CAPÍTULO VI

GRAFOS ORIENTADOS

1. Introdução

Neste capítulo introduzimos grafos orientados, como sendo aqueles em que a cada aresta é dada uma "direção". Desta forma falaremos de cortes e circuitos orientados, como sendo aqueles em que todas as arestas tem a mesma "direção". O Teorema da dicotomia, da Secção 2, afirma que as arestas de um grafo orientado são de dois tipos: aquelas que pertencem a cortes orientados e aquelas pelas quais passam circuitos orientados, cada caso excluindo o outro. Na Seção 3, estudaremos os grafos fortemente conexos. Na Seção 4, os grafos acíclicos.

Uma *orientação* de um grafo G é um par ordenado (i, f) de funções, ambas de aG em VG, tais que para cada aresta α em aG, $i\alpha$ e $f\alpha$ são os extremos de α em G: $i\alpha$ é o *extremo inicial* de α e $f\alpha$ o *extremo final* de α. Um *grafo orientado D* consiste de um grafo GD, chamado de *grafo subjacente* de D, e de uma orientação de GD.

Na representação de um grafo orientado por um diagrama, colocamos, em cada aresta α, uma flecha que aponta de $i\alpha$ para $f\alpha$. Assim, no grafo orientado da Figura 1, v_1 é o extremo inicial das arestas α_1 e α_2 e é o extremo final de α_1, α_5 e α_7.

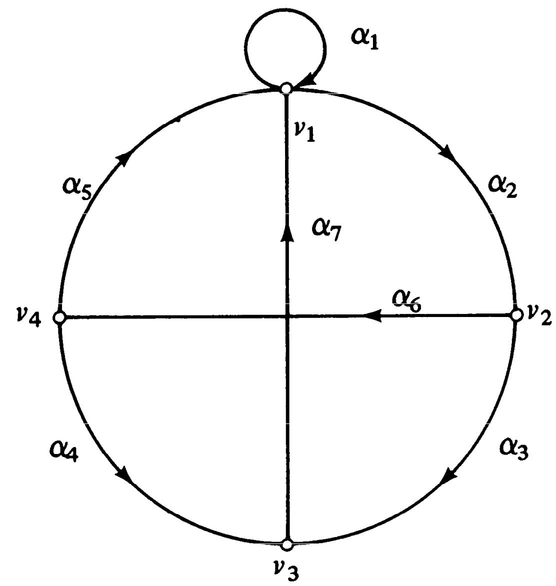


Figura 1 — Um grafo orientado.

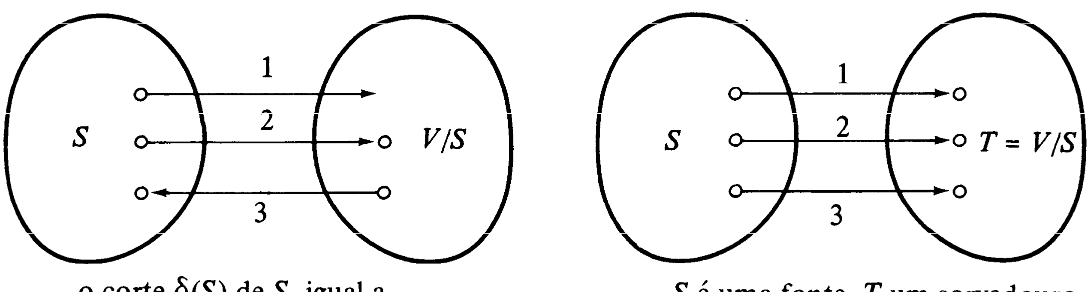
No que segue, ao aplicarmos um conceito ou propriedade, definido para grafos (não orientados) a um grafo orientado, subentendemos que estamos aplicando o conceito ou propriedade ao seu grafo subjacente. Assim podemos dizer que um grafo orientado é conexo, ou que P é um passeio num grafo orientado, etc.

Seja D um grafo orientado, (i, f) sua orientação. Para um subconjunto X de V, o *subgrafo orientado* $D[X]$ *gerado* por X é o grafo orientado que tem $GD[X]$ como grafo subjacente e (i_X, f_X) como orientação, onde $i_X\alpha = i\alpha$ e $f_X\alpha = f\alpha$, para cada aresta α de $GD[X]$.

