CAPÍTULO IV

COLORAÇÃO DE VÉRTICES E O TEOREMA DE BROOKS

1. Coloração de vértices

Uma *coloração de vértices* de um grafo G é uma partição p de V em conjuntos independentes. (Podemos dizer que uma coloração de vértices de G consiste em dar a cada vértice uma cor de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes). Para um inteiro s, uma *s-coloração* de G é uma coloração p de G tal que $|p| \leq s$. Se G admite uma s-coloração então G é *s-colorável.* (Observe que se G tem laços então G não admite colorações, ao passo que se G não tem laços então G é $|V|$-colorável). O *número cromático crom*(G) de G é o menor inteiro s tal que G é s-colorável. Os grafos das Figuras 1 e 2 têm números cromáticos 4 e 3, respectivamente.

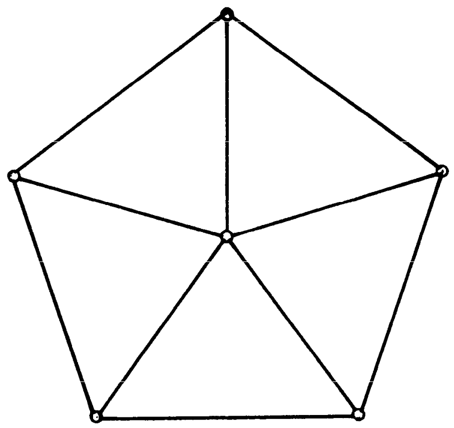

Figura 1 — A roda de cinco pontas tem número cromático 4.

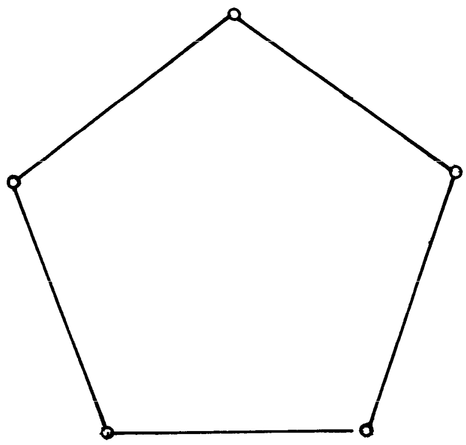

Figura 2 — O pentágono tem número cromático 3.

TEOREMA 1 (Brooks). *Seja s um inteiro e G um grafo sem laços, e sem subgrafos completos com $s+1$ vértices. Se $s \geq 3$ e $g(v) \leq s$ para todo v em V então G é s-colorável.*

Demonstração. Suponha que, pelo contrário, existam grafos que satisfaçam todas as condições do teorema mas que não sejam s coloráveis. Seja G um tal grafo com um número mínimo de vértices. Observe que pela definição de G, removendo-se um vértice

x qualquer de G obtém-se o grafo $G' = G - x$ que é s-colorável. Para cada s-coloração de G' é necessário que se usem todas as s cores para os t vértices $x_1, x_2, \ldots, x_t$ adjacentes a x em G, pois caso contrário haveria uma cor disponível a x e portanto G seria s-colorável.

Como $g(x) \leq s$, então $t = s$ e podemos supor que os vértices $x_1, \ldots, x_s$ são coloridos com as cores $1, \ldots, s$, respectivamente.

Supondo o grafo G' assim colorido, temos então:

LEMA 1. *Vértices x_i e x_j ($1 \leq i, j \leq s$ e $i \neq j$) estão no mesmo componente C_{ij} do subgrafo B_{ij} induzido pelo conjunto de vértices de cores i e j.*

Demonstração. Caso contrário a permuta das cores i e j no componente de B_{ij} que tem x_i como um de seus vértices fornece uma s-coloração de G' em que os vértices x_i e x_j têm ambos a mesma cor j, em contradição à obrigatoriedade de colorir $x_1, \ldots, x_s$ com s cores diferentes. ■

LEMA 2. *C_{ij} é uma cadeia, ($1 \leq i, j \leq s$ e $i \neq j$). Isto é, C_{ij} é gerado pelas arestas de um caminho em C_{ij}.*

Demonstração. Pelo Lema 1, existe um caminho (não degenerado) $(v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ de x_i a x_j em C_{ij} (onde $v_0 = x_i$ e $v_n = x_j$).

Observe que x_i é adjacente ao vértice v_1, que por sua vez tem cor j. Ademais, como $g(x_i) \leq s$ então $gG'(x_i) \leq s - 1$ e portanto v_1 é o único vértice de cor j adjacente a x_i, pois caso contrário x_i poderia ser recolorido com uma cor diferente de i. Portanto, o grau de x_i em C_{ij} é 1. Analogamente, o grau de x_j em C_{ij} é 1.

Para completar a demonstração do Lema 2, basta agora mostrar que para todo k tal que $0 < k < n$, o grau de v_k em C_{ij} é 2. Para tanto, suponha o contrário, seja k o menor inteiro tal que $0 < k < n$ e o grau de v_k em C_{ij} é distinto de 2. Como v_k é adjacente a v_{k-1} e a v_{k+1}, por sua vez distintos, então o grau de v_k em C_{ij} é maior do que 2. Nesse caso, v_k pode ser recolorido com uma cor diferente de i e j e o novo componente C_{ij} terá $x_i = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ como vértices, não terá nenhum dos vértices $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n = x_j$, em contradição ao Lema 1. De fato, C_{ij} é a cadeia $G[aC]$. ■

LEMA 3. *O vértice x_i é o único comum a C_{ij} e C_{ik} $(1 \le i, j, k \le s,$ $i \ne j \ne k \ne i)$.*

Demonstração. Suponha que w é um vértice em $V \backslash \{x_i\}$ comum a C_{ij} e C_{ik}. Então o grau de w em C_{ij} e em C_{ik} é 2 e portanto w pode ser recolorido com uma cor diferente de i, de j e de k; neste caso, os vértices x_i e x_j ficarão em componentes distintos, do novo B_{ij}, em contradição ao Lema 1. ■

Como G não tem um subgrafo completo com $s+1$ vértices, podemos supor então que x_1 e x_2 não são adjacentes. Nesse caso, a cadeia C_{12} contém um vértice y adjacente a x_1, mas distinto de x_2. Após intercambiar as cores 1 e 3 na cadeia C_{13}, as novas cadeias C_{21} e C_{23} conterão ambas o vértice y distinto de x_2, em contradição ao **Lema 3. A demonstração do Teorema de Brooks está completa.** ■

EXERCÍCIOS

1. Acompanhe a demonstração do Teorema de Brooks para o grafo G da Figura 3.

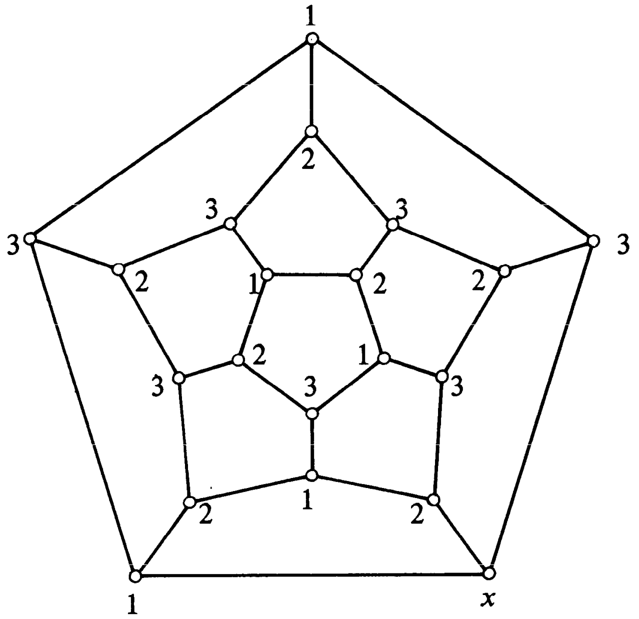

Figura 3

2. Mostre que a demonstração do Teorema de Brooks induz um algoritmo polinomial (linear).
3. Por que existe a restrição $s \ge 3$ no enunciado do Teorema de Brooks?
4. (*Teorema das cinco cores*) – Pode-se provar que todo grafo planar simples não vazio tem pelo menos um vértice com grau menor do

que ou igual a cinco. Baseado nesta propriedade, demonstre que todo grafo planar simples é 5-colorável.

5. Mostre que todo natural k é o número cromático de algum grafo sem triângulos.
6. Dê um algoritmo linear para determinar se um grafo é ou não 2-colorável.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

Em 1852, Francis Guthrie concebeu a famosa "conjetura das quatro cores": todo grafo planar sem laços é 4-colorável [90] (veja também [103]). Observe que o grafo da Figura 1 é planar e tem número cromático 4; portanto a "conjetura das três cores" é falsa. Por outro lado, a "conjetura das cinco cores" é verdadeira, sua demonstração é bastante simples. (Veja, por exemplo, [129], ou [6]; veja Exercício 4).

A conjetura das quatro cores foi provada por Appel e Haken em 1976 [2], com o auxílio do computador, após resistir durante mais de cem anos ao ataque de combinatóricos, algebristas e topólogos, que forneceram inúmeras demonstrações falsas. Dentre essas, a mais famosa parece ter sido a de Kempe [58], durante dez anos aceita como correta. Apesar disso, a técnica por ele utilizada, de "cadeias de Kempe", foi aqui aplicada com sucesso na demonstração do Teorema de Brooks. Esta não é a demonstração original [9], mas sim a de Melnikov e Vizing [79].

Determinar se um grafo é ou não 2-colorável é bastante simples (vide Exercício 6). Por outro lado, determinar se um grafo é k-colorável (k fixo, $k \geq 3$) é um problema $\mathcal{NP}$-m-completo [57]. Mesmo determinar se um grafo planar é ou não 3-colorável é $\mathcal{NP}$-m-completo [114]. Por outro lado, determinar se um grafo planar é k-colorável ($k \geq 4$) é trivial, à luz do Teorema das quatro cores; basta verificar se o grafo tem ou não laços.