CAPÍTULO II

CONJUNTOS RACIONAIS E O TEOREMA DE KLEENE

1. Autômatos, conjuntos reconhecíveis e conjuntos racionais

Um *autômato finito* $\mathscr{A}$ (ou simplesmente *autômato* $\mathscr{A}$) consiste de:

um conjunto finito Q de elementos chamados *estados*,
um alfabeto finito Σ,
uma função $\alpha: \Sigma \to Rel\ Q$,
um subconjunto I de Q, cujos elementos são chamados de *estados iniciais*,
um subconjunto F de Q, cujos elementos são chamados de *estados finais*.

O autômato acima será denotado por $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$.

De acordo com a Proposição I.4, α tem uma única extensão a um morfismo

$$\Sigma^* \to Rel\ Q,$$

que também será denotada por α. Resulta que $1\alpha = 1_Q$. Ademais, dada a palavra s:

$$s = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n \qquad (\sigma_i \in \Sigma,\ i = 1, 2, \dots, n),$$

$s\alpha$ é a relação

$$s\alpha = (\sigma_1\alpha)(\sigma_2\alpha)\dots(\sigma_n\alpha).$$

A definição de composição de relações implica que, dados estados q e q',

$$q' \in q(s\alpha)$$

see existem estados $q_0, q_1, \dots, q_n$, com $q_0 = q$ e $q_n = q'$, tais que

$$q_i \in q_{i-1}(\sigma_i\alpha) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Passamos a dar uma descrição combinatória de autômatos, bem como das relações $s\alpha$. Definimos inicialmente o conjunto E de *arestas* do autômato $\mathscr{A}$, como sendo o subconjunto de $Q \times \Sigma \times Q$, dado por

$$E = \{(q, \sigma, q') \in Q \times \Sigma \times Q \mid (q, q') \in \sigma\alpha\}.$$

Este conceito sugere uma representação gráfica de autômatos. Cada estado é representado por um pequeno círculo. Uma flecha entrando em (saindo de) um estado, indica que este é um estado inicial (final). Para cada aresta (q, σ, q') de $\mathscr{A}$ desenha-se uma flecha rotulada σ, saindo de q e entrando em q'. Na Figura 1 damos um exemplo, onde, como nos demais exemplos, usamos $\Sigma = \{\sigma, \tau\}$.

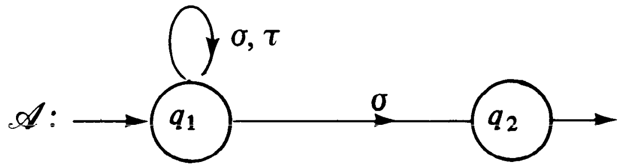


Figura 1 — Um autômato $\mathscr{A}$.

Um *passeio* c em $\mathscr{A}$ é uma seqüência finita de arestas, da forma

$$c = (q_0, \sigma_1, q_1)(q_1, \sigma_2, q_2) \ldots (q_{n-1}, \sigma_n, q_n) \quad (n \geq 1).$$

Dizemos que q_0 é a *origem* e q_n o *término* do passeio c. O *rótulo* $|c|$ do passeio c é a palavra de Σ^* dada por

$$|c| = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n.$$

Definimos também, para cada estado q de A o *passeio degenerado* 1_q, que tem origem e término em q e não contém arestas. Por definição, o rótulo do passeio degenerado 1_q é a palavra vazia, isto é $|1_q| = 1$. O natural n é chamado de *comprimento* do passeio c; o comprimento do passeio degenerado é zero. Observe que o comprimento de um passeio c é igual ao comprimento de seu rótulo $|c|$, isto é o comprimento de c é dado por $||c||$. Sendo c um passeio com origem q, término q' e rótulo s, as seguintes notações serão utilizadas:

$$c\colon q \xrightarrow{s} q', \quad q \xrightarrow{s} q', \quad q \xrightarrow{c} q' \quad \text{e} \quad c\colon q \longrightarrow q'.$$

Em particular, uma aresta (q, σ, q'), poderá também ser denotada por

$$q \xrightarrow{\sigma} q'.$$

Dados passeios c_1 e c_2,

$$c_1 : q_1 \to q_2 \text{ e } c_2 : q_2 \to q_3,$$

tais que o término de c_1 é igual à origem de c_2, definimos o seu *produto*

$$c_1c_2 : q_1 \xrightarrow{c_1} q_2 \xrightarrow{c_2} q_3,$$

obtido por concatenação. Está claro que o produto de passeios é uma operação associativa, isto é,

$$(c_1c_2)c_3 = c_1(c_2c_3),$$

dado que os produtos c_1c_2 e c_2c_3 podem ser efetuados. Ademais, para todo passeio c com origem p e término q,

$$1_pc = c = c1_q.$$

Temos também que:

$$|c_1c_2| = |c_1|\ |c_2| \text{ e } ||c_1c_2|| = ||c_1|| + ||c_2||.$$

Para efeito de ilustração, consideremos os passeios c_1 e c_2 no autômato $\mathscr{A}$ da Figura 1:

$$c_1 = (q_1, \sigma, q_1)\,(q_1, \tau, q_1)\,(q_1, \sigma, q_1)$$

e

$$c_2 = (q_1, \sigma, q_1)\,(q_1, \tau, q_1)\,(q_1, \sigma, q_2).$$

Temos que $|c_1| = |c_2| = \sigma\tau\sigma$, $||c_1|| = ||c_2|| = 3$ e o passeio

$$c_1c_2 : q_1 \rightarrow q_2$$

é dado por

$$c_1c_2 = (q_1, \sigma, q_1)(q_1, \tau, q_1)(q_1, \sigma, q_1)(q_1, \sigma, q_1)(q_1, \tau, q_1)(q_1, \sigma, q_2),$$

seu rótulo é $|c_1c_2| = \sigma\tau\sigma\sigma\tau\sigma$, e seu comprimento é $||c_1c_2|| = 6$.

A proposição a seguir caracteriza as relações $s\alpha$ em termos de passeios:

PROPOSIÇÃO 1. *Seja $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ um autômato. Para toda palavra s em Σ^* e estados q e q', (q, q') pertence a $s\alpha$ sse existe em $\mathscr{A}$ um passeio c com origem q, término q' e rótulo s. Em símbolos,*

$$(q, q') \in s\alpha \text{ sse existe } c : q \xrightarrow{s} q'.$$

Demonstração. Procedemos por indução sobre o comprimento da palavra s em Σ^*. Se $|s| = 0$, então $s = 1$ e $s\alpha = 1_Q$. Por outro lado, os passeios com rótulo $s = 1$ são todos degenerados.

Segue que existe um passeio

$$c : q \xrightarrow{1} q'$$

sse $q = q'$ sse $(q, q') \in 1_Q = s\alpha$. Supondo agora que $|s| \geq 1$, existem t em Σ^* e σ em Σ, tais que $s = t\sigma$. Então, as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $(q, q') \in s\alpha$.

(ii) existe $r \in Q$, tal que $(q, r) \in t\alpha$ e $(r, q') \in \sigma\alpha$.

(iii) existem $r \in Q$, e passeios $c_1 : q \xrightarrow{t} r$ e $c_2 : r \xrightarrow{\sigma} q'$.

(iv) existe em $\mathscr{A}$ um passeio $c : q \xrightarrow{s} q'$.