Um passeio $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_k, v_k)$ em D é *orientado* se para todo j tal que $1 \leq j \leq k$, $i\alpha_j = v_{j-1}$ (ou de maneira equivalente, $f\alpha_j = v_j$). O circuito $(v_1, \alpha_2, v_2, \alpha_6, v_4, \alpha_4, v_3, \alpha_7, v_1)$ no grafo orientado da Figura 1 é orientado.

Definimos a seguir duas relações sobre V. A primeira é a *relação de acesso*, denotada por $\rightarrow_D$ (ou simplesmente, $\rightarrow$ se D for subentendido): *u tem acesso* a v em D ($u \rightarrow v$) se existe um caminho orientado de u a v em D. A segunda é a *relação de ligação forte*, denotada por $\leftrightarrow_D$ (ou simplesmente, $\leftrightarrow$ se D for subentendido): u é *fortemente ligado* a v em D ($u \leftrightarrow v$) se $u \rightarrow v$ e $v \rightarrow u$. Naturalmente, a relação de acesso é reflexiva e transitiva, e a de ligação forte é de equivalência. Em vista da simetria da relação de ligação forte, dizemos simplesmente que u e v são *fortemente ligados* em D quando u é fortemente ligado a v em D.

Considere o corte $\delta(S)$ associado a um subconjunto S de V; se todas as arestas de $\delta(S)$ têm seu extremo inicial (final) em S então S é uma *fonte* (*sorvedouro*) e em ambos os casos o corte $\delta(S)$ de S é *orientado*. Um subconjunto d de a é um *corte orientado* se existe um subconjunto S de V tal que o corte $\delta(S)$ de S é orientado e igual a d. A Figura 2 ilustra esses conceitos.



o corte $\delta(S)$ de S igual a $\{1, 2, 3\}$.

S é uma fonte, T um sorvedouro, $\delta(S) = \delta(T)$ é orientado, $\{1, 2, 3\}$ é um corte orientado.

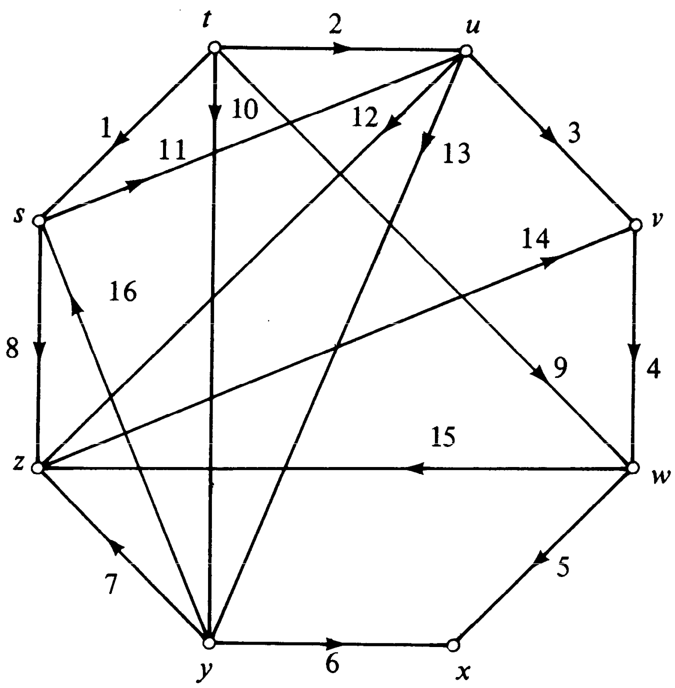
Figura 2

2. O Teorema da dicotomia

Para D um grafo orientado, seja *cir* D o conjunto das arestas de D pelas quais passam circuitos orientados; seja *cor* D o conjunto das arestas de D que pertencem a cortes orientados.

TEOREMA 1 (Teorema da dicotomia). *Seja D um grafo orientado. Então a união de cir D e cor D é aD, sua interseção o vazio.* (*Ou seja, toda aresta de D pertence a um circuito orientado, ou a um corte orientado, mas não a ambos.*)

A título de ilustração, verificamos o Teorema 1 para o grafo orientado da Figura 3.



$$C_1 = (s, 11, u, 13, y, 16, s)$$
$$C_2 = (v, 4, w, 15, z, 14, v)$$
$$\delta(\{x\}) = \{5, 6\}$$
$$\delta(\{v, w, x, z\}) = \{3, 6, 7, 8, 9, 12\}$$
$$\delta(\{t\}) = \{1, 2, 9, 10\}$$

Figura 3 — Uma ilustração do Teorema da dicotomia.

