CAPÍTULO III

EMPARELHAMENTOS E COBERTURAS

1. O problema dos casamentos

"Dado um conjunto P de rapazes e outro N de moças, qual a condição necessária e suficiente para que seja possível casar todas as moças em N com rapazes em P, de forma que o esposo de cada moça seja um dos rapazes de quem ela goste?" Esta pergunta é conhecida como o problema dos casamentos e tem a seguinte resposta: "para cada conjunto X de moças em N, o número de rapazes dos quais as moças em X gostam tem que ser pelo menos tão grande quanto o número de moças em X".

Damos a seguir uma versão formal do problema e de sua solução, esta conhecida como o Teorema de Hall.

Um conjunto t de arestas de um grafo G *cobre* um conjunto X de vértices de G se cada vértice em X incide em pelo menos uma aresta em t. Um conjunto t de arestas de G é um *emparelhamento* se t consiste de ligações duas a duas não adjacentes.

TEOREMA 1 (Hall). *Um grafo G com bipartição $\{P, N\}$ tem um emparelhamento que cobre N se e somente se $|Adj(X)| \geq |X|$ para cada subconjunto X de N.*

LEMA 1. *A condição de Hall é necessária (ou seja, se existe um emparelhamento em G que cobre N então $|Adj(X)| \geq |X|$ para cada subconjunto X de N).*

Demonstração. Suponha que G tem um emparelhamento que cobre N. Seja t um tal emparelhamento, X um subconjunto de N. Vamos provar que $|Adj(X)| \geq |X|$ definindo uma injeção f de X em $Adj(X)$.

Para tanto, seja v um vértice em X. Como t cobre N, então v é o extremo de (exatamente) uma aresta em t, digamos, $\alpha(v)$; seja $f(v)$ o extremo de $\alpha(v)$ em P. Ora, para v e v' vértices distintos em X, $\alpha(v)$ e $\alpha(v')$ são arestas distintas e como t é um emparelhamento então $f(v)$ e

$f(v')$ são vértices distintos em $Adj(X)$. De fato, f é uma injeção de X em $Adj(X)$ e portanto $|Adj(X)| \geq |X|$. Como esta conclusão vale para qualquer subconjunto X de N, então o lema está demonstrado. ∎

LEMA 2. *A condição de Hall é suficiente (ou seja, se* $|Adj(X)| \geq |X|$ *para todo subconjunto* X de N, *então* G *tem um emparelhamento que cobre* N).

Demonstração. Suponha que $|Adj(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de N. Suponha, como hipótese indutiva, que para todo grafo G' com bipartição $\{P', N'\}$ e com $|VG'| < |VG|$, se $|AdjG'(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de N', então G' tem um emparelhamento que cobre N'.

Note que se aG é vazio então $Adj(N)$ é vazio: nesse caso, como, por hipótese, $|Adj(N)| \geq |N|$, então N é vazio e portanto o emparelhamento vazio cobre N. Suponha então que aG contém (pelo menos) uma aresta, digamos, α. Seja u o extremo de α em P, v seu extremo em N.

Seja L o grafo G-$\{u, v\}$. Note que $\{P\backslash\{u\}, N\backslash\{v\}\}$ é uma bipartição de L. Ora, se $|AdjL(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de $N\backslash\{v\}$, então, por indução, L tem um emparelhamento, t, que cobre $N\backslash\{v\}$; nesse caso, $t \cup \{\alpha\}$ é um emparelhamento em G que cobre N.

Podemos então supor que $N\backslash\{v\}$ tem um subconjunto, S, tal que $|AdjL(S)| < |S|$. Por hipótese, $|Adj(S)| \geq |S|$. Pela definição de L, $Adj(S) \subseteq \{u\} \cup AdjL(S)$. Logo, u pertence a $Adj(S)$ e $|Adj(S)| = |S|$ (vide Figura 1).

