CAPÍTULO V

O TEOREMA DE RAMSEY E SUAS APLICAÇÕES

1. Introdução

Numa festa com seis participantes existem três que conhecem-se dois a dois ou existem três que desconhecem-se dois a dois.

A afirmação acima é um corolário de um teorema de F.P. Ramsey que será visto na Seção 2. Nas Seções 3 e 4 damos algumas aplicações do Teorema de Ramsey à Teoria dos Grafos, bem como a outras áreas da Matemática. Antes, porém, é instrutivo provar a afirmação inicial, pois a sua demonstração, apesar de muito simples, ilustra bem as idéias básicas na demonstração do Teorema de Ramsey.

Inicialmente, reformulamos a afirmação dada, usando agora a linguagem da Teoria dos Grafos. A uma dada festa, com participantes $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$, associamos um grafo completo G com conjunto de vértices P. Para $p_i \neq p_j$, colorimos a aresta de G, com extremos p_i e p_j, de vermelho ou de azul, conforme os participantes p_i e p_j se conheçam ou não. Resulta que três participantes p_i, p_j e p_k conhecem-se dois a dois (desconhecem-se dois a dois) se e somente se as arestas do triângulo $G[p_i, p_j, p_k]$ são todas vermelhas (todas azuis). Assim a afirmação dada é equivalente à proposição que segue.

PROPOSIÇÃO 1. *Para qualquer coloração, em vermelho e azul, das arestas de um grafo completo com seis vértices, este contém um triângulo vermelho ou um triângulo azul.*

Demonstração. Seja G o grafo completo cujas arestas foram coloridas, e seja v um vértice de G. Como v é incidente a cinco arestas, pelo menos três destas são vermelhas ou pelo menos três são azuis. Suponhamos o primeiro caso, e sejam α_1, α_2 e α_3 três arestas vermelhas incidentes a v. Sejam u_1, u_2 e u_3 os outros extremos destas arestas.

Se alguma aresta de $G[u_1, u_2, u_3]$ for vermelha, digamos aquela com extremos u_i e u_j, então o triângulo $G[v, u_i, u_j]$ é vermelho. Caso contrário, o triângulo $G[u_1, u_2, u_3]$ é azul. (Veja a Figura 1.)

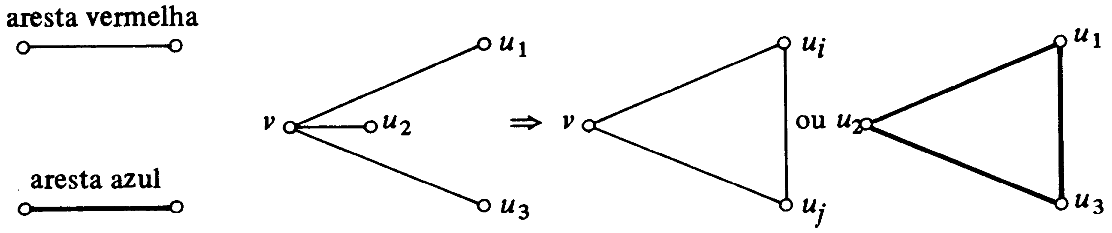


Figura 1 — Ilustração para a Proposição 1.

O caso em que v é incidente a pelo menos três arestas azuis é tratado analogamente. ■

Observamos que as arestas de um grafo completo G com cinco vértices podem ser coloridas de forma que G não tenha nem triângulos vermelhos, nem triângulos azuis, conforme mostra a Figura 2.

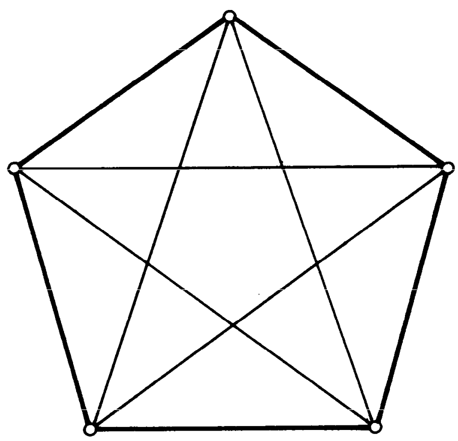


Figura 2 — Uma coloração de arestas sem triângulos monocromáticos.

2. O Teorema de Ramsey

Para um natural k, um *k-conjunto* é um conjunto (finito) de cardinalidade k. Um *k-subconjunto* de um conjunto A é um subconjunto de A, cuja cardinalidade é k. Denotamos por $\mathfrak{p}_k A$ o conjunto dos k-subconjuntos de A, isto é

$$\mathfrak{p}_k A = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}.$$

Por uma *partição* de um conjunto A em *n blocos* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, entendemos que os blocos são subconjuntos de A, dois a dois disjuntos, e cuja união é A. Note que permitimos que alguns dos blocos sejam vazios.

TEOREMA 1 (Ramsey). *Dados naturais n, m e k tais que $m \geq k \geq 1$ e $n \geq 2$, existe um natural $\ell = R(n, m, k)$, tal que dados um ℓ-conjunto X e uma partição de $\mathfrak{p}_k X$ em n blocos B_1, B_2, ..., B_n, existem um bloco B_i e um m-subconjunto Y de X, tais que $\mathfrak{p}_k Y \subseteq B_i$.*

Já que o enunciado do teorema acima é um pouco complicado, damos uma descrição pictórica do processo envolvido. Dado um ℓ-conjunto X, formamos uma lista dos seus k-subconjuntos e colorimos cada um destes com uma de n cores disponíveis. O Teorema 1 afirma que, se ℓ for suficientemente grande, qualquer que seja a coloração, sempre encontraremos um m-subconjunto Y de X, tal que todos os k-subconjuntos de Y têm uma mesma cor.