Demonstração do Teorema 1. Seja α uma aresta de D, considere as seguintes afirmações:

(i) $\alpha \in cor\ D$,

(ii) existe em D um sorvedouro que contém $f\alpha$ mas não $i\alpha$,

(iii) $f\alpha \not\rightarrow i\alpha$,

(iv) $\alpha \notin cir\ D$.

A equivalência de (i) e (ii) é imediata. As equivalências de (ii) e (iii), e de (iii) e (iv) seguem dos Lemas 2 e 1, abaixo, respectivamente. Assim, (i) e (iv) são equivalentes, o que mostra o teorema.

LEMA 1. *Seja D um grafo orientado, α uma aresta de D. Então $f\alpha \rightarrow i\alpha$ se e somente se $\alpha \in$ cir D.*

LEMA 2. *Seja D um grafo orientado, u e v vértices de D. Então $u \rightarrow v$ se e somente se todo sorvedouro que contém u contém também v.*

Demonstração do Lema 1. Se C é um circuito orientado que passa por α então existem seções C_1 e C_2 de C tais que $C = C_1(i\alpha, \alpha, f\alpha)C_2$; nesse caso, C_2C_1 é um caminho orientado de $f\alpha$ a $i\alpha$ e portanto $f\alpha \rightarrow i\alpha$.

Por outro lado, se $C = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ é um caminho orientado de $f\alpha$ a $i\alpha$ em D então $C(i\alpha, \alpha, f\alpha)$ é um circuito orientado que passa por α, pois para todo inteiro j tal que $1 \leq j \leq n$, temos que $v_0 \neq v_j$, ou seja $f\alpha \neq f\alpha_j$ e portanto $\alpha \notin aC$. A demonstração do lema está completa. ■

Demonstração do Lema 2. Suponha que $u \rightarrow v$, seja S um sorvedouro que contém u, $C = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ um caminho orientado de u a v em D. Como $v_0 = u$, então $v_0 \in S$. Como S é um sorvedouro, então, para todo j tal que $0 < j < n$, se v_{j-1} pertence a S então $v_j \in S$. Segue, por indução, que $VC \subseteq S$. Em particular, $v_n \in S$. Ou seja, $v \in S$. De fato, se $u \rightarrow v$ então todo sorvedouro que contém u contém v também.

Suponha agora que todo sorvedouro que contém u contém v também. Seja S o conjunto dos vértices a que u tem acesso. Para toda aresta α tal que $i\alpha \in S$, temos que $u \rightarrow i\alpha$ e $i\alpha \rightarrow f\alpha$, portanto $u \rightarrow f\alpha$, ou seja, $f\alpha \in S$; S é então um sorvedouro. Como $u \rightarrow u$, então $u \in S$ e portanto $v \in S$. Ou seja, $u \rightarrow v$. De fato, se todo sorvedouro que contém u contém v então $u \rightarrow v$. A demonstração do lema completa a do Teorema 1. ■ ■

O leitor atento notará a semelhança entre a demonstração do Lema 2 e as dos Lemas I.1 e I.2.

3. Grafos fortemente conexos

Conforme foi visto na Seção 1, a relação de ligação forte é de equivalência. Seja p a partição de V que consiste das classes de equivalência da relação de ligação forte em um grafo orientado D. Para cada elemento X de p, $D[X]$ é um *componente forte* de D. O conjunto cfD dos componentes fortes de D é então igual a $\{D[X] \mid X \in p\}$. A Figura 4 mostra os componentes fortes de um grafo D. Um grafo orientado D é *fortemente conexo* se quaisquer dois de seus vértices são fortemente ligados. O grafo da Figura 1 é fortemente conexo.