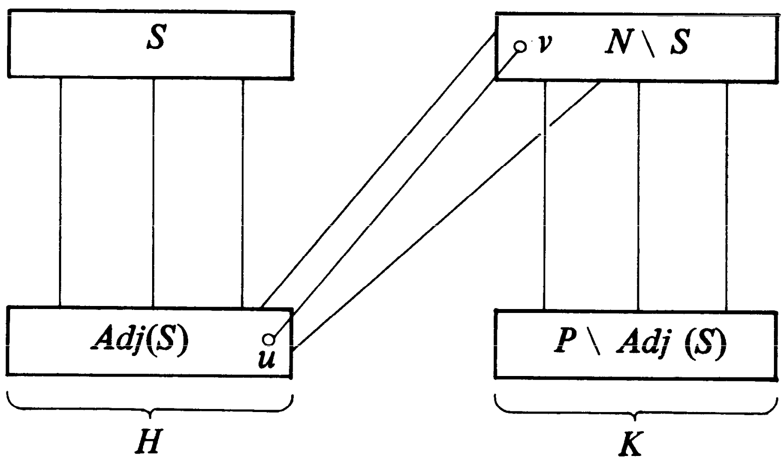

Figura 1 — O conjunto S em G e os subgrafos H e K de G.

Seja H o grafo $G[S \cup Adj(S)]$ e K o grafo $G\text{-}VH$ (vide Figura 1). Note que $\{S, Adj(S)\}$ e $\{N\backslash S, P\backslash Adj(S)\}$ são bipartições de H e K, respectivamente. Note também que como $|AdjL(S)| < |S|$ e como S é um subconjunto de $N\backslash\{v\}$, então S não é nem o vazio nem N; portanto $|VH|$ e $|VK|$ são ambos menores do que $|V|$.

Basta então provar que $|AdjH(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de S e $|AdjK(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de $N\backslash S$. Porque então, por indução, H e K tem emparelhamentos tH e tK que cobrem S e $N\backslash S$, respectivamente; nesse caso, $tH \cup tK$ é um emparelhamento em G que cobre N.

Para provar que $|AdjH(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de S, basta notar que se X é um subconjunto de S, então $AdjH(X) = Adj(X)$ por definição de H e $|Adj(X)| \geq |X|$ por hipótese.

Para provar que $|AdjK(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de $N\backslash S$, note inicialmente que $AdjK(X) = Adj(X \cup S)\backslash Adj(S)$ por definição de K. Portanto,

$$|AdjK(X)| = |Adj(X \cup S)| - |Adj(S)|.$$

Por hipótese, $|Adj(X \cup S)| \geq |X \cup S| = |X| + |S|$; logo,

$$|AdjK(X)| \geq |X| + |S| - |Adj(S)|.$$

Finalmente, como $|S| = |Adj(S)|$, então $|AdjK(X)| \geq |X|$. A demonstração do Lema 2 completa a demonstração do Teorema de Hall. ■■

Com base na demonstração do Lema 2 (e na asserção do Lema 1), representamos na Figura 2 o algoritmo *Hall*(G, N, P): dados um grafo G e uma bipartição $\{P, N\}$ de G, *Hall*(G, N, P) determina se todo subconjunto X de N satisfaz a desigualdade

$$|Adj(X)| \geq |X|.$$

Em caso negativo, *Hall*(G, N, P) determina também um subconjunto X de N tal que $|Adj(X)| < |X|$; em caso afirmativo, *Hall*(G, N, P) determina também um emparelhamento em G que cobre N.

Na descrição do algoritmo, certos comandos têm nome, para facilidade de referência. Três desses comandos, a saber, recursão L, recursão H e recursão K, correspondem a chamadas recursivas do algoritmo. Assim, o comando recursão H deve ser interpretado da seguinte maneira: "chame *Hall* recursivamente para determinar se todo subconjunto X de S satisfaz à desigualdade $|AdjH(X)| \geq |X|$;