De fato, α sendo um morfismo, $s\alpha = (t\sigma)\alpha = (t\alpha)(\sigma\alpha)$, logo a equivalência de (i) e (ii) segue da definição de composição de relações. Agora, (ii) e (iii) são equivalentes pela hipótese da indução e a observação de que $(r, q') \in \sigma\alpha$ sse (r, σ, q') é uma aresta de $\mathscr{A}$. Finalmente, se (iii) estiver satisfeita, então o passeio $c = c_1c_2$ tem rótulo $|c| = t\sigma = s$, logo c satisfaz (iv). Reciprocamente, se (iv) estiver satisfeita, então o passeio c tem rótulo $s = t\sigma$, logo ele admite uma fatoração

$$c : q \xrightarrow{t} r \xrightarrow{\sigma} q'$$

para algum r em Q. Assim, (iii) está satisfeita. A equivalência de (i) e (iv) completa a demonstração. ■

A cada autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ associamos um subconjunto de Σ^*, denotado por $|\mathscr{A}|$ e dado por

$$|\mathscr{A}| = \{s \in \Sigma^* \,|\, I(s\alpha) \cap F \neq \varnothing\}.$$

Em vista da Proposição 1, está claro que

$$|\mathscr{A}| = \{s \in \Sigma^* \,|\, \text{existem } i \in I, f \in F, \text{ e um passeio } c : i \xrightarrow{s} f\}.$$

Dizemos que $|\mathscr{A}|$ é o *comportamento* de $\mathscr{A}$, e também que $\mathscr{A}$ *reconhece* $|\mathscr{A}|$. Um subconjunto A de Σ^* é *reconhecível* se A for o comportamento de algum autômato, isto é, $A = |\mathscr{A}|$ para algum autômato $\mathscr{A}$. Denotamos o conjunto dos subconjuntos reconhecíveis de Σ^* por

$$\mathit{Rec}\ \Sigma.$$

No caso do autômato da Figura 1,

$$|\mathscr{A}| = (\sigma \cup \tau)^*\sigma,$$

portanto o conjunto $(\sigma \cup \tau)^*\sigma$ é reconhecível. Deixamos ao leitor a construção de autômatos que reconhecem os conjuntos $\emptyset, \Sigma^*$, 1 e σ (para $\sigma \in \Sigma$).

Um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ é *determinístico* se *card* $I = 1$ e para todo σ em Σ, a relação $\sigma\alpha$ é uma função. Neste caso α é uma função

$$\alpha : \Sigma \to Fun\ Q$$

e sua extensão é um morfismo

$$\alpha : \Sigma^* \to Fun\ Q.$$

Assim, se i for o estado inicial do autômato determinístico $\mathscr{A}$, então o seu comportamento pode também ser expresso por

$$|\mathscr{A}| = \{s \in \Sigma^* \mid i(s\alpha) \in F\}.$$

Por outro lado, pela Proposição 1, um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, i, F)$, onde i representa o estado inicial, é determinístico sse para cada par (q, s) em $Q \times \Sigma^*$, existe exatamente um passeio em $\mathscr{A}$ com origem em q e com rótulo s. A Figura 2 mostra um autômato determinístico $\mathscr{B}$. Deixamos ao leitor a verificação de que o comportamento de $\mathscr{B}$ também é $(\sigma \cup \tau)^*\sigma$.

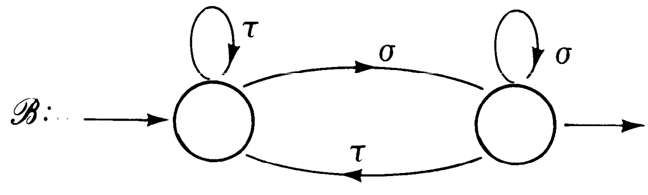


Figura 2 — Um autômato determinístico.

Um subconjunto $\mathscr{F}$ de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$ é *racionalmente fechado* se $\emptyset$ e 1 pertencem a $\mathscr{F}$ e se para todo A e A' em $\mathscr{F}$,

$$A \cup A',\ AA' \text{ e } A^*$$

também pertencem a $\mathscr{F}$. É fácil ver que a intersecção de subconjuntos racionalmente fechados de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$ também é racionalmente fechada. Denotamos por

$$Rac\ \Sigma$$

o menor subconjunto racionalmente fechado de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$ que contém os conjuntos unitários σ, para todo σ em Σ. Os elementos de *Rac* Σ são chamados de *subconjuntos racionais* de Σ^*.

Alguns exemplos de subconjuntos racionais de Σ^* são

$$\Sigma^* = (\sigma \cup \tau)^*, \ (\sigma \cup \tau)^*\sigma, \ (\sigma\tau \cup \tau\sigma)^* \text{ e } (\sigma\sigma)^*.$$

Note que os elementos de *Rac* Σ são aqueles subconjuntos de Σ^* que podem ser obtidos a partir dos conjuntos unitários σ, utilizando-se um número finito de vezes as operações de união, concatenação e estrela.

O Teorema de Kleene, que demonstramos a seguir, afirma que para todo alfabeto finito Σ,

$$Rec\ \Sigma = Rac\ \Sigma.$$

2. Operações sobre conjuntos reconhecíveis

Tendo em vista a verificação da inclusão *Rac* $\Sigma \subseteq$ *Rec* Σ, mostramos nesta seção que *Rec* Σ é fechado sob várias operações. Nos exercícios indicamos outras propriedades de fecho de *Rec* Σ.

PROPOSIÇÃO 2. *Todo subconjunto reconhecível de* Σ^* *é o comportamento de um autômato determinístico.*

Demonstração. Sejam A em *Rec* Σ e $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ um autômato (não necessariamente determinístico), que reconhece A. Seja $\mathscr{B} = (\mathfrak{p}(Q), \Sigma, \beta, I, G)$ o autômato, onde

$$G = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \varnothing\},$$

e para todo $P \subseteq Q$ e $\sigma \in \Sigma$,

$$P(\sigma\beta) = P(\sigma\alpha).$$

É imediato que o autômato $\mathscr{B}$ é determinístico. Por outro lado, mostra-se, por indução no comprimento de s em Σ^*, que para todo $P \subseteq Q$,

$$P(s\beta) = P(s\alpha).$$

Assim,

$$s \in |\mathscr{A}| \quad \text{sse} \quad I(s\alpha) \cap F \neq \varnothing \quad \text{sse} \quad I(s\alpha) = I(s\beta) \in G \quad \text{sse} \quad s \in |\mathscr{B}|.$$

Logo, $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| = A$. ∎

A construção da Proposição 2 é chamada de *construção dos subconjuntos*. Na Figura 3 indicamos o autômato determinístico obtido a partir do autômato da Figura 1 através desta construção.

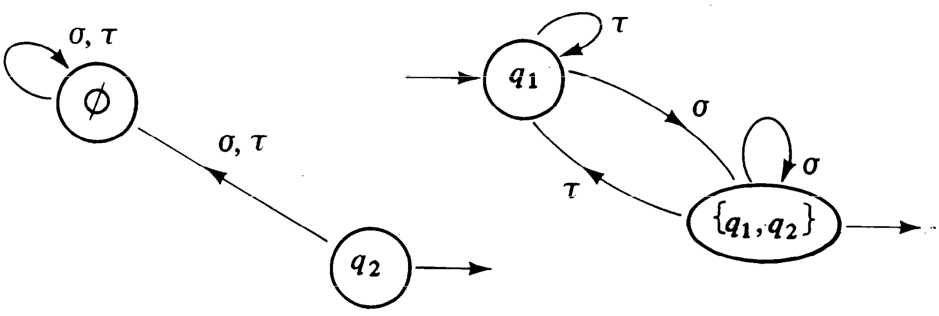


Figura 3 — Exemplo para a construção dos subconjuntos.