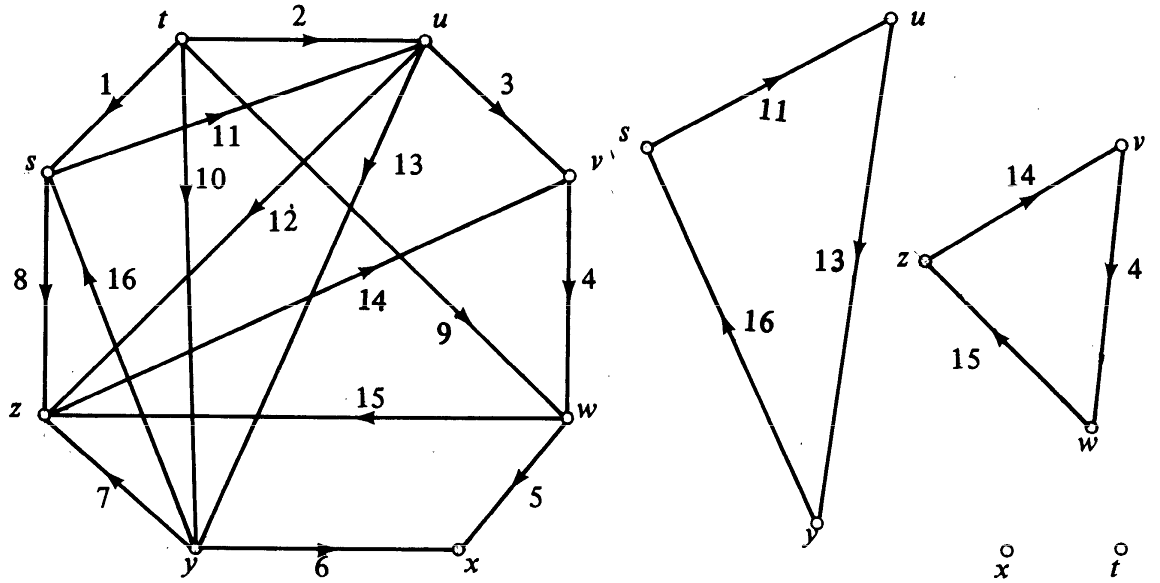


Figura 4 — Os 4 componentes fortes do grafo orientado da Figura 3.

Caracterizamos agora os grafos fortemente conexos:

TEOREMA 2. *Seja D um grafo orientado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *D é fortemente conexo,*

(ii) *D é conexo e $cir\ D = aD$,*

(iii) *D é conexo e $cor\ D = \varnothing$,*

(iv) *VD e o vazio são os únicos sorvedouros em D.*

Demonstração. Para mostrar que (i) implica (ii), suponha que D é fortemente conexo. Então D é certamente conexo. Ademais, para cada aresta α de D, $f\alpha \to i\alpha$ e portanto $\alpha \in cir\ D$, pelo Lema 1. De fato, (i) implica (ii).

Pelo Teorema da dicotomia, (ii) implica (iii).

Para mostrar que (iii) implica (iv), suponha que (iii) vale, seja S um subconjunto próprio e não vazio de V. Como D é conexo, então o corte $\delta(S)$ não é vazio, pelo Corolário I.2. Como $cor\ D = \varnothing$ então $\delta(S)$ não é orientado. Portanto, S não é um sorvedouro. De fato, (iii) implica (iv).

Finalmente, (iv) implica (i), pelo Lema 2. A demonstração do teorema está completa. ■

Uma orientação de um grafo é *fortemente conexa* se o grafo orientado resultante for fortemente conexo.

TEOREMA 3. *Um grafo G admite uma orientação fortemente conexa se e somente se G é conexo e não tem arestas de corte.*

Demonstração. Suponha inicialmente que G admite uma orientação fortemente conexa, D. Pelos itens (i) e (iii) do Teorema 2, D é conexo e $cor\ D = \emptyset$. O grafo G não tem arestas de corte pois se uma aresta, α, fosse de corte, então $\{\alpha\}$ seria um corte orientado, qualquer que fosse a orientação de G.

Reciprocamente, suponha que G é conexo e não tem arestas de corte. Dentre os grafos orientados que têm G como grafo subjacente, escolha um, D, tal que $cor\ D$ seja minimal. Pelos itens (ii) e (iii) do Teorema 2, basta agora provar que $cor\ D = \emptyset$.

Para tanto, suponha o contrário, seja α uma aresta em $cor\ D$. Como α não é de corte, então, pelo Teorema I.3, existe em D um circuito, C, que passa por α. Altere a orientação de algumas arestas em aC, obtendo então um novo grafo orientado, D', de forma que C seja orientado em D'. Assim, $aC \subseteq cir\ D'$. Pelo Teorema da dicotomia,

$$cor\ D' \subseteq aD \backslash aC. \tag{1}$$

Provamos em seguida que $cor\ D'$ é um subconjunto próprio de $cor\ D$. De fato, seja S um sorvedouro em D'; de (1), $\delta D'(S) \subseteq aD \backslash aC$. Portanto, S é um sorvedouro em D, pois não foi alterada a orientação de arestas em $aD \backslash aC$. Logo, $cor\ D' \subseteq cor\ D \backslash aC$. Como α pertence tanto a $cor\ D$ como a aC, então $cor\ D'$ é um subconjunto próprio de $cor\ D$, em contradição à escolha de D. De fato, $cor\ D$ é vazio. A demonstração do Teorema 3 está completa. ■