Para demonstrarmos o Teorema 1, necessitamos de um estudo mais detalhado do caso no qual particionamos os k-subconjuntos de X em apenas dois blocos, isto é, $n = 2$. Este caso pode ser assim enunciado:

TEOREMA 2. *Dados naturais m_1, m_2 e k, tais que $m_1, m_2 \geq k \geq 1$, existe um natural $\ell = S(m_1, m_2, k)$, tal que dados um ℓ-conjunto X e uma partição de $\mathfrak{p}_k X$ em dois blocos B_1 e B_2,*

existe um m_1-subconjunto Y_1 de X, tal que $\mathfrak{p}_k Y_1 \subseteq B_1$,

ou

existe um m_2-subconjunto Y_2 de X, tal que $\mathfrak{p}_k Y_2 \subseteq B_2$.

Antes de demonstrar estes teoremas, apresentamos definições indutivas das funções R e S, cuja existência é afirmada nos Teoremas 1 e 2, respectivamente. Quanto a S, temos:

$$S(m_1, m_2, 1) = m_1 + m_2 - 1 \qquad \text{para } m_1, m_2 \geq 1 \qquad (1)$$
$$S(k, m_2, k) = m_2 \qquad \text{para } m_2 \geq k > 1 \qquad (2)$$
$$S(m_1, k, k) = m_1 \qquad \text{para } m_1 > k > 1 \qquad (3)$$
$$\text{e } S(m_1, m_2, k) = 1 + S(S(m_1 - 1, m_2, k), S(m_1, m_2 - 1, k), k - 1)$$
$$\text{para } m_1, m_2 > k > 1. \qquad (4)$$

Deixamos ao leitor a demonstração de que o valor $S(m_1, m_2, k)$ está bem definido para todo m_1, m_2, k, tais que $m_1, m_2 \geq k \geq 1$ e que

$$S(m_1, m_2, k) = S(m_2, m_1, k) \geq k.$$

Isto pode ser feito por indução em k, e para cada valor de $k > 1$, por indução em $m_1 + m_2$. Note que na prova do Teorema 2 usaremos um esquema de indução análogo a este.

Os valores de $S(m_1, m_2, k)$ são "enormes", mesmo para valores "pequenos" de m_1, m_2 e k. De fato, pode-se demonstrar que a função S cresce mais rapidamente do que qualquer função primitiva recursiva [94]. Aqui nos contentaremos em mostrar que

$$S(5, 5, 3) \simeq 10^{6395},$$

ilustrando ao mesmo tempo a definição de S.

Inicialmente, observamos que, para $m_1, m_2 \geq 2$,

$$S(m_1, m_2, 2) = \binom{m_1 + m_2 - 2}{m_1 - 1} \tag{5}$$

onde o lado direito representa um coeficiente binomial. De fato, de (4) e de (1),

$$\begin{aligned} S(m_1, m_2, 2) &= 1 + S(S(m_1 - 1, m_2, 2), S(m_1, m_2 - 1, 2), 1) = \\ &= S(m_1 - 1, m_2, 2) + S(m_1, m_2 - 1, 2). \end{aligned}$$

Agora (5) segue por indução sobre $m_1 + m_2$, aplicando-se a fórmula

$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1}$$

Temos então:

$$S(5, 5, 3) = 1 + S(S(4, 5, 3), S(5, 4, 3), 2).$$

Torna-se necessário calcular $S(4, 5, 3) = S(5, 4, 3)$:

$$S(4, 5, 3) = 1 + S(S(3, 5, 3), S(4, 4, 3), 2) = 1 + S(5, S(4, 4, 3), 2).$$

Calculando $S(4, 4, 3)$, obtém-se

$$\begin{aligned} S(4, 4, 3) &= 1 + S(S(3, 4, 3), S(4, 3, 3), 2) = \\ &= 1 + S(4, 4, 2) = 1 + \binom{6}{3} = 21. \end{aligned}$$

Assim,

$$S(4, 5, 3) = 1 + \binom{24}{4} = 10627, \text{ e}$$

$$S(5, 5, 3) = 1 + \binom{21252}{10626}$$

Usando-se a aproximação de Stirling:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left[\frac{n}{e}\right]^n,$$

obtém-se

$$S(5, 5, 3) \simeq 10^{6395}.$$

Isto é, para escrevermos o valor exato de $S(5, 5, 3)$ necessitamos de mais de 6 000 algarismos, ou seja pelo menos três páginas deste texto! Recomendamos ao leitor que reflita sobre a estimativa do valor de $S(6, 6, 4)$.

Quanto à função R, temos a definição indutiva:

$$R(2, m, k) = S(m, m, k) \qquad \text{para } m \geq k \geq 1 \tag{6}$$

e

$$R(n, m, k) = S(R(n-1, m, k), m, k) \text{ para } n > 2 \text{ e } m \geq k \geq 1. \tag{7}$$

O leitor não terá dificuldades em verificar que o valor de $R(n, m, k)$ está bem definido para $n \geq 2$ e $m \geq k$. Notamos apenas que

$$R(n, m, 1) = n(m-1) + 1 \text{ para } n \geq 2 \text{ e } m \geq 1. \tag{8}$$

Passemos às demonstrações dos Teoremas 1 e 2.

Demonstração do Teorema 2.. No que segue, consideramos triplas ordenadas de naturais (m_1, m_2, k) com $m_1, m_2 \geq k \geq 1$. Denotamos $S(m_1, m_2, k)$ por ℓ e supomos dados um ℓ-conjunto X e uma partição de $\mathfrak{p}_k X$ em dois blocos B_1 e B_2. A afirmação do teorema estará provada para a tripla (m_1, m_2, k), ao exibirmos um m_1-subconjunto Y_1 de X, tal que $\mathfrak{p}_k Y_1 \subseteq B_1$ ou um m_2-subconjunto Y_2 de X, tal que $\mathfrak{p}_k Y_2 \subseteq B_2$.

