de ideais é um ideal do mesmo tipo.
   Intersecção não vazia de ideais é um ideal do mesmo tipo.
   Todo ideal J é a união dos ideais principais do mesmo tipo, gerados pelos elementos de J. Por exemplo,
   $$\text{se } MJ = J, \text{ então } J = \bigcup_{m \in J} Mm.$$
4. Mostre a recíproca da Proposição 2.
5. Mostre o Lema 3′.
6. Um monóide M é *idempotente* sse para todo m em M, $m = m^2$. Mostre que todo monóide idempotente, finitamente gerado, é finito (vide [26] ou [42]).
7. Mostre que para cada subconjunto racional A de Σ^* existe um alfabeto finito Γ, um morfismo h de Γ^* em Σ^* e um subconjunto inteiro B de Γ^*, tais que $A = Bh$.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

Conjuntos inteiros foram introduzidos por Trakhtenbrot [118] e independentemente por McNaughton [73]. O Teorema 1 é de M. P. Schützenberger [107], [108]. A demonstração apresentada é baseada no trabalho original de Schützenberger.

Um estudo mais detalhado de conjuntos inteiros pode ser encontrado nos livros de McNaughton e Papert [75] e de Eilenberg [26].