4. Grafos acíclicos

Um grafo orientado D é *acíclico* se não existe em D circuito orientado. O próximo resultado mostra como se obtém um grafo acíclico de um grafo orientado D, mediante a contração de cada componente forte a um vértice.

Seja D um grafo orientado, (i, f) sua orientação. A *função de condensação* g de D é a função de VD em cfD que associa a cada vértice v de D o componente forte de D da qual v é um vértice. Para cada subconjunto X de V, gX denota o conjunto $\{gv \mid v \in X\}$. A *condensação* CD de D é o grafo orientado tal que cfD é o conjunto de vértices de CD, $cor\ D$ o conjunto de arestas de CD, e para cada aresta α em aCD, o extremo inicial de α em CD é $gi\alpha$, seu extremo final $gf\alpha$.

TEOREMA 4. *A condensação CD de um grafo orientado D é acíclica.*

Demonstração. Seja S um sorvedouro em D. Temos então:

(1) Para cada vértice v em V, v pertence a S se e somente se gv pertence a gS.

Obviamente, se v pertence a S, então gv pertence a gS. Por outro lado, se gv pertence a gS então para algum vértice u fortemente ligado a v em D, u pertence a S; nesse caso, pelo Lema 2, v pertence a S.

De (1), seguem imediatamente as seguintes afirmações:

(2) O conjunto gS é um sorvedouro em CD.

(3) O corte de gS em CD é igual ao corte de S em D.

De (2) e (3), temos então que todo corte orientado em D é um corte orientado em CD. Portanto,

$$cor\ D \subseteq cor\ CD \subseteq aCD = cor\ D.$$

Ou seja, $cor\ CD = aCD$. Pelo Teorema da dicotomia, CD é acíclico. A demonstração do teorema está completa. ■

Damos a seguir caracterizações de grafos acíclicos.

Uma *classificação* de um grafo orientado D é uma função h de V em $\mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais. A classificação h é *consistente* se $hi\alpha < hf\alpha$ para toda aresta α de D. Uma aresta α é uma *inversão* em relação a h se $hi\alpha \geq hf\alpha$. Assim, h é consistente se nenhuma aresta em D é uma inversão em relação a h.

TEOREMA 5. *Seja D um grafo orientado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *D é acíclico,*

(ii) *$cor\ D = aD$,*

(iii) *D admite uma classificação (injetora) consistente,*

(iv) *D não tem laços e a relação de acesso é uma ordem parcial sobre VD (isto é, $\rightarrow$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva).*

A Figura 5 mostra um grafo orientado acíclico D e uma classificação injetora consistente de D.

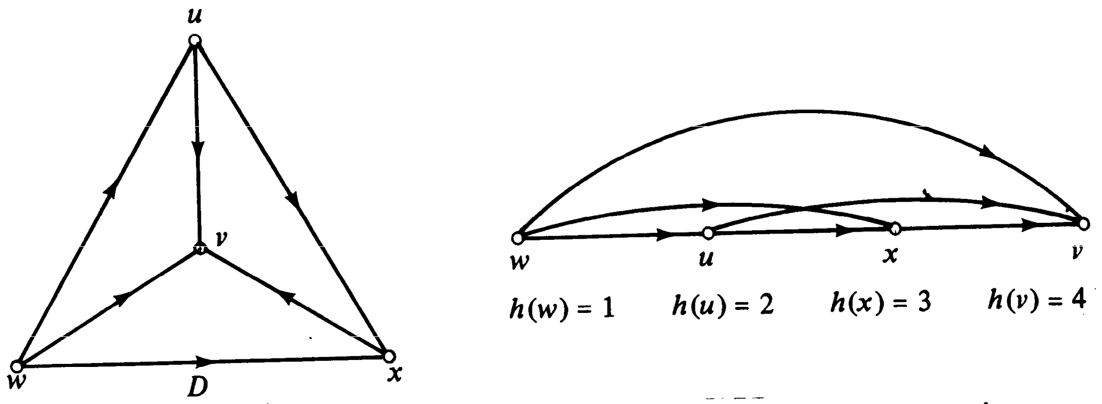


Figura 5 — Um grafo acíclico D e uma classificação h de D injetora e consistente.