em caso afirmativo, atribua o valor *sim* a *satisfaz* e um emparelhamento que cobre S a *touX*; em caso negativo atribua *não* a *satisfaz* e um subconjunto de S que não satisfaz a desigualdade a *touX*".

```
         procedimento Hall(G, N, P):
              início
                 se aG é vazio então se N é vazio
                                       então devolva sim, ∅
                                       senão devolva não, N;
{escolha}        seja α uma aresta em G;
                 u, v ← extremo de α em P, extremo de α em N;
{remoção}        L ← G\{u, v};
{recursão L}     satisfaz, touX ← Hall(L, N\{v}, P\{u});
                 se satisfaz então devolva sim, touX ∪ {α};
                 S ← touX;
                 se |Adj(S)| ≠ |S| então devolva não, S;
                 H ← G[S ∪ Adj(S)];
{recursão H}     satisfaz, touX ← Hall(H, S, Adj(S));
                 se não satisfaz então devolva não, touX
                                 senão tH ← touX;
                 K ← G-VH;
{recursão K}     satisfaz, touX ← Hall(K, N\S, P\Adj(S));
                 se não satisfaz então devolva não, touX
                                 senão devolva sim, tH ∪ touX
              fim
```

Figura 2 — O algoritmo *Hall* ("*G* satisfaz a condição de Hall?").

EXEMPLO 1. Considere o grafo G da Figura 3, com bipartição $\{P, N\}$, onde $N = \{v_0, v_2, v_4, v_6, v_8\}$. Durante a execução do algoritmo *Hall*, os comandos escolha e remoção deverão ser executados várias vezes: cada vez, alguma aresta α do grafo deverá ser escolhida, seus extremos removidos do grafo; suponhamos que se dê preferência à aresta α_{2i} com o maior índice $2i$ (se existir alguma). Se este critério de escolha for adotado e o algoritmo mecanicamente seguido, então o comando escolha será executado 31 vezes, até que o emparelhamento $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_9\}$ seja obtido. Esta afirmação segue da Proposição 1, cuja demonstração fica a cargo do leitor, como exercício.

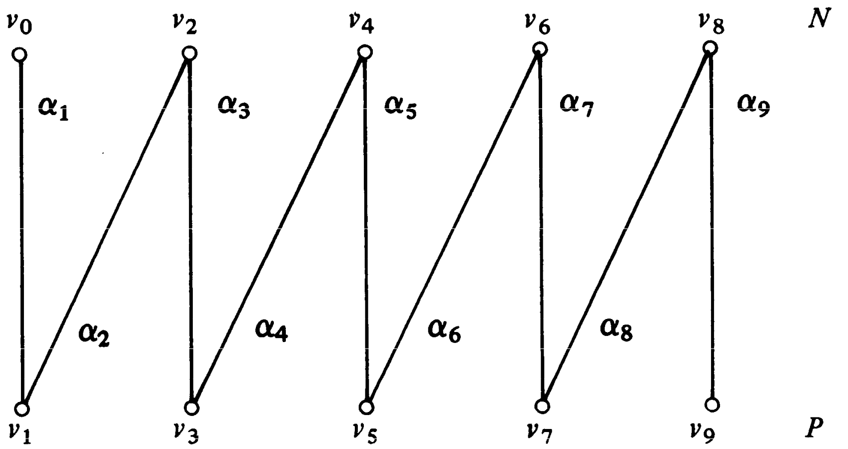

Figura 3 — O grafo do Exemplo 1.

PROPOSIÇÃO 1. *Para cada natural positivo n, seja* G_n *o grafo que tem* $\{v_0, v_1, \ldots, v_{2n-1}\}$ *como conjunto de vértices,* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}\}$ *como conjunto de arestas, onde, para cada i* $(1 \leq i \leq 2n - 1)$, *a aresta* α_i *tem os vértices* v_{i-1} *e* v_i *como extremos; sejam* N_n *e* P_n *os conjuntos* $\{v_0, v_2, \ldots, v_{2n-2}\}$ *e* $\{v_1, v_3, \ldots, v_{2n-1}\}$ *respectivamente. Então* $\{P_n, N_n\}$ *é uma bipartição de* G_n. *Dada preferência à aresta* α_{2i} *com 2i máximo para a execução do comando escolha, então este será executado* $2^n - 1$ *vezes até que o emparelhamento* $\{\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-1}\}$ *(que cobre* N_n*) seja obtido.*

O leitor poderia argumentar que não é possível existir um algoritmo polinomial equivalente a *Hall*, "uma vez que $|Adj(X)| \geq |X|$ precisa ser verificada para cada um dos $2^{|N|}$ subconjuntos X de N". Felizmente, tal raciocínio é falso: daremos a seguir outra demonstração do Lema 2, que induz um algoritmo eficiente.