Demonstramos o teorema por indução sobre k e chamamos esta indução de externa. Para $k = 1$, $\ell = m_1 + m_2 - 1$ (de (1)), e para todo conjunto Z, podemos identificar $\mathfrak{p}_1 Z$ com Z. Resulta então:

$$|B_1| + |B_2| = |X| = \ell = m_1 + m_2 - 1. \tag{9}$$

Se $|B_1| \geq m_1$, então para qualquer m_1-subconjunto Y_1 de B_1

$$\mathfrak{p}_1 Y_1 = Y_1 \subseteq B_1.$$

Se por outro lado $|B_1| < m_1$, resulta de (9) que $|B_2| \geq m_2$, logo para qualquer m_2-subconjunto Y_2 de B_2,

$$\mathfrak{p}_1 Y_2 = Y_2 \subseteq B_2.$$

Isto prova a base da indução externa.

Quanto ao passo da indução externa, fixamos um valor de $k > 1$ e supomos a afirmação verdadeira para triplas $(m'_1, m'_2, k-1)$. Demonstramos a afirmação para triplas (m_1, m_2, k) por indução sobre $m_1 + m_2$, indução esta que chamamos de interna.

A base da indução interna é dada pelo caso em que $m_1 + m_2 = 2k$. Como $m_1, m_2 \geq k$, segue que $m_1 = m_2 = k$. De (2), temos que $\ell = k$, logo $|\mathfrak{p}_k X| = 1$. Assim B_1 ou B_2 é igual a $\mathfrak{p}_k X$, bastando tomar $Y_1 = X$ ou $Y_2 = X$, respectivamente.

Para ver o passo da indução interna, fixamos uma tripla (m_1, m_2, k), com $m_1 + m_2 > 2k$ e supomos a afirmação ser verdadeira para triplas (m''_1, m''_2, k), com

$$m''_1 + m''_2 < m_1 + m_2.$$

Se $m_1 = k$, então de (2), $\ell = m_2$ e se $B_1 \neq \emptyset$, tomamos qualquer elemento de B_1 para Y_1. Se por outro lado $B_1 = \emptyset$, então $\mathfrak{p}_k X = B_2$, logo $Y_2 = X$ satisfaz a afirmação. Raciocínio análogo resolve o caso em que $m_2 = k$. Finalmente, se $m_1, m_2 > k$, colocamos

$$m'_1 = S(m_1 - 1, m_2, k) \text{ e } m'_2 = S(m_1, m_2 - 1, k),$$

e assim, de (4),

$$\ell = 1 + S(m'_1, m'_2, k-1).$$

Seja x um elemento de X e seja $X' = X \setminus \{x\}$. Então

$$|X'| = S(m'_1, m'_2, k-1). \tag{10}$$

Definimos ainda, para $i = 1, 2$

$$B'_i = \{A \in \mathfrak{p}_{k-1} X' \mid A \cup \{x\} \in B_i\}.$$

B'_1 e B'_2 formam uma partição de $\mathfrak{p}_{k-1} X'$, logo de (10) e da hipótese da indução externa, X' contém

um m'_1-subconjunto Y'_1, com $\mathfrak{p}_{k-1} Y'_1 \subseteq B'_1$,

ou

um m'_2-subconjunto Y'_2, com $\mathfrak{p}_{k-1} Y'_2 \subseteq B'_2$.

É suficiente considerar o primeiro caso, pois demonstração análoga vale para o segundo. Temos então:

$$|Y'_1| = m'_1 \text{ e } \mathfrak{p}_{k-1} Y'_1 \subseteq B'_1. \tag{11}$$

Definindo agora, para $i = 1, 2$

$$B_i'' = (\mathfrak{p}_k Y_1') \cap B_i,$$

B_1'' e B_2'' formam uma partição de $\mathfrak{p}_k Y_1'$. Como

$$|Y_1'| = m_1' = S(m_1 - 1, m_2, k),$$

pela hipótese da indução interna, Y_1' contém

um $(m_1 - 1)$-subconjunto Y_1'', com $\mathfrak{p}_k Y_1'' \subseteq B_1''$,

ou

um m_2-subconjunto Y_2'', com $\mathfrak{p}_k Y_2'' \subseteq B_2''$.

No segundo caso, é suficiente tomar $Y_2 = Y_2''$, já que

$$\mathfrak{p}_k Y_2'' \subseteq B_2'' \subseteq B_2.$$

No primeiro caso tomamos

$$Y_1 = Y_1'' \cup \{x\}.$$

Afirmamos que $\mathfrak{p}_k Y_1 \subseteq B_1$. De fato, os k-subconjuntos de Y_1 que não contêm x são k-subconjuntos de Y_1''. Logo, pertencem a B_1'' que é um subconjunto de B_1. Por outro lado, seja A um k-subconjunto de Y_1 que contém x. Então $A' = A\backslash\{x\}$ é um $(k-1)$-subconjunto de Y_1'. De (11), $A' \in B_1'$. Pela construção de B_1', $A' \cup \{x\} = A \in B_1$. Isto completa a demonstração do teorema. ∎

Demonstração do Teorema 1. Procedemos por indução sobre o número n de blocos da partição de $\mathfrak{p}_k X$.

Para $n = 2$, de (6),

$$R(2, m, k) = S(m, m, k).$$

A tese segue do Teorema 2. Fixamos agora um valor de $n > 2$ e supomos o teorema verdadeiro para todo n', tal que $2 \leq n' < n$.