Para $A \subseteq \Sigma^*$, denotamos por $\bar{A}$ o *complemento* de A em Σ^*, isto é

$$\bar{A} = \Sigma^* \setminus A.$$

COROLÁRIO 1. *Rec* Σ *é fechado sob complementação.*

Demonstração. Seja A em *Rec* Σ e seja $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, i, F)$ um autômato determinístico, que reconhece A. Definimos

$$\mathscr{B} = (Q, \Sigma, \alpha, i, Q \setminus F).$$

Segue que

$$|\mathscr{B}| = \Sigma^* \setminus |\mathscr{A}| = \bar{A}.$$

(Note que a demonstração não é válida se $\mathscr{A}$ não for um autômato determinístico!) ■

PROPOSIÇÃO 3. *Rec* Σ *é fechado sob união.*

Demonstração. Sejam A_i em *Rec* Σ e $\mathscr{A}_i = (Q_i, \Sigma, \alpha_i, I_i, F_i)$ autômatos tais que $|\mathscr{A}_i| = A_i$, para $i = 1, 2$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Definimos

$$\mathscr{B} = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \beta, I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2);$$

onde para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\beta = \sigma\alpha_1 \cup \sigma\alpha_2$. Deixamos ao leitor a verificação de que

$$|\mathscr{B}| = |\mathscr{A}_1| \cup |\mathscr{A}_2| = A_1 \cup A_2. \ ■$$

COROLÁRIO 2. *Rec* Σ *é fechado sob intersecção e sob complementação relativa.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 em *Rec* Σ. Então

$$A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}} \text{ e } A_1 \backslash A_2 = A_1 \cap \overline{A_2}.$$

O resultado segue do Corolário 1 e da Proposição 3. ■

PROPOSIÇÃO 4. *Rec* Σ *é fechado sob concatenação.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 em *Rec* Σ e sejam $\mathscr{A}_i = (Q_i, \Sigma, \alpha_i, I_i, F_i)$ autômatos tais que

$$|\mathscr{A}_1| = A_1, |\mathscr{A}_2| = A_2 \text{ e } Q_1 \cap Q_2 = \varnothing.$$

Definimos

$$\mathscr{B} = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \beta, I, F_2),$$

onde

$$I = \begin{cases} I_1 & \text{se } I_1 \cap F_1 = \varnothing \\ I_1 \cup I_2 & \text{se } I_1 \cap F_1 \neq \varnothing, \end{cases}$$

e, para todo σ em Σ,

$$\sigma\beta = \sigma\alpha_1 \cup \sigma\alpha_2 \cup \{(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2 \,|\, q_1(\sigma\alpha_1) \cap F_1 \neq \varnothing \text{ e } q_2 \in I_2\}.$$

Observe que se E_1 e E_2 são os conjuntos de arestas de $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$, respectivamente, então o conjunto E de arestas de $\mathscr{B}$ é dado por

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \{(q_1, \sigma, q_2) \in Q_1 \times \Sigma \times Q_2 \,|\, q_2 \in I_2 \text{ e existem } f \in F_1 \text{ e } (q_1, \sigma, f) \in E_1\}.$$

Deixamos ao leitor a verificação trabalhosa, mas sem novidades, de que

$$|\mathscr{B}| = |\mathscr{A}_1| \, |\mathscr{A}_2| = A_1 A_2. \ ■$$

PROPOSIÇÃO 5. *Rec* Σ *é fechado sob estrela.*

Demonstração. Seja A em *Rec* Σ, e seja $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$, um autômato que reconhece A. Seja p um estado que não pertence a Q. Definimos

$$\mathscr{B} = (Q \cup p, \Sigma, \beta, p, p),$$

onde para todo σ em Σ

$$\begin{aligned}\sigma\beta = X_\sigma \cup \sigma\alpha \cup \{(p, q) \in p \times Q \mid q \in I(\sigma\alpha)\} \cup \\ \cup \{(q, p) \in Q \times p \mid q(\sigma\alpha) \cap F \neq \varnothing\},\end{aligned}$$

com

$$X_\sigma = \begin{cases} \varnothing & \text{se } I(\sigma\alpha) \cap \mathrm{F} = \varnothing \\ (p, p) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

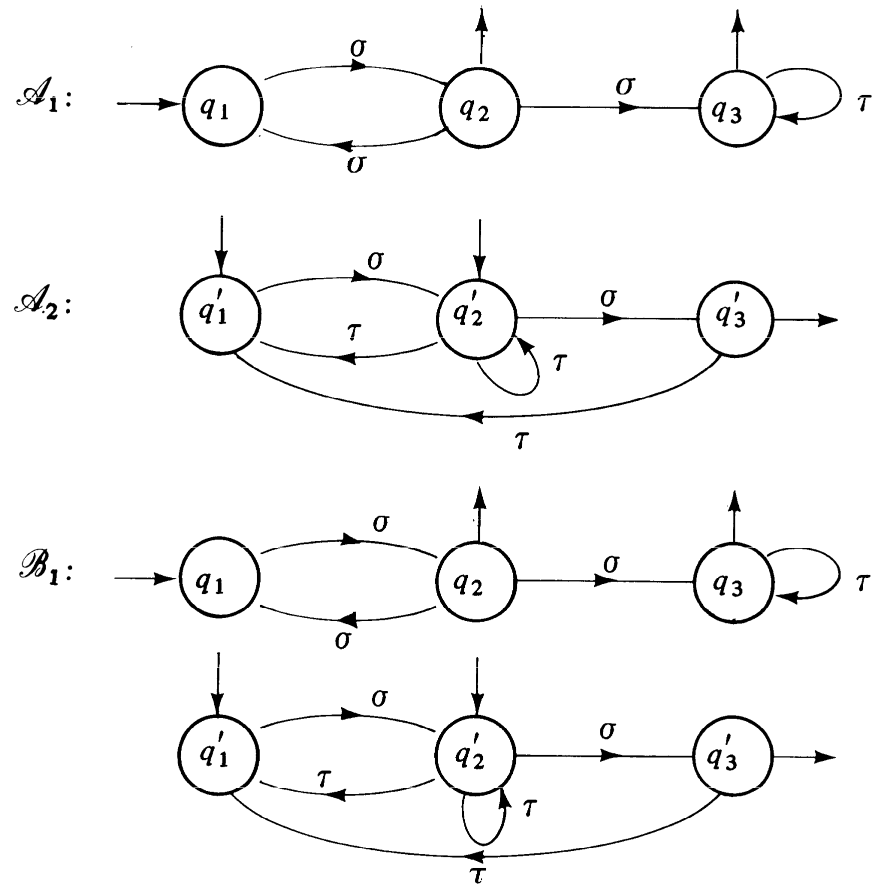
Observe que se $E_{\mathscr{A}}$ for o conjunto de arestas de $\mathscr{A}$, então o conjunto $E_{\mathscr{B}}$ de arestas de $\mathscr{B}$ é dado por

$$\begin{aligned} E_{\mathscr{B}} = E_{\mathscr{A}} &\cup \{(p, \sigma, q) \in p \times \Sigma \times Q \mid \text{existem } i \in I \text{ e } (i, \sigma, q) \in E_{\mathscr{A}}\} \cup \\ &\cup \{(q, \sigma, p) \in Q \times \Sigma \times p \mid \text{existem } f \in F \text{ e } (q, \sigma, f) \in E_{\mathscr{A}}\} \cup \\ &\cup \{(p, \sigma, p) \in p \times \Sigma \times p \mid \text{existem } i \in I, f \in F \text{ e } (i, \sigma, f) \in E_{\mathscr{A}}\}. \end{aligned}$$