Dado um conjunto t de arestas de um grafo G e um conjunto X de vértices de G, Xt denota o subconjunto de X que consiste daqueles vértices que incidem em pelo menos uma aresta em t.

Segunda demonstração do Lema 2 (suficiência da condição de Hall) — Suponha que G é um grafo com bipartição $\{P, N\}$ tal que $|Adj(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de N. Dentre os emparelhamentos em G (e como o vazio é um deles então existe pelo menos um), seja t um tal que Nt seja maximal.

Pelo Lema 3, abaixo, N tem um subconjunto S tal que $|Adj(S)| + |N \backslash Nt| = |S|$. Ora, se t não cobre N então $N \backslash Nt$ não é vazio e portanto $|Adj(S)| < |S|$, contradição. Logo, t cobre N.

LEMA 3. *Seja G um grafo com bipartição $\{P, N\}$, t um emparelhamento em G. Então*

ou (i) *existe um subconjunto S de N que inclui $N \backslash Nt$ e tal que*

$$| Adj(S) | + | N \backslash Nt | = | S |,$$

ou (ii) *existe um emparelhamento t_+ em G tal que Nt_+ inclui (propriamente) Nt e $| Nt_+ \backslash Nt | = 1$.*

Demonstração. Suponha, como hipótese de indução, que a asserção vale para todo grafo G' com $| VG' | < | VG |$.

Note inicialmente que se $Adj(N \backslash Nt)$ for vazio então (i) vale trivialmente, com $S = N \backslash Nt$.

Suponha pois que existe (pelo menos) uma aresta, α, com um extremo em $N \backslash Nt$. Seja u o extremo de α em P, v seu extremo em $N \backslash Nt$.

Se u pertence a $P \backslash Pt$, então (ii) vale, com $t_+ = t \cup \{\alpha\}$ e $Nt_+ \backslash Nt = \{v\}$.

Suponha pois que u pertence a Pt. Seja β a aresta de t que incide em u, v' seu extremo em Nt. Note que v pertence a $N \backslash Nt$ e portanto v e v' são distintos (vide Figura 4).

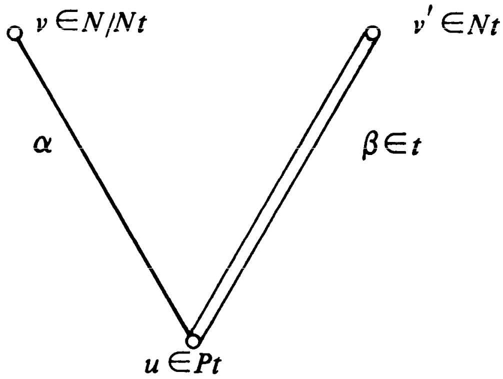

Figura 4

Seja G' o grafo $G - u$. Observe que $\{P \backslash \{u\}, N\}$ é uma bipartição de G', e $t' = t \backslash \{\beta\}$ um emparelhamento em G'. Note também que a hipótese de indução é aplicável a G', com bipartição $\{P \backslash \{u\}, N\}$ e emparelhamento t'.