Sejam $\ell = R(n, m, k)$, X um ℓ-conjunto e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ os blocos de uma partição de $\mathfrak{p}_k X$. Definimos

$$B_1' = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{n-1} \text{ e } B_2' = B_n.$$

B_1' e B_2' formam uma partição de $\mathfrak{p}_k X$ em dois blocos. Como de (7),

$$\ell = R(n, m, k) = S(R(n-1, m, k), m, k),$$

resulta do Teorema 2, que X contém

um $R(n-1, m, k)$-subconjunto Y_1, com $\mathfrak{p}_k Y_1 \subseteq B'_1$,

ou

um m-subconjunto Y_2, com $\mathfrak{p}_k Y_2 \subseteq B'_2$.

No segundo caso a tese é verificada para $i = n$ e $Y = Y_2$. No primeiro caso, os conjuntos

$$B''_i = (\mathfrak{p}_k Y_1) \cap B_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

formam uma partição de $\mathfrak{p}_k Y_1$. Como

$$|Y_1| = R(n-1, m, k),$$

a hipótese da indução implica que existem um i e um m-subconjunto Y de Y_1, tais que $\mathfrak{p}_k Y \subseteq B''_i$. A tese segue diretamente, pois $B''_i \subseteq B_i$. ∎

Encerramos esta seção com três observações.

Recorrendo ao princípio da indução transfinita (veja por exemplo no livro de Halmos [47]), podemos eliminar a indução dupla usada na demonstração do Teorema 2. Para tanto, consideramos o subconjunto Q de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definido por

$$Q = \{(m_1, m_2, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m_1, m_2 \geq k \geq 1\}.$$

Sobre o conjunto Q definimos a relação $\leq$, como segue:

$$\begin{aligned}(m_1, m_2, k) \leq (m'_1, m'_2, k') \text{ sse } & k < k' \\ \text{ou } & k = k' \text{ e } m_1 + m_2 < m'_1 + m'_2 \\ \text{ou } & k = k' \text{ e } m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2 \text{ e} \\ & m_1 \leq m'_1.\end{aligned}$$

É fácil mostrar que esta relação é uma boa-ordem para Q. Demonstrar o Teorema 2 pelo princípio da indução transfinita, usando esta boa-ordem, corresponde exatamente ao que foi feito na demonstração apresentada.

Queremos observar agora, que o Teorema de Ramsey é uma generalização do "princípio da casa do pombo". Este princípio afirma que ao distribuir $n+1$ pombos em n casas, haverá pelo menos uma casa contendo dois pombos (confronte isto com o Exercício D.I. 31). Pois bem, o caso particular do Teorema 1 para $k = 1$, isto é, quando particionamos os 1-subconjuntos de X, vale dizer o próprio X, afirma que (veja (8)):

"Se X é um conjunto de cardinalidade $R(n, m, 1) = n(m-1) + 1$, e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ é uma partição de X, então existe um i, tal que $|B_i| \geq m$."

Esta afirmação é uma conseqüência simples do princípio da casa do pombo. Porém, uma análise cuidadosa da demonstração do Teorema de Ramsey, revela que este é obtido através de uma iteração complexa do caso particular em que $k = 1$. Tal iteração é descrita pelo processo de indução dupla empregada na demonstração do Teorema 2, acrescido da indução com a qual provamos o Teorema 1.

Finalmente observamos que os Teoremas 1 e 2 afirmam a existência de naturais, para valores dados de n, m e k e de m_1, m_2 e k, respectivamente, possuindo as propriedades enunciadas. Daí segue a existência de um menor número natural satisfazendo estas propriedades, chamado de *número de Ramsey*. Denotamos estes por

$$r(n, m, k) \text{ e } s(m_1, m_2, k),$$

nos casos dos Teoremas 1 e 2, respectivamente. Com esta notação, os Teoremas 1 e 2 provam que

$$r(n, m, k) \leq R(n, m, k) \text{ e } s(m_1, m_2, k) \leq S(m_1, m_2, k).$$

Conhece-se muito pouco a respeito das funções r e s; suspeita-se no entanto que os limites superiores R e S excedem de muito os valores respectivos de r e s. A obtenção de limites inferiores e superiores "razoáveis" para r e s é um dos problemas importantes (e aparentemente difíceis) da Combinatória. Alguns dos poucos resultados conhecidos estão relacionados na Seção 3.

3. O caso particular dos grafos ($k = 2$)

O Teorema 2, no caso particular em que $k = 2$, isto é, quando particionamos os 2-subconjuntos de X, admite várias interpretações na linguagem da Teoria dos Grafos. Damos em seguida uma destas, que é particularmente útil para generalizações. Deixamos outras para os exercícios. Note que a Proposição 1 é um corolário do seguinte resultado:

TEOREMA 3. *Dados $m_1, m_2 \geq 2$, seja G um grafo completo com*

$$\binom{m_1 + m_2 - 2}{m_1 - 1}$$

vértices. Para qualquer coloração das arestas de G com as cores vermelha e azul, G tem um subgrafo completo com m_1 vértices cujas arestas são todas vermelhas, ou um subgrafo completo com m_2 vértices cujas arestas são todas azuis.

Demonstração. Seja X o conjunto dos vértices do grafo G. A coloração dada das arestas determina uma partição de $\mathfrak{p}_2 X$ nos blocos B_1 e B_2, correspondentes às arestas vermelhas e azuis, respectivamente. Agora, de (5)

$$S(m_1, m_2, 2) = \binom{m_1 + m_2 - 2}{m_1 - 1}$$

Pelo Teorema 2, X contém um m_1-subconjunto Y_1, com $\mathfrak{p}_2 Y_1 \subseteq B_1$ ou um m_2-subconjunto Y_2, com $\mathfrak{p}_2 Y_2 \subseteq B_2$. Assim, $G[Y_1]$ (ou $G[Y_2]$) é um subgrafo completo de G, com m_1 (ou m_2) vértices, cujas arestas são todas vermelhas (ou azuis). ∎