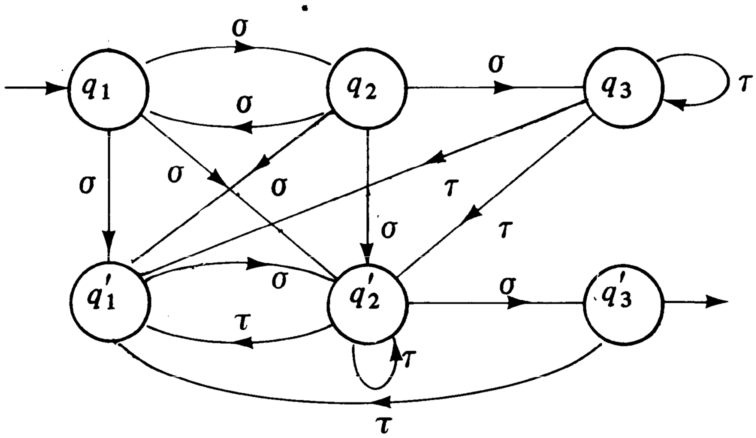
Mais uma vez deixamos ao leitor a verificação de que

$$|\mathscr{B}| = |\mathscr{A}|^* = A^*. \blacksquare$$

Na Figura 4 são apresentados exemplos das construções das Proposições 3, 4 e 5.



$\mathcal{B}_2$:



$\mathcal{B}_3$:

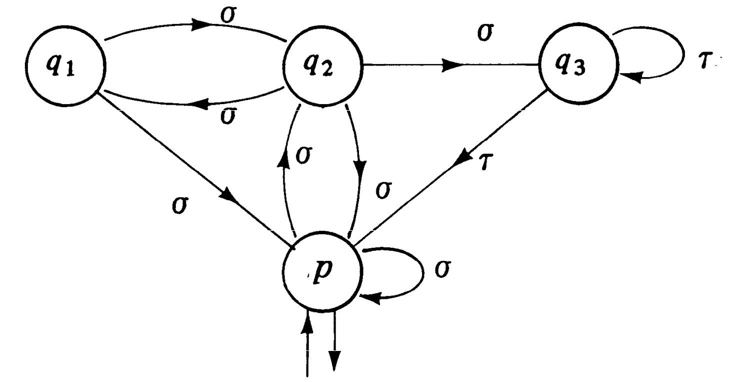


Figura 4 — Exemplos das construções $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{A}_1| \cup |\mathcal{A}_2|$, $|\mathcal{B}_2| = |\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{A}_2|$ e $|\mathcal{B}_3| = |\mathcal{A}_1|^*$.

3. Sistemas de equações lineares

Tendo em vista a verificação da inclusão $Rec\,\Sigma \subseteq Rac\,\Sigma$, estudamos nesta seção sistemas de equações lineares, cujos coeficientes e incógnitas são subconjuntos de Σ^*. Mais precisamente, dados um natural $n \geq 1$ e subconjuntos de Σ^*

$$E_{ij} \text{ e } T_i, \text{ para } 1 \leq i, j \leq n,$$

estamos interessados em subconjuntos de Σ^*

$$X_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

que satisfazem o sistema abaixo de n equações:

$$X_i = T_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} E_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Mostraremos que sob certas condições o sistema (1) admite uma única solução que é constituída de subconjuntos racionais de Σ^*.

PROPOSIÇÃO 6. *Se* $1 \notin E_{ij}$, *para* $1 \leq i, j \leq n$, *então o sistema* (1) *admite no máximo uma solução.*

Demonstração. Suponhamos que os subconjuntos $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ de Σ^* são soluções de (1). Mostramos por indução em $|s|$, para $s \in \Sigma^*$, que

$$s \in X_i \text{ sse } s \in Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De fato, se $|s| = 0$, então $s = 1$ e como $1 \notin E_{ij}$ por hipótese, resulta de (1) que

$$1 \in X_i \text{ sse } 1 \in T_i \text{ sse } 1 \in Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Seja então s em Σ^*, tal que $|s| > 0$, e suponhamos que $s \in X_i$. Resulta de (1), que

$$s \in T_i \cup \bigcup E_{ij}X_j.$$

Se $s \in T_i$, então

$$s \in T_i \cup \bigcup E_{ij}Y_j = Y_i.$$

Caso contrário, para algum j, $1 \leq j \leq n$, $s \in E_{ij}X_j$. Assim, existem $t_1 \in E_{ij}$ e $t_2 \in X_j$, tais que $t_1 t_2 = s$. Por hipótese $1 \notin E_{ij}$, logo $|t_1| > 0$. Consequentemente $|t_2| < |s|$, e pela hipótese da indução, $t_2 \in Y_j$. Segue que

$$s = t_1 t_2 \in E_{ij}Y_j \subseteq T_i \cup \bigcup E_{ij}Y_j = Y_i.$$

Em ambos os casos, $s \in Y_i$. Argumento simétrico mostra que se $s \in Y_i$ então $s \in X_i$. Logo, $X_i = Y_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

PROPOSIÇÃO 7. *O sistema* (1) *tem pelo menos uma solução. Além disso, se* E_{ij} *e* T_i $(1 \leq i, j \leq n)$ *são subconjuntos racionais de* Σ^*, *então o sistema* (1) *tem uma solução* X_i $(1 \leq i \leq n)$, *constituída de subconjuntos racionais de* Σ^*.

Demonstração. Procedemos por indução em n. Se $n = 1$, a equação

$$X_1 = T_1 \cup E_{11}X_1$$

admite a solução

$$X_1 = E_{11}^* T_1.$$

De fato, usando a identidade $E_{11}^* = 1 \cup E_{11}E_{11}^*$, obtemos

$$X_1 = E_{11}^*T_1 = (1 \cup E_{11}E_{11}^*)T_1 = T_1 \cup E_{11}E_{11}^*T_1 = T_1 \cup E_{11}X_1.$$

Além disso, se E_{11} e T_1 são racionais, $E_{11}^*T_1$ também o é. Suponhamos então que $n > 1$, e consideremos o sistema abaixo de $n - 1$ equações:

$$X_i = T'_i \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E'_{ij}X_j \quad (1 \leq i \leq n-1), \tag{2}$$

onde

$$E'_{ij} = E_{ij} \cup E_{in}E_{nn}^*E_{nj} \quad (1 \leq i, j \leq n-1), \tag{3}$$

e

$$T'_i = T_i \cup E_{in}E_{nn}^*T_n \quad (1 \leq i \leq n-1). \tag{4}$$

Pela hipótese da indução, o sistema (2) tem uma solução X_i $(1 \leq i \leq n-1)$. Colocamos agora

$$X_n = E_{nn}^*\left(T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{nj}X_j\right) \tag{5}$$