Considere inicialmente o caso em que N tem um subconjunto S que inclui $N \backslash Nt'$ e tal que

$$| AdjG'(S) | + | N \backslash Nt' | = | S |.$$

Ora, $AdjG'(S) = Adj(S) \backslash \{u\}$, por definição de G'; como v', um vértice em $N \backslash Nt'$, pertence a S, então u pertence a $Adj(S)$. Logo,

$$|AdjG'(S)| = |Adj(S)| - 1.$$

Por outro lado, $N \backslash Nt' = (N \backslash Nt) \cup \{v'\}$ e v' pertence a Nt. Logo, S inclui $N \backslash Nt$ e

$$|N \backslash Nt'| = |N \backslash Nt| + 1.$$

De fato, S inclui $N \backslash Nt$ e $|Adj(S)| + |N \backslash Nt| = |S|$.

Resta agora considerar o caso em que G' tem um emparelhamento, t'_+, tal que Nt'_+ inclui Nt' e $Nt'_+ \backslash Nt'$ é unitário. Para tanto, seja w o vértice em $Nt'_+ \backslash Nt'$. Se w e v' forem distintos, então (ii) vale, com $t_+ = t'_+ \cup \{\beta\}$ e $Nt_+ \backslash Nt = \{w\}$. Se w e v' coincidirem, então $Nt'_+ = Nt$ e nesse caso (ii) vale, com $t_+ = t'_+ \cup \{\alpha\}$ e $Nt_+ \backslash Nt = \{v\}$. Em ambos os casos, (ii) vale. A demonstração do Lema 3 completa a demonstração da suficiência da condição de Hall. ■■

Com base na segunda demonstração da suficiência da condição de Hall (bem como na asserção do Lema 1), apresentamos nas Figuras 5 e 6 os algoritmos *Hall2* e *Hallauxiliar*. Dados um grafo G, uma bipartição $\{P, N\}$ de G e um emparelhamento t em G, *Hallauxiliar* determina, se existir, um emparelhamento t_+ em G tal que Nt_+ inclui Nt e $Nt_+ \backslash Nt$ é unitário; caso um tal t_+ não exista, então *Hallauxiliar* determina um subconjunto S de N que inclui $N \backslash Nt$ e tal que $|Adj(S)| + |N \backslash Nt| = |S|$.

O algoritmo *Hall2* determina, dado G e uma bipartição $\{P, N\}$, se $|Adj(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de N; em caso afirmativo, *Hall2* determina também um emparelhamento que cobre N; em caso negativo, *Hall2* determina um subconjunto S de N tal que $|Adj(S)| < |S|$.

procedimento *Hall2* (G, N, P):
    início
        $touS \leftarrow \emptyset$;
        repita
            $t \leftarrow touS$;
            $obtidot_+, touS \leftarrow$ *Hallauxiliar* (G, N, P, t)
        até que não $obtidot_+$;
        se $N \backslash Nt = \emptyset$ **então devolva** *sim*, t
                        senão devolva *não*, $touS$ $\{S\}$
    fim

Figura 5 — O algoritmo *Hall2* ("G satisfaz $|Adj(X)| \geqslant |X|$ para cada subconjunto X de N?").

procedimento *Hallauxiliar* (G, N, P, t):
  início
    se $Adj(N \backslash Nt) = \varnothing$ **então devolva** *não*, $N \backslash Nt$;
{escolha} **seja** α *uma aresta com um extremo em* $N \backslash Nt$;
    $u, v \leftarrow$ *extremo de* α *em* P, *extremo de* α *em* N;
    se $u \notin Pt$ **então devolva** *sim*, $t \cup \{\alpha\}$;
    $\beta \leftarrow$ *aresta de* t *que incide em* u;
    $v', G', t' \leftarrow$ *extremo de* β *em* N, $G - u$, $t \backslash \{\beta\}$;
    obtido t_+, *touS* $\leftarrow$ *Haullauxiliar*$(G', N, P \backslash \{u\}, t')$;
    se não *obtido*t_+ **então devolva** *não*, *touS* $\{S\}$
        senão
    se $v' \in Nt'_+$ **então devolva** *sim*, *touS* $\cup \{\alpha\}$ $\{t_+\}$
        senão devolva *sim*, *touS* $\cup \{\beta\}$ $\{t_+\}$
  fim

Figura 6 — O algoritmo *Hallauxiliar*.

Deixamos ao leitor verificar a seguinte afirmação.