Demonstração do Teorema 5. A equivalência de (i) e (ii) segue do Teorema da dicotomia.

Provemos agora que (i) implica (iii), por indução em $|VD|$. Se VD for vazio então (iii) é trivialmente válida. Suponha pois que VD não é vazio. Para cada vértice v em VD, seja Sv o conjunto dos vértices a que v tem acesso. Dentre os vértices de D, escolha um, v, tal que Sv seja minimal.

LEMA 3. *Nenhuma aresta de D tem v como extremo inicial.*

Demonstração. Seja α uma aresta de D. Como $i\alpha \to f\alpha$, então $Sf\alpha \subseteq Si\alpha$. Como D é acíclico, então, pelo Lema 1, $f\alpha \not\to i\alpha$. Portanto, $Sf\alpha \subseteq Si\alpha \backslash \{i\alpha\} \subsetneq Si\alpha$. Ou seja, $Si\alpha$ não é minimal. Como esta conclusão vale para toda aresta α de D, então, pela definição de v, nenhuma aresta de D tem v como extremo inicial. A demonstração do lema está completa. ∎

Seja D' o grafo $D[V\backslash\{v\}]$. Como D é acíclico, D' também é acíclico. Por indução, D' admite uma classificação injetora consistente, digamos, h'.

Seja h a extensão de h' a VD tal que $hv = 1 + max\{h'u \mid u \in VD'\}$. Certamente h é uma classificação injetora de D. Para verificar que h é consistente, seja α uma aresta de aD. Se α pertence a aD' então $hi\alpha = h'i\alpha < h'f\alpha = hf\alpha$; se α pertence a $aD\backslash aD'$ então, pelo Lema 3, $i\alpha \in VD'$ e $f\alpha = v$, portanto $hi\alpha = h'i\alpha < hv = hf\alpha$. Em ambos os casos, $hi\alpha < hf\alpha$. De fato, h é uma classificação injetora consistente, de D.

Para provar que (iii) implica (iv), seja h uma classificação consistente de D. Para toda aresta α de D, $hf\alpha > hi\alpha$ e portanto $f\alpha \neq i\alpha$; logo, D não tem laços. Como $\to$ é reflexiva e transitiva independentemente de (iii) valer ou não, resta então mostrar que $\rightarrow$ é anti-simétrica. Para tanto, seja $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ um passeio orientado e não degenerado. Como h é consistente, então $hv_j < hv_{j+1}$, para todo j tal que $0 \leq j \leq n - 1$. Como P é não degenerado, então $hv_0 < hv_n$. Portanto, se u e v são vértices distintos em D e $u \rightarrow v$ então $hu < hv$; consequentemente, $u \leftrightarrow v$ se e somente se $u = v$. De fato, (iii) implica (iv).

Para mostrar que (iv) implica (i), seja α uma aresta de D; como D não tem laços, então $i\alpha \neq f\alpha$; como $\rightarrow$ é anti-simétrica e $i\alpha \rightarrow f\alpha$, então $f\alpha \not\rightarrow i\alpha$: pelo Lema 1, $\alpha \notin cir\ D$. De fato, (iv) implica (i).

A demonstração do teorema está completa. ■

Uma orientação de um grafo é *acíclica* se o grafo orientado resultante for acíclico.

COROLÁRIO 1. *Um grafo G admite uma orientação acíclica se e somente se G não tem laços.*

Um vértice v de um grafo orientado D é um *vértice-fonte* de D (*vértice-sorvedouro* de D) se nenhuma aresta de D tem v como seu extremo final (inicial).

COROLÁRIO 2. *Todo grafo orientado acíclico e não vazio tem um vértice-fonte e um vértice-sorvedouro.*

EXERCÍCIOS

1. Mostre que um passeio orientado de comprimento mínimo de u a v em D é um caminho (orientado). O comprimento desse caminho é a *distância orientada* de u a v em D.
2. Mostre que existe um passeio orientado de u a v se e somente se existe um caminho orientado de u a v.
3. Mostre que o passeio orientado, fechado e não degenerado $C = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ é um circuito (orientado) se e somente se $v_1, \ldots, v_n$ forem dois a dois distintos. Confronte esta afirmação com aquela do Exercício I.47.
4. Mostre que se P é um passeio orientado fechado então para cada aresta α em aP existe um circuito orientado que passa por α. Mostre que a versão não orientada desta afirmação é falsa.
5. Escreva versões orientadas do Teorema I.1 e do procedimento *distância* da Seção I.6. Modifique o algoritmo assim obtido de

forma a obter outro que determine um caminho orientado de comprimento mínimo entre dois vértices dados. Escreva um algoritmo que determina os componentes fortes de um grafo orientado.