Já mencionamos que o Teorema 2 deixa em aberto a determinação dos valores de $s(m_1, m_2, k)$, limitando-se a garantir a sua existência e afirmar que

$$s(m_1, m_2, k) \leq S(m_1, m_2, k).$$

Naturalmente, $s(m_1, m_2, k) = S(m_1, m_2, k)$ quando $k = 1$ ou $m_1 = k$ ou $m_2 = k$. Todos os outros valores conhecidos de $s(m_1, m_2, k)$ estão contidos na Tabela 1, cujos valores referem-se ao caso particular dos

$k = 2$

$m_1 \backslash m_2$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18			
5	14				
6	18				
7	23				

Tabela 1 — Valores conhecidos de $s(m_1, m_2, k)$.

grafos ($k = 2$). As demonstrações de alguns destes resultados são complexas, não sendo possível generalizá-las. Quanto aos valores de $r(n, m, k)$ a situação é ainda pior. A única informação não trivial é:

$$r(3, 3, 2) = 17.$$

Além destes valores, existem vários resultados do tipo:

$$102 \leq s(6, 6, 2) \leq 210,$$
$$13 \leq s(4, 4, 3) \leq 19,$$

ou

$$49 \leq r(4, 3, 2) \leq 65.$$

Conhecem-se ainda alguns limites inferiores gerais. Mencionamos dois aqui. O primeiro, demonstrado construtivamente, afirma que

$$r(n, m, 2) \geq \frac{1}{2}[(2m - 3)^n + 1] = \ell.$$

Por "demonstrado construtivamente" entendemos que baseando-se na demonstração, podemos exibir uma n-coloração das arestas de um grafo completo G, com ℓ vértices, que satisfaça a seguinte propriedade: nenhum subgrafo completo de G, com m vértices, é monocromático.

O segundo limite inferior é demonstrado não-construtivamente, sendo obtido pelo "método probabilístico".

TEOREMA 4. *Para $n, m \geq 2$, $r(n, m, 2) \geq 2n^{m/2 - 1}$. Em particular, $s(m, m, 2) \geq 2^{m/2}$.*

Demonstração. Consideremos um grafo completo G com $\ell \geq m$ vértices. O número de colorações das arestas de G com as n cores $1, 2, \ldots, n$ é:

$$a = n^{\binom{\ell}{2}}.$$

O número destas colorações para as quais G tem um subgrafo completo de m vértices, cujas arestas são todas de cor i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, é b, onde

$$b \leq \binom{\ell}{m} n^{\binom{\ell}{2} - \binom{m}{2}}.$$

Pelo Lema 1, a seguir, se $m \leq \ell < 2n^{m/2 - 1}$, então $nb < a$. Resulta que neste caso, existe alguma coloração das arestas de G, tal que nenhum dos subgrafos completos de G com m vértices tenha todas as suas arestas de uma mesma cor. Logo,

$$r(n, m, 2) \geq 2n^{m/2 - 1}.$$

A desigualdade $s(m, m, 2) \geq 2^{m/2}$ segue da observação de que $s(m, m, 2) = r(2, m, 2)$.

LEMA 1. *Se* $m \leq \ell < 2n^{m/2-2}$, *então* $nb < a$.

Demonstração. É fácil ver que

$$nb \leq a\left[\binom{\ell}{m} n^{1-\binom{m}{2}}\right].$$

Por outro lado,

$$\binom{\ell}{m} n^{1-\binom{m}{2}} = \frac{\ell(\ell-1)\ldots(\ell-m+1)}{1\,.\,2\ldots m}\, n^{1-m(m-1)/2} \leq$$
$$\leq \frac{\ell^{m-1}(\ell-1)n^{1-m(m-1)/2}}{2^{m-1}}.$$

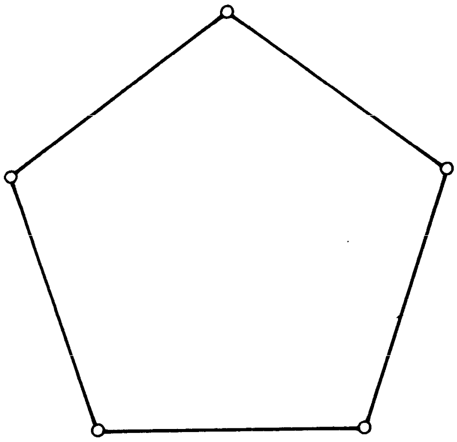
Como $\ell < 2n^{m/2-1}$ por hipótese, segue que

$$\binom{\ell}{m} n^{1-\binom{m}{2}} < \frac{(2n^{m/2-1})^{m-1}(2n^{m/2-1}-1)n^{1-m(m-1)/2}}{2^{m-1}} =$$
$$= n^{2-m}(2n^{m/2-1}-1) = 1-(n^{1-m/2}-1)^2 \leq 1.$$

Assim, $nb < a$. ■ ■

Além da determinação dos valores de $s(m_1, m_2, 2)$, também são de interesse, para um entendimento completo do problema, as colorações, em vermelho e azul, das arestas de grafos completos G com $s(m_1, m_2, 2) - 1$ vértices, para as quais G nem contém um grafo completo vermelho com m_1 vértices, nem um grafo completo azul com m_2 vértices. Os grafos induzidos pelas arestas vermelhas de tais colorações são chamados de *grafos de Ramsey do tipo* (m_1, m_2). Eles possuem em geral estruturas interessantes e um alto grau de simetria. Dois casos conhecidos são dados na Figura 3, outros podem ser encontrados nos Exercícios 6 e 7.

Finalmente mostramos que o Teorema de Ramsey dá lugar a uma infinidade de problemas extremos na Teoria dos Grafos. Sejam G_1 e G_2 dois grafos simples, com m_1 e m_2 vértices. O Teorema 3 implica que para valores suficientemente grandes de ℓ, qualquer coloração das arestas de um grafo completo com ℓ vértices em vermelho e azul, contém um grafo isomorfo a G_1, cujas arestas são vermelhas, ou um grafo isomorfo de G_2, cujas arestas são azuis. Chama-se *número generalizado de Ramsey* $r(G_1, G_2)$, ao menor valor de ℓ satisfazendo a afirmação acima. Definem-se ainda *grafos de Ramsey do tipo* (G_1, G_2), aos grafos induzidos pelas arestas vermelhas das colorações de um



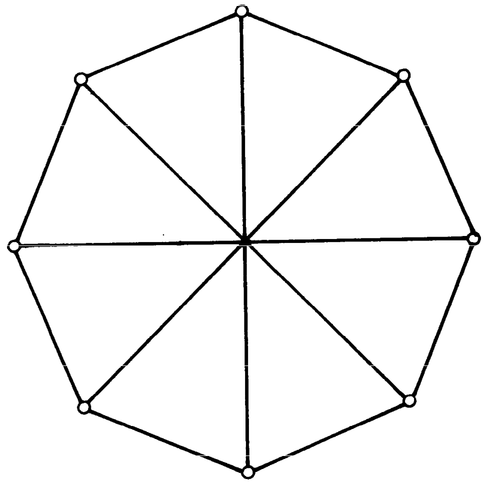


Figura 3 — Grafos de Ramsey do tipo (3,3) e (3,4).

grafo completo com $r(G_1, G_2) - 1$ vértices que nem contêm um G_1 vermelho, nem um G_2 azul.

Alguns destes problemas estão resolvidos, em outros casos têm-se apenas resultados parciais.

4. Outras aplicações do Teorema de Ramsey

Nesta seção apresentamos três aplicações do Teorema de Ramsey, referentes às áreas de Geometria, Teoria dos Números e Teoria dos Semigrupos Finitos.

Uma aplicação à Geometria

TEOREMA 5. *Dado um natural $m \geq 4$, existe um menor natural $f(m)$, tal que quaisquer $f(m)$ pontos no plano, três a três não colineares, contêm m pontos que são vértices de um polígono convexo.*

Demonstração. A demonstração utiliza dois lemas geométricos, cujas provas omitimos, mas que podem ser encontradas em [45] ou [102].

LEMA 2. *Entre cinco pontos no plano, três a três não colineares, existem quatro que são os vértices de um quadrilátero convexo.*

LEMA 3. *Se entre $m \geq 4$ pontos no plano, três a três não colineares, cada quatro são os vértices de um quadrilátero convexo, então os m pontos são os vértices de um polígono convexo.*

Mostramos agora que

$$f(m) \leq S(m, 5, 4).$$

De fato, seja X um conjunto de $S(m, 5, 4)$ pontos no plano, três a três não colineares. Particionamos $\mathfrak{p}_4 X$ em dois blocos, como segue:

$$B_1 = \{A \in \mathfrak{p}_4 X \mid \text{os pontos em } A \text{ são vértices de um quadrilátero convexo}\},$$
$$B_2 = (\mathfrak{p}_4 X) \backslash B_1 .$$

Pelo Teorema 2, X contém um m-subconjunto Y_1, com $\mathfrak{p}_4 Y_1 \subseteq B_1$ ou um 5-subconjunto Y_2, com $\mathfrak{p}_4 Y_2 \subseteq B_2$. Do Lema 2 segue que o segundo caso é impossível. Do Lema 3 segue que os m pontos em Y_1 são os vértices de um polígono convexo. ■

Quanto aos valores da função $f(m)$, sabe-se que, para $m \geq 4$

$$2^{m-2} < f(m) \leq \binom{2m-4}{m-2} + 1.$$

Conjetura-se, por outro lado, que $f(m) = 2^{m-2} + 1$ para todo $m \geq 4$. Observamos que o limite inferior acima e a demonstração dada do Teorema 5, implicam que

$$s(m, 5, 4) > 2^{m-2}.$$

Uma aplicação à Teoria dos Números

TEOREMA 6. *Dado um natural $n \geq 2$, existe um menor natural $g(n)$, tal que para qualquer partição do conjunto*

$$\{1, 2, \ldots, g(n)\}$$

em n blocos, existem números x, y e z num mesmo bloco, tais que $x + y = z$.

Demonstração. Vamos mostrar que

$$g(n) \leq R(n, 3, 2).$$

De fato, seja $\ell = R(n, 3, 2)$. Dada uma partição de $X = \{1, 2, \ldots, \ell\}$ em n blocos $C_1, C_2, \ldots, C_n$, definimos a seguinte partição de $\mathfrak{p}_2 X$:

$$B_i = \{\{j_1, j_2\} \in \mathfrak{p}_2 X \mid |j_1 - j_2| \in C_i\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pelo Teorema 1, existe um bloco B_i e um 3-subconjunto $\{j_1, j_2, j_3\}$ de X, tais que $\{j_1, j_2\}$, $\{j_2, j_3\}$, $\{j_1, j_3\}$ pertencem a B_i. Assim

$$|j_1 - j_2|,\ |j_2 - j_3|,\ |j_1 - j_3| \in C_i.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $j_1 > j_2 > j_3$. Colocando

$$x = j_1 - j_2,\ y = j_2 - j_3 \text{ e } z = j_1 - j_3,$$

resulta que $x, y, z \in C_i$. Por outro lado, $x + y = z$. ■

Quanto aos valores da função $g(n)$, sabe-se que:

$$g(2) = 5,\ g(3) = 14,\ g(4) = 45 \text{ e } \frac{1}{2}\, 3^n < g(n) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1.$$

Notamos que um limite inferior para $g(n)$ é também um limite inferior para $r(n, 3, 2)$. Esta é uma das razões dos esforços para determinar $g(n)$.

Uma aplicação à Teoria dos Semigrupos Finitos

TEOREMA 7. *Dado um semigrupo finito S e um natural $m \geq 1$, existe um menor natural $k = k(S, m)$ tal que toda seqüência $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de elementos de S contém m segmentos consecutivos, o produto de cada segmento sendo um mesmo idempotente e de S. Mais precisamente, existem $e \in S$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m < j_{m+1} \leq k$, tais que*

$$a_{j_1} \ldots a_{j_2 - 1} = a_{j_2} \ldots a_{j_3 - 1} = \ldots = a_{j_m} \ldots a_{j_{m+1} - 1} = e = e^2.$$

Demonstração. Mostramos que para $m \geq 2$,

$$k(S, m) \leq R(|S|, m + 1, 2).$$

(Para $m = 1$ o resultado segue do caso em que $m = 2$.) De fato, seja $\ell = R(|S|, m + 1, 2)$. Definimos a seguinte partição dos 2-subconjuntos de $X = \{1, 2, \ldots, \ell\}$:

$$B_a = \Big\{\{i, j\} \in \mathfrak{p}_2 X \mid i < j, \text{ e } a_i \ldots a_{j-1} = a\Big\} \qquad (a \in S).$$

Pelo Teorema 1, existem $e \in S$ e um $(m + 1)$-subconjunto Y de X, tais que $\mathfrak{p}_2 Y \subseteq B_e$. Sendo $j_1 < j_2 < \ldots < j_{m+1}$ os elementos de Y, resulta que $\{j_1, j_2\}$, $\{j_2, j_3\}$ e $\{j_1, j_3\}$ pertencem a B_e isto é

$$\begin{aligned} e = a_{j_1} \ldots a_{j_2 - 1} = a_{j_2} \ldots a_{j_3 - 1} = \\ = (a_{j_1} \ldots a_{j_2 - 1})(a_{j_2} \ldots a_{j_3 - 1}) = e^2. \end{aligned}$$

Logo $e = e^2$, isto é, e é um idempotente de S. A tese segue da pertinência de $\{j_1, j_2\}$, $\{j_2, j_3\}$, $\ldots$, $\{j_m, j_{m+1}\}$ a B_e. ■

EXERCÍCIOS

1. Dados naturais $m_1, m_2 \geq 1$, mostre que existe um menor natural $\ell = h(m_1, m_2)$ tal que toda seqüência $s = (r_1, r_2, \ldots, r_\ell)$ de números reais contém uma subseqüência crescente de m_1 termos ou uma decrescente de m_2 termos. Mostre que $h(m_1, m_2) = (m_1 - 1)(m_2 - 1) + 1$. (Uma *subseqüência crescente* de m termos de s é uma seqüência $(r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_m})$, tal que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq \ell$ e $r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq \ldots \leq r_{i_m}$.)
2. Demonstre a seguinte versão generalizada do Teorema de Ramsey: Dados $n \geq 2$ e $m_1, m_2, \ldots, m_n \geq k \geq 1$, existe um menor natural $\ell = N(m_1, m_2, \ldots, m_n, k)$, tal que dados um ℓ-conjunto X e uma partição de $\mathfrak{p}_k X$ em n blocos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, existe um i $(1 \leq i \leq n)$ e um m_i-subconjunto Y de X, tais que $\mathfrak{p}_k Y \subseteq B_i$.
3. Prove que os números definidos no exercício anterior, satisfazem as relações abaixo:

   (a) $N(m_1, m_2, \ldots, m_n, k) \leq 1 + N(m'_1, m'_2, \ldots, m'_n, k-1)$, onde $m'_i = N(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \ldots, m_n, k)$,

   (b) $N(m_1, m_2, \ldots, m_n, 1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$,

   (c) $N(m_1, m_2, \ldots, m_n, 2) \leq \dfrac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n)!}{(m_1 - 1)!\,(m_2 - 1)! \ldots (m_n - 1)!}$.
4. Mostre que todo grafo simples com $s(m_1, m_2, 2)$ vértices tem um subgrafo completo com m_1 vértices ou um conjunto independente de m_2 vértices.
5. Mostre que se $s(m_1 - 1, m_2, 2)$ e $s(m_1, m_2 - 1, 2)$ são ambos pares, então $s(m_1, m_2, 2) \leq s(m_1 - 1, m_2, 2) + s(m_1, m_2 - 1, 2) - 1$. Como uma aplicação, mostre que $s(3, 4, 2) \leq 9$.
6. Mostre que o grafo cujos vértices são os resíduos $0, 1, \ldots, 7$ $(mod\ 8)$ e no qual vértices i e j são adjacentes se e somente se $i - j \equiv \pm 1, \pm 4$ $(mod\ 8)$ é um grafo de Ramsey do tipo $(3, 4)$. Conclua que $s(3, 4, 2) = 9$.
7. Mostre que o grafo cujos vértices são os resíduos $0, 1, \ldots, 16$ $(mod\ 17)$ e no qual vértices i e j são adjacentes se e somente se $i - j = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ $(mod\ 17)$ é um grafo de Ramsey do tipo $(4, 4)$. Mostre que $s(4, 4, 2) = 18$.
8. Mostre que $s(4, 4, 3) \leq 19$. Ache o melhor limite inferior que você consegue para $s(4, 4, 3)$.

9. Mostre que $f(4) = 5$ e $f(5) = 9$. (Veja Teorema 5.)
10. Mostre que para $n \geq 3$, $r(n, 3, 2) \leq nr(n - 1, 3, 2) + 2$. Usando $r(2, 3, 2) = 6$, mostre que $r(n, 3, 2) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1$. Conclua que $g(n) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1$. (Veja Teorema 6.)
11. Mostre que $g(2) = 5$ e $g(3) = 14$ (veja Teorema 6). Mostre que para todo $n \geq 3$, $g(n) \geq 3g(n - 1) - 1$. Mostre que $g(n) > \frac{1}{2} 3^n$ para $n \geq 2$. Conclua que $r(n, 3, 2) > \frac{1}{2} 3^n$.
12. Mostre que se S for um grupo finito, então $k(S, m) = m \mid S \mid$. Mostre que se S é um semigrupo finito, então $k(S, 1) \leq 2^{|S|}$. (Veja Teorema 7.)
13. Usando os Exercícios 3 e 5 e os resultados na Tabela 1, mostre que $s(5, 5, 3) \leq 2 \times 10^{4403}$.
14. Compare os limites inferiores para $r(n, m, 2)$, dados pelo Teorema 5 e pelo limite inferior construtivo.
15. Mostre que a seguinte versão "orientada" do Teorema de Ramsey é falsa para todo $k \geq 2$: Dados naturais n, m e k, tais que $m \geq$ $\geq k \geq 1$ e $n \geq 2$, existe um natural $\ell = R_0(n, m, k)$, tal que dados um ℓ-conjunto X e uma partição de X^k em n blocos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, existem um bloco B_i e um m-subconjunto Y de X, tais que $Y^k \subseteq B_i$. (Aqui, X^k denota o produto cartesiano de X com si mesmo, k vezes.)
16. Dados naturais $m, p \geq 1$, mostre que existe um menor natural $\ell = \ell(m, p)$, tal que para todo ℓ-subconjunto X de um domínio de integridade D, de característica distinta de 3, X contém um m-subconjunto Y, tal que para todo x, y, z em Y, $x^p + y^p + z^p \neq 0$. Sugestão — Observe que para $a, b \in D$, o polinômio $ax^p + b$ tem no máximo p raízes em D. Mostre que $\ell(m, p) \leq p +$ $+ s(p + 3, s(2p + 2, m, 2), 3)$.
17. Dados naturais $m_1, m_2 \geq 2$, prove que existe um menor natural $\ell = h(m_1, m_2)$, tal que toda ordem parcial finita de cardinalidade pelo menos ℓ contém uma cadeia de cardinalidade m_1 ou uma anticadeia de cardinalidade m_2. Prove que $h(m_1, m_2) =$ $= (m_1 - 1)(m_2 - 1) + 1$. Obtenha o Exercício 1 como corolário da afirmação acima. (Um subconjunto de uma ordem parcial é uma *cadeia* (*anticadeia*) se seus elementos forem dois a dois comparáveis (incomparáveis).)

18. Prove a versão infinita do Teorema de Ramsey: Dados naturais $n \geq 2$ e $k \geq 1$, um conjunto infinito X e uma partição de $\mathfrak{p}_k X$ em n blocos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, existem um bloco B_i e um subconjunto infinito Y de X, tais que $\mathfrak{p}_k Y \subseteq B_i$.

19. Dados naturais $n, m \geq 1$, prove que existe um menor natural $\ell = p(n, m)$, tal que dada uma partição do semigrupo livre Σ^+ ($\Sigma^+ = \Sigma^* \backslash 1$), gerado por Σ, em n blocos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, toda palavra de Σ^* de comprimento pelo menos ℓ pertence a $\Sigma^* B_i^m \Sigma^*$ para algum i, $1 \leq i \leq n$. Prove que $p(m, n) = m^n$. Conclua que $r(n, m, 2) > m^n$. (Veja Seção D.I.2.)

20. Dados naturais $n \geq 2$, $m \geq k \geq 1$ e $p \geq 1$, prove que existe um menor natural $\ell = t(n, m, k, p)$, tal que dados um alfabeto Σ de cardinalidade p e uma partição de Σ^k em n blocos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, toda palavra em Σ^*, de comprimento pelo menos ℓ, contém uma subpalavra de comprimento m, cujas subpalavras de comprimento k pertencem a um mesmo bloco B_i. (Dadas palavras x e y em Σ^*, x é uma *subpalavra* de y, $x \leq y$, se existem um natural q e palavras $x_1, x_2, \ldots, x_q, y_0, y_1, \ldots, y_q$, tais que $x = x_1 x_2 \ldots x_q$ e $y = y_0 x_1 y_1 \ldots x_q y_q$. Assim, $x \leq y$ se e somente se y pertence ao embaralhamento de $\{x\}$ com Σ^* (veja Exercício D.II.8).)

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

O Teorema 1 foi demonstrado por F. P. Ramsey em 1930 [100] e, independentemente, por P. Erdös e G. Szekeres em 1935 [30]. A demonstração apresentada segue [30]. Ramsey apresentou também uma versão infinita de seu teorema (Exercício 18), e que vem sendo estudada em Lógica Matemática. Recentemente o Teorema de Ramsey tem inspirado avanços significativos em Combinatória [40], [82], [88].

Os números de Ramsey contidos na Tabela 1 foram determinados por Greenwood, Gleason, Graver e Yackel [41], [43], [33]. O limite inferior construtivo para $r(n, m, 2)$ é de Giraud [37], enquanto o Teorema 5 é baseado no trabalho de Erdös [28]. Neste artigo clássico, Erdös introduziu o "método probabilístico" que tem sido aplicado extensamente na obtenção de limites inferiores e superiores para problemas extremos [29]. Os números generalizados de Ramsey foram introduzidos por Chvátal e Harary [14]. Progressos mais recentes podem ser encontrados em [11].

O Teorema 5, bem como os limites e a conjetura para a função $f(m)$ são devidos a Erdös e Szekeres [30], [31], [117].

O Teorema 6 é de Schur [106], antecedendo o próprio Teorema de Ramsey. Maiores detalhes sobre a função $g(n)$ podem ser encontrados em [126].

O Teorema 7 é de McNaughton [74], e tem aplicações na demonstração da decidibilidade de problemas na Teoria dos Autômatos Finitos [74], [76]. O Exercício 18 é de Schützenberger [109].