Os X_i $(1 \leq i \leq n)$ assim obtidos satisfazem (1). De fato, para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned} X_i &= T'_i \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E'_{ij}X_j = \\ &= T_i \cup E_{in}E_{nn}^*T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} (E_{ij} \cup E_{in}E_{nn}^*E_{nj})X_j = \\ &= T_i \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{ij}X_j \cup E_{in}E_{nn}^*\left(T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{nj}X_j\right) = \\ &= T_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} E_{ij}X_j. \end{aligned}$$

Temos ainda, colocando $E_{nn}^* = 1 \cup E_{nn}E_{nn}^*$,

$$\begin{aligned} X_n &= E_{nn}^*\left(T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{nj}X_j\right) = \\ &= (1 \cup E_{nn}E_{nn}^*)\left(T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{nj}X_j\right) = \end{aligned}$$

$$= T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{nj}X_j \cup E_{nn}E_{nn}^* \left(T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{nj}X_j \right) =$$

$$= T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n} E_{nj}X_j.$$

Além disso, se E_{ij} e T_i $(1 \leq i, j \leq n)$ são racionais, resulta de (3) e (4) que E'_{ij} e T'_i $(1 \leq i, j \leq n - 1)$ também são racionais. Pela hipótese da indução, (2) tem uma solução X_i $(1 \leq i \leq n - 1)$, que é constituída de subconjuntos racionais de Σ^*. Vem de (5) que neste caso X_n é racional também. ∎

Observamos que a solução obtida na proposição acima, pode também ser obtida do seguinte modo. Reescrevemos a n-ésima equação de (1):

$$X_n = T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n} E_{nj}X_j = \left(T_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{nj}X_j \right) \cup E_{nn}X_n. \qquad (6)$$

Pela fórmula obtida na base da indução, (5) pode ser considerada uma solução formal de (6). Substituindo (5) nas $n - 1$ primeiras equações de (1), obtém-se exatamente o sistema (2).

Juntando as proposições 6 e 7, obtemos:

PROPOSIÇÃO 8. *Se E_{ij} e T_i $(1 \leq i, j \leq n)$ são subconjuntos racionais de Σ^*, tais que $1 \notin E_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$, então o sistema* (1) *tem uma única solução X_i* $(1 \leq i \leq n)$. *Esta é constituída de subconjuntos racionais de Σ^*.*

4. O Teorema de Kleene

Estamos agora prontos para provar o Teorema de Kleene, isto é a igualdade dos conjuntos $Rec\,\Sigma$ e $Rac\,\Sigma$.

TEOREMA 1 (Kleene). *Para todo alfabeto finito Σ,*

$$Rec\,\Sigma = Rac\,\Sigma.$$

Demonstração. As Proposições 3, 4 e 5 mostram que $Rec\ \Sigma$ é fechado sob união, concatenação e estrela. Por outro lado, $\emptyset$, 1 e $\sigma \in \Sigma$ são reconhecíveis, logo $Rec\ \Sigma$ é um subconjunto racionalmente fechado de $\mathfrak{p}(\Sigma^*)$ que contém os conjuntos unitários σ para todo $\sigma \in \Sigma$. Segue da definição de $Rac\,\Sigma$, que

$$Rac\,\Sigma \subseteq Rec\,\Sigma.$$

Para mostrar a inclusão recíproca, seja $A \in Rec\,\Sigma$, e seja $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ um autômato que reconhece A. Sejam $n = card\,Q$ e $q_1, q_2, \dots, q_n$ uma enumeração arbitrária dos elementos de Q. Definimos:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_i &= (Q, \Sigma, \alpha, q_i, F) && (1 \leq i \leq n), \\ X_i &= |\mathscr{A}_i| && (1 \leq i \leq n), \\ E_{ij} &= \{\sigma \in \Sigma \mid q_j \in q_i(\sigma\alpha)\} && (1 \leq i, j \leq n), \end{aligned}$$

e

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{se } q_i \in F \\ \varnothing & \text{se } q_i \notin F \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Os conjuntos acima satisfazem as identidades

$$X_i = T_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} E_{ij}X_j \quad (1 \leq i \leq n). \tag{1}$$

De fato,

$$\begin{aligned} X_i = |\mathscr{A}_i| &= \{s \in \Sigma^* \mid q_i(s\alpha) \cap F \neq \varnothing\} = \\ &= T_i \cup \{s \in \Sigma^* \mid |s| \geq 1 \text{ e } q_i(s\alpha) \cap F \neq \varnothing\} = \\ &= T_i \cup \bigcup_{q_j \in Q} \{\sigma \in \Sigma \mid q_j \in q_i(\sigma\alpha)\}\{t \in \Sigma^* \mid q_j(t\alpha) \cap F \neq \varnothing\} = \\ &= T_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} E_{ij}X_j. \end{aligned}$$

Ora, T_i $(1 \leq i \leq n)$ é racional, e como Σ é finito e $E_{ij} \subseteq \Sigma$, E_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ é racional também. Ademais, $1 \notin E_{ij}$, logo, pela Proposição 8, o sistema (1) admite uma única solução, e esta é constituída de subconjuntos racionais de Σ^*. Concluímos que X_i é racional, para $1 \leq i \leq n$. Finalmente,

$$A = |\mathscr{A}| = \{s \in \Sigma^* \mid I(s\alpha) \cap F \neq \varnothing\} = \bigcup_{q_i \in I} \{s \in \Sigma^* \mid q_i(s\alpha) \cap F \neq \varnothing\} = \bigcup_{q_i \in I} X_i.$$

Assim, A é um subconjunto racional de Σ^* e

$$Rec\,\Sigma \subseteq Rac\,\Sigma.$$

Isto estabelece o Teorema de Kleene. ■

COROLÁRIO 3. *Rac Σ é fechado sob complementação.*

Demonstração. Segue do Teorema de Kleene e do Corolário 1. ■

Observamos que o Corolário 3 é um resultado algébrico sobre um conjunto (*Rac* Σ) definido algebricamente. A sua demonstração porém, exige toda a força do Teorema de Kleene. Em outras palavras, para provar o Corolário 3, tornou-se necessário introduzir o conceito de autômato! De fato, não conhecemos demonstração deste resultado que não utilize autômatos (ou algo equivalente).

Para exemplificar o cálculo acima, considere o autômato da Figura 5.

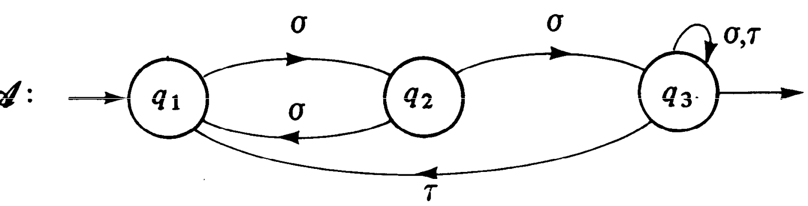


Figura 5 — Um exemplo.

Resulta o seguinte sistema de 3 equações:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \sigma X_2 \\
X_2 &= \sigma X_1 \cup \sigma X_3 \\
X_3 &= 1 \cup \tau X_1 \cup (\sigma \cup \tau) X_3 .
\end{aligned}
$$

Resolvendo a terceira equação em X_3, obtemos:

$$X_3 = (\sigma \cup \tau)^* (1 \cup \tau X_1).$$

Substituindo X_3 na segunda equação, obtemos:

$$X_2 = \sigma(\sigma \cup \tau)^* \cup [\sigma \cup \sigma(\sigma \cup \tau)^* \tau] X_1 .$$

Substituindo X_2 na primeira equação, obtemos:

$$X_1 = \sigma\sigma(\sigma \cup \tau)^* \cup \sigma[\sigma \cup \sigma(\sigma \cup \tau)^* \tau] X_1 .$$

Resolvendo a última equação em X_1, obtemos:

$$|\mathscr{A}| = X_1 = [\sigma(\sigma \cup \sigma(\sigma \cup \tau)^* \tau)]^* \sigma\sigma(\sigma \cup \tau)^* .$$

Em geral, existem várias expressões denotando o mesmo subconjunto racional de Σ^*. Algumas podem ser obtidas mudando-se a enumeração dos estados do autômato e aplicando-se o algoritmo do

Teorema de Kleene. No caso do autômato da Figura 5, deixamos ao leitor a verificação de que

$$|\mathscr{A}| = \sigma\sigma(\sigma \cup \tau)^*.$$

5. Monóide de um autômato e o monóide sintático

No que segue, associamos monóides $M_{\mathscr{A}}$ e M_A a cada autômato $\mathscr{A}$ e a cada subconjunto A de Σ^*. Estes monóides têm um papel fundamental, pois permitem tratar vários problemas em termos algébricos, utilizando a teoria dos semigrupos. No capítulo seguinte resolvemos um problema com estas características.

Seja $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ um autômato. Então

$$\alpha : \Sigma^* \to Rel\ Q$$

é um morfismo. A imagem $\Sigma^*\alpha$ de Σ^* por α é um submonóide de $Rel\ Q$, chamado de *monóide de* $\mathscr{A}$, e denotado por $M_{\mathscr{A}}$. Assim, α pode também ser visto como um epimorfismo

$$\alpha : \Sigma^* \to M_{\mathscr{A}}.$$

Como Q é um conjunto finito, $Rel\ Q$ é finito também, portanto o monóide $M_{\mathscr{A}}$ de um autômato $\mathscr{A}$ é um monóide finito.

No caso particular em que $\mathscr{A}$ é determinístico, o monóide $M_{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{A}$ é um submonóide de $Fun\ Q$.

Seja A um subconjunto de Σ^*. Diz-se que palavras s_1 e s_2 em Σ^* são *congruentes módulo* A e escreve-se

$$s_1 \equiv s_2 \ (mod\ A)$$

sse

$$\text{para todo } u, v \text{ em } \Sigma^* \ us_1v \in A \text{ sse } us_2v \in A. \qquad (1)$$

Em outras palavras, s_1 e s_2 são congruentes módulo A sse em qualquer contexto (u, v), s_1 e s_2 podem ser trocados um pelo outro, sem alterar a pertinência a A das palavras em questão. Está claro que a relação acima é de equivalência sobre Σ^*. Mais ainda, ela é uma relação de congruência, pois se $s_1 \equiv s_2 \ (mod\ A)$ e $t \in \Sigma^*$, então (1) implica que

$$\text{para todo } u, v \text{ em } \Sigma^* \ us_1tv \in A \text{ sse } us_2tv \in A,$$

isto é, $s_1 t \equiv s_2 t$ (*mod* A). Analogamente $ts_1 \equiv ts_2$ (*mod* A). O monóide quociente de Σ^* por $\equiv$ (*mod* A) é chamado de *monóide sintático* de A e é denotado por M_A. A projeção canônica

$$\gamma : \Sigma^* \to M_A$$

é chamada de *morfismo sintático* de A.

Observamos que se $s_1\gamma = s_2\gamma$, isto é $s_1 \equiv s_2$ (*mod* A), então $s_1 \in A$ sse $s_2 \in A$. Assim,

$$\text{para todo } s \text{ em } \Sigma^* \; s \in A \text{ sse } s\gamma\gamma^{-1} \subseteq A. \qquad (2)$$

Note que os conceitos acima aplicam-se a qualquer subconjunto de Σ^*. A proposição seguinte, que caracteriza *Rec* Σ, é o elo de ligação entre as teorias dos autômatos e dos semigrupos.

PROPOSIÇÃO 9. *Um subconjunto A de Σ^* é reconhecível sse o monóide sintático M_A de A é finito.*

Demonstração. Seja $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ um autômato que reconhece o conjunto reconhecível A. Consideremos o morfismo $\alpha : \Sigma^* \to M_{\mathscr{A}}$ e seja $\gamma : \Sigma^* \to M_A$ o morfismo sintático de A (veja Figura 6).

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^* \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & M_{\mathscr{A}} \arrow[dl, "g"] \\
M_A &
\end{tikzcd}$$

Figura 6.

Mostramos inicialmente que $\alpha\alpha^{-1} \subseteq \gamma\gamma^{-1}$. Para tanto, basta provar que para todo $s_1, s_2 \in \Sigma^*$,

$$s_1\alpha = s_2\alpha \text{ implica que } s_1 \equiv s_2 \; (mod\, A).$$

De fato, sejam u, v em Σ^*. Como $s_1\alpha = s_2\alpha$, resulta que

$$(us_1v)\alpha = (u\alpha)(s_1\alpha)(v\alpha) = (u\alpha)(s_2\alpha)(v\alpha) = (us_2v)\alpha.$$

Em particular:

$$I((us_1v)\alpha) = I((us_2v)\alpha),$$

logo

$$us_1v \in A \text{ sse } us_2v \in A.$$

Assim,

$$s_1 \equiv s_2 \ (mod\, A).$$

Pela Proposição I.3 existe um epimorfismo $g : M_{\mathscr{A}} \to M_A$, já que γ é um epimorfismo. Como $M_{\mathscr{A}}$ é finito, M_A é finito também.

Reciprocamente, suponhamos que M_A é finito, e seja

$$\gamma : \Sigma^* \to M_A$$

o morfismo sintático de A. Seja $\mathscr{A} = (M_A, \Sigma, \alpha, 1\gamma, F)$ um autômato determinístico, onde

$$F = \{m \in M_A \mid m\gamma^{-1} \subseteq A\},$$

e para $m \in M_A$ e $\sigma \in \Sigma$, a imagem de m por $\sigma\alpha$ é dado por

$$m(\sigma\alpha) = m \cdot (\sigma\gamma).$$

(Note que no lado direito, o ponto indica multiplicação em M_A.) É imediato verificar, que para todo s em Σ^*

$$m(s\alpha) = m \cdot (s\gamma). \tag{3}$$

Usando (3) e (2), resulta que:

$$s \in |\mathscr{A}| \text{ sse } (1\gamma)(s\alpha) = (1\gamma) \cdot (s\gamma) = s\gamma \in F \text{ sse } s\gamma\gamma^{-1} \subseteq A \text{ sse } s \in A.$$

Assim, $|\mathscr{A}| = A$ e A é reconhecível. ■

Terminamos esta seção com uma observação. Não apresentamos neste livro ferramentas suficientes para computar o monóide sintático de um subconjunto reconhecível A de Σ^*. Isto pode ser feito, utilizando o "autômato reduzido" que reconhece A.

EXERCÍCIOS

1. Dados conjuntos finitos Q, Σ, E, I e F, tais que $I, F \subseteq Q$ e $E \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, mostre que existe um único autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ cujo conjunto de arestas é E.
2. Complete as demonstrações das Proposições 4 e 5.

3. Dê um exemplo de um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$, tal que $|\mathscr{A}| \neq |\mathscr{B}|$, onde $\mathscr{B} = (Q, \Sigma, \alpha, I, Q \backslash F)$.

4. Dado um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$, seja $[\mathscr{A}] = \{s \in \Sigma^* \mid I(s\alpha) \subseteq F\}$. Mostre que para todo alfabeto finito Σ, $Rec\ \Sigma = \{A \subseteq \Sigma^* \mid A = [\mathscr{A}]$ para algum autômato $\mathscr{A}\}$.

5. Sejam $\mathscr{A}_j = (Q_j, \Sigma, \alpha_j, i_j, F_j)$ autômatos determinísticos para j = 1, 2. O *produto direto* $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ de $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ é o autômato
$$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \alpha, (i_1, i_2), F_1 \times F_2),$$
onde para todo par (q_1, q_2) em $Q_1 \times Q_2$,
$$(q_1, q_2)(\sigma\alpha) = (q_1(\sigma\alpha_1), q_2(\sigma\alpha_2)).$$
Mostre que $|\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2| = |\mathscr{A}_1| \cap |\mathscr{A}_2|$. Mostre que substituindo os estados finais $F_1 \times F_2$ de $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ por conjuntos convenientes, obtém-se autômatos com comportamento
$$|\mathscr{A}_1| \cup |\mathscr{A}_2|, |\mathscr{A}_1| \backslash |\mathscr{A}_2| \text{ e } |\mathscr{A}_1| \oplus |\mathscr{A}_2|.$$

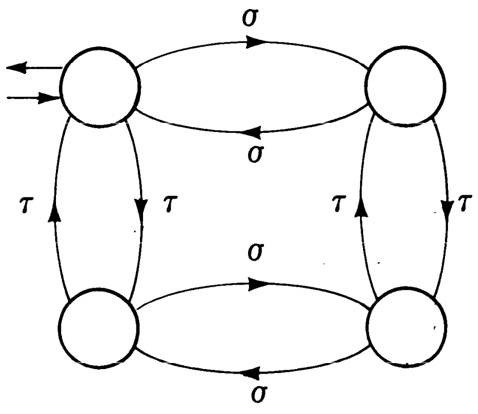
6. Generalize a construção do produto direto para autômatos em geral, de forma que a igualdade $|\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2| = |\mathscr{A}_1| \cap |\mathscr{A}_2|$ continue válida. Mostre que substituindo convenientemente os estados finais de $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ obtém-se um autômato $\mathscr{B}$, tal que $|\mathscr{B}| \subseteq |\mathscr{A}_1| \cup |\mathscr{A}_2|$. Dê um exemplo de autômatos $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$, tais que tanto $|\mathscr{A}_1|$ como $|\mathscr{A}_2|$ contém palavras não vazias, no entanto o autômato $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ não tem arestas.

7. Seja $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ um morfismo de monóides livres. Mostre que se $A \subseteq \Sigma^*$ é reconhecível, então Ah é reconhecível também. Mostre que se $A \subseteq \Gamma^*$ é reconhecível, então Ah^{-1} é reconhecível também.

8. Sejam $A_1, A_2 \subseteq \Sigma^*$. O *embaralhamento* de A_1 e A_2 é definido por $A_1 \sqcup\!\sqcup A_2 = \{s_1 t_1 s_2 t_2 \ldots s_n t_n | n \geq 1, s_1 s_2 \ldots s_n \in A_1 \text{ e } t_1 t_2 \ldots t_n \in A_2\}$. Assim, por exemplo, $(\sigma\tau) \sqcup\!\sqcup \Sigma^* = \Sigma^*\sigma\Sigma^*\tau\Sigma^*$. Mostre que $A_1 \sqcup\!\sqcup A_2 = A_2 \sqcup\!\sqcup A_1$. Mostre também que $Rec\ \Sigma$ é fechado sob embaralhamento.

9. Seja A um subconjunto reconhecível de Σ^*. Mostre que $\Sigma^{*-1}A$, $A\Sigma^{*-1}$ e $(\Sigma^{*-1}A)\Sigma^{*-1}$ são reconhecíveis também (veja Exercício I.66).

10. Ache uma expressão racional, tão "simples" quanto possível, para o comportamento do autômato da figura seguinte:



11. Mostre que se $1 \in E \subseteq \Sigma^*$, então X é uma solução da equação $X = T \cup EX$ sse existe $V \subseteq \Sigma^*$, tal que $X = E^*(T \cup V)$.

12. (*McNaughton e Yamada*) – Baseando-se nas idéias que seguem, dê uma nova demonstração da inclusão $Rec\, \Sigma \subseteq Rac\, \Sigma$. Seja $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ um autômato com n estados. Fixamos uma enumeração arbitrária $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de Q. Para $0 \leq k \leq n$, dizemos que $c : q_i \xrightarrow{s} q_j$ é um k-passeio se para toda fatoração $q_i \xrightarrow{s_1} q_\ell \xrightarrow{s_2} q_j$ de c, $s_1 \neq 1 \neq s_2$ implica que $\ell \leq k$. Sejam, para $1 \leq i, j \leq n$ e $0 \leq k \leq n$,
$$A_{ij}^{(k)} = \{s \in \Sigma^* \mid \text{existe um } k\text{-passeio } q_i \xrightarrow{s} q_j\}.$$
Mostre que para $1 \leq i, j \leq n$ e $0 < k \leq n$,
$$A_{ij}^{(0)} = \{\sigma \in \Sigma \mid q_j \in q_i(\sigma\alpha)\}$$
e
$$A_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k-1)} \cup A_{ik}^{(k-1)} (A_{kk}^{(k-1)})^* A_{kj}.$$
Conclua que $A_{ij}^{(k)}$ é um subconjunto racional de Σ^*, para $1 \leq i, j \leq n$ e $0 \leq k \leq n$. Como
$$|\mathscr{A}| = \bigcup_{\substack{q_i \in I \\ q_j \in F}} A_{ij}^{(n)},$$
conclua que $|\mathscr{A}|$ é racional.

13. Mostre que um subconjunto A de Σ^* é reconhecível sse existe um monóide finito M e um morfismo $\beta : \Sigma^* \to M$, tais que $A\beta\beta^{-1} = A$.

14. Calcule o monóide sintático de $(\sigma\tau)^*$ e de $(\sigma\tau \cup \tau\sigma)^*$.

15. Calcule o monóide sintático de $A = \{\sigma^n\tau^n \mid n \geq 0\}$. Conclua que A não é racional. Confronte com o Exercício 24.

16. Sejam $\mathscr{A}_i = (Q_i, \Sigma_i, \alpha_i, I_i, F_i)$ autômatos para $i = 1, 2$. Dizemos que $\mathscr{A}_1$ é um *subautômato* de $\mathscr{A}_2$ se

$$Q_1 \subseteq Q_2,\ \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2,\ I_1 \subseteq I_2,\ F_1 \subseteq F_2$$

e para todo σ em Σ_1, $\sigma\alpha_1 \subseteq \sigma\alpha_2$. Mostre que se $\mathscr{A}_1$ for um subautômato de $\mathscr{A}_2$, então $|\mathscr{A}_1| \subseteq |\mathscr{A}_2|$.

17. Um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ é *conexo* se para todo q em Q existe um s em Σ^*, tal que $q \in I(s\alpha)$. Mostre que todo autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ tem um único subautômato conexo maximal. Este subautômato é chamado de *parte conexa* de $\mathscr{A}$. Mostre que a parte conexa de $\mathscr{A}$ é o autômato $\mathscr{A}_c = (Q_c, \Sigma, \alpha_c, I, F \cap Q_c)$, onde

$$Q_c = \{q \in Q \mid \text{existe } s \in \Sigma^* \text{ tal que } q \in I(s\alpha)\}$$

e para todo σ em Σ, $\sigma\alpha_c = \sigma\alpha \cap (Q_c \times Q_c)$. Mostre ainda que $|\mathscr{A}| = |\mathscr{A}_c|$.

18. Baseando-se nas idéias do Teorema C.I.1 dê um algoritmo para achar a parte conexa de um autômato dado.

19. Um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ é *fortemente conexo* se para todo par (q_1, q_2) de estados de $\mathscr{A}$ existe s em Σ^*, tal que $(q_1, q_2) \in s\alpha$. Mostre que todo autômato determinístico $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, i, F)$ contém um subautômato fortemente conexo $\mathscr{A}' = (Q', \Sigma, \alpha', I', F')$, no qual $\sigma\alpha'$ é não vazio para todo σ em Σ.

20. Sejam $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ autômatos determinísticos, e sejam n_1, n_2 e n o número de estados da parte conexa de $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ e $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$, respectivamente. Mostre que $n \geq \max\{n_1, n_2\}$.

21. Mostre que todo subconjunto reconhecível de Σ^* é o comportamento de infinitos autômatos conexos.
Sugestão: Use o Exercício 20.

22. Seja $\mathscr{A}$ um autômato com n estados. Mostre que toda palavra $s \in |\mathscr{A}|$ de comprimento pelo menos n tem uma fatoração $s = uvw$, tal que $1 \leq |v| \leq n$, e $uv^*w \subseteq |\mathscr{A}|$.

23. Usando o Exercício 22, mostre que o comportamento de um autômato dado $\mathscr{A}$, com n estados, é infinito sse existe uma palavra s em $|\mathscr{A}|$ tal que $n \leq |s| < 2n$.

24. Para $\sigma \in \Sigma$ e $s \in \Sigma^*$, $|s|_\sigma$ denota o número de ocorrências da letra σ na palavra s.
Usando o Exercício 22, mostre que os subconjuntos seguintes de Σ^* não são reconhecíveis ($\Sigma = \{\sigma, \tau\}$):

(i) $\{\sigma^n\tau^n \mid n \geq 0\}$,
(ii) $\{s \in \Sigma^* \mid |s|_\sigma = |s|_\tau\}$,

(iii) $\{s \in \Sigma^* \mid s = s\rho\}$,
(iv) $\{\sigma^{n^2} \mid n \geq 0\}$,
(v) $\{s^2 \mid s \in \Sigma^*\}$.

25. Um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ é *normalizado* se I e F são unitários, $I \neq F$ e nenhuma aresta de $\mathscr{A}$ tem término em I, ou origem em F. Mostre que se A for um conjunto reconhecível, então $A\backslash 1$ é o comportamento de algum autômato normalizado. Dados autômatos normalizados $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$, construa autômatos com comportamento $|\mathscr{A}_1| \cup |\mathscr{A}_2|$, $|\mathscr{A}_1|\,|\mathscr{A}_2|$ e $|\mathscr{A}_1|^*$.

26. Mostre que um subconjunto A de Σ^* é reconhecível sse o conjunto

$$\{s^{-1}A \mid s \in \Sigma^*\}$$

é finito (veja o Exercício I.66). Mostre mais uma vez que o subconjunto $\{\sigma^n\tau^n \mid n \geq 0\}$ de $\{\sigma, \tau\}^*$ não é reconhecível.

27. Seja B o semianel booleano, isto é B tem suporte $B = \{0, 1\}$ e é munido das operações $+$ e $\cdot$, onde

$$0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0,$$

e

$$1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Para um natural $n \geq 1$, seja M_nB o monóide cujo suporte é o conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes em B, munido da operação de multiplicação de matrizes. Mostre que os monóides ***Rel* n** e M_nB são isomorfos. Conclua que o monóide $M_{\mathscr{A}}$ de um autômato $\mathscr{A}$ é isomorfo a um submonóide de M_nB, onde n é a cardinalidade do conjunto de estados de A. (Confronte com o Exercício B.III.24.)

28. Um autômato $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \alpha, I, F)$ é *não-ambíguo* se para tódo s em Σ^* $\mathscr{A}$ tem no máximo um passeio com origem em I, término em F e rótulo s. Mostre que existe um algoritmo para decidir se um autômato dado é ambíguo ou não.

29. Mostre que para todo subconjunto A de σ^*, A^* é reconhecível. Sugestão: Se n e m são naturais, tais que $0 \leq m < n$ e σ^n pertence a A, então $A \cap \{\sigma^p \mid p \equiv m \ (mod\, n)\}$ é reconhecível.

30. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros, munido da operação de soma. Seja ainda $h : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ a extensão a um morfismo da função $h_1 : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$, onde $\Sigma = \{\sigma, \tau\}$, $\sigma h_1 = 1$ e $\tau h_1 = -1$. Mostre que

$sh = |s|_\sigma - |s|_\tau$ (veja Exercício 24 para a notação). Para um natural n definimos

$$D_n = \{s \in \Sigma^* \mid sh = 0 \text{ e para toda fatoração } s = s_1 s_2 \text{ de } s,\ 0 \leq s_1 h \leq n\}.$$

Colocamos também

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Mostre que para todo n D_n é reconhecível, mas D não é reconhecível.

31. Mostre que $Rec\ \Sigma$ é fechado sob reversão (veja Exercício I.67).
32. Dê uma construção que associa a um autômato $\mathscr{A}$ uma máquina de Turing não determinística M que não utiliza as suas fitas de trabalho e que reconhece o comportamento de $\mathscr{A}$ (veja Capítulo B.I).

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

Autômatos finitos foram introduzidos na segunda metade da década de 1950. Os trabalhos pioneiros na área são de Kleene, Moore e Myhill. Alguns destes estão reimpressos no livro de Moore [85]. Entre os trabalhos da época recomendamos em especial a leitura da exposição muito lúcida de Rabin e Scott [99]. Posteriormente, a teoria foi substancialmente enriquecida por vários autores, entre os quais Brzozowski, McNaughton, Rhodes e Schützenberger.

O Teorema de Kleene apareceu originalmente em [59]. A Proposição 9 aparece no trabalho de Rabin e Scott, onde é creditado a J. R. Myhill.

Indicamos a seguir alguns livros sobre a Teoria dos Autômatos. Um tratamento mais elementar pode ser encontrado nos livros de Ginzburg [36], Harrison [51], [52], Minsky [83], Salomaa [104] e Veloso [124]. Um estudo completo e profundo da teoria encontra-se nos livros de Eilenberg [25], [26]. Aspectos combinatórios relativos à Teoria dos Autômatos são abordados no texto de Schützenberger [109].