6. Escreva um algoritmo que determina um circuito orientado de comprimento mínimo em um grafo orientado.
7. Mostre que D não vazio é fortemente conexo se e somente se existe um passeio orientado e fechado P em D tal que $V = VP$. Mostre que a afirmação não é necessariamente verdadeira se substituirmos "passeio" por "trilha".
8. (*Generalização do Lema* 1) – Seja P um passeio orientado em um grafo orientado D, u a origem de P, v seu término. Mostre que $v \rightarrow u$ se e somente se $aP \subseteq cir\ D$.
9. Ache um grafo orientado D, um subconjunto d de a e um subconjunto S de V tais que o corte $\delta(S)$ de S não é orientado, $d = \delta(S)$ e d é um corte orientado.
10. Ache um grafo orientado D com 6 vértices tal que $aD = cor\ D = cir\ D$.
11. Prove que para um grafo orientado D, as afirmações seguintes são equivalentes:
    (i) H é um componente forte de D,
    (ii) H é um componente forte de $D - cor\ D$,
    (iii) H é um componente de $D - cor\ D$.
12. Prove que para um grafo orientado D as afirmações abaixo são equivalentes:
    (i) Cada componente de D é fortemente conexo,
    (ii) $cir\ D = aD$,
    (iii) $cor\ D = \emptyset$,
    (iv) A relação de acesso é de equivalência,
    (v) O conjunto vazio é o único corte orientado em D.
13. Prove que para um grafo orientado D as afirmações abaixo são equivalentes:
    (i) D é acíclico,
    (ii) cada componente forte de D consiste de um só vértice e não possui arestas,
    (iii) GD e GCD são isomorfos.
14. Seja D um grafo orientado acíclico e C um caminho orientado de comprimento máximo em D. Mostre que a origem (término) de C é um vértice-fonte (vértice-sorvedouro) de D.

15. Escreva um algoritmo eficiente que para um dado grafo orientado não vazio encontra um vértice-sorvedouro ou um circuito orientado.
16. Escreva um algoritmo eficiente que determina se um grafo orientado D é acíclico ou não; em caso afirmativo o algoritmo produz uma classificação consistente de D, em caso negativo o algoritmo produz um circuito orientado em D. Modifique o algoritmo assim obtido de forma a obter outro que determine os componentes fortes de um grafo orientado.
17. Escreva um algoritmo eficiente que encontra um caminho orientado de comprimento máximo num grafo acíclico.
18. Escreva um algoritmo que encontra um caminho orientado de comprimento máximo num grafo orientado. Este seu algoritmo é eficiente?
19. Seja D um grafo acíclico e não vazio. Um caminho orientado C em D é *crítico* se nenhum caminho orientado em D tem comprimento maior do que o de C. Mostre que uma coleção mínima de cortes orientados cuja união é aD tem cardinalidade igual ao comprimento de um caminho crítico em D.
20. Seja G um grafo. Mostre que existe uma coloração dos vértices de G com não mais do que s cores se e somente se existe uma orientação de G na qual todo passeio orientado tem comprimento menor do que s.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

Os resultados deste capítulo fazem parte do folclore da Teoria dos Grafos. Maiores informações sobre grafos orientados podem ser encontrados em [13], [50] e [110].

Pelo Teorema 5, os grafos que não são acíclicos não admitem uma classificação consistente. Dizemos, assim, que uma classificação g de D é *ótima* se o número de arestas de D que são inversões com relação a g é o menor possível. Sabe-se que a determinação de uma classificação ótima para D é um problema $\mathcal{NP}$-m-completo [57]. (Veja o Capítulo B.IV.) No entanto, no caso particular em que o grafo D é planar existe um algoritmo eficiente para encontrar uma classificação ótima para D [69]. Observamos ainda que a determinação de uma classificação consistente para um grafo acíclico também é conhecida como o "problema da classificação topológica" [60].