PROPOSIÇÃO 2. *O comando escolha de Hallauxiliar é executado não mais do que* $|aG|$ *vezes, e portanto Hall2 causa a execução do referido comando não mais do que* $|N|\,|aG|$ *vezes.*

2. Uma igualdade minimax

Um conjunto X de vértices de um grafo G *cobre* um conjunto x de arestas do grafo (é uma *cobertura* de x) se cada aresta em x incide em pelo menos um vértice em X.

TEOREMA 2 (König). *Seja G um grafo com bipartição* $\{P, N\}$. *Então um emparelhamento máximo em G tem cardinalidade igual à de uma cobertura mínima de aG.*

Demonstração. Pela segunda demonstração da suficiência da condição de Hall, existe um emparelhamento t em G e um subconjunto S de N tais que

$$|Adj(S)| + |N \backslash Nt| = |S|.$$

Seja Z o conjunto $Adj(S) \cup (N \backslash S)$. Então $|Z| = |Nt| = |t|$. Resta mostrar que Z é uma cobertura mínima de aG e t um emparelhamento máximo em G.

Para mostrar que Z é uma cobertura de aG, basta observar que para cada aresta α em aG, ou seu extremo em P pertence a $Adj(S)$ ou seu extremo em N pertence a $N\backslash S$ e em ambos os casos α tem pelo menos um extremo em Z.

Para mostrar que Z é mínima e t é máximo, seja Z' uma cobertura de aG e t' um emparelhamento em G. Como Z' cobre aG então cada aresta α em t' tem pelo menos um extremo, digamos $v\alpha$, em Z'. Como t' é um emparelhamento então arestas distintas α e β em t' têm extremos distintos $v\alpha$ e $v\beta$ em Z'. Portanto $|t'| \leq |Z'|$. Em particular, $|t'| \leq$ $\leq |Z| = |t| \leq |Z'|$ e portanto $|t'| \leq |t|$ e $|Z| \leq |Z'|$. De fato, t é máximo e Z é mínima. A demonstração do teorema de König está completa. ■

EXERCÍCIOS

1. Seja G um grafo com bipartição $\{P, N\}$ e k um inteiro. Mostre que se $g(v) \geq k \geq 1$ para cada vértice v em N e $g(v) \leq k$ para cada vértice v em P então G tem um emparelhamento que cobre N. Mostre ainda que se G é k-regular, $k \geq 1$, então existem k emparelhamentos que cobrem V, dois a dois disjuntos.

2. Sejam n prismas triangulares regulares ($n \geq 1$) tais que cada face (lateral) de cada prisma é colorida com uma de n cores de forma que existam exatamente três das $3n$ faces com cada cor. Mostre que é possível empilhar os prismas pelas bases de forma a obter outro prisma triangular no qual cada face exiba todas as n cores.

3. Mostre que se um grafo G qualquer tem um emparelhamento que cobre um conjunto especificado M de vértices então $|Adj(X)| \geq$ $\geq |X|$, para todo subconjunto X de M. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa. Prove que a recíproca é verdadeira para grafos biparticionáveis. Mostre ainda que se Δ é o maior grau dos vértices de um grafo biparticionável G, então aG é a união de uma coleção (disjunta) que consiste de Δ emparelhamentos.

4. Um grafo G é *par* se $|VG|$ for par, e *ímpar* se $|VG|$ for ímpar. Denota-se por iG o conjunto dos componentes ímpares de um grafo G. Mostre que para todo emparelhamento t de um grafo G, $|Adj(X)\backslash X| \geq |iG[X]|$ para todo subconjunto X de Vt.

5. Sejam t e t_+ emparelhamentos em um grafo G. Descreva os componentes do grafo $G[t \oplus t_+]$, onde $t \oplus t_+ = t \cup t_+ \backslash t \cap t_+$. Mostre que se $|t_+| > |t|$ então existe em G um emparelhamento x tal

que Vx inclui Vt e $Vx \setminus Vt$ consiste de precisamente dois vértices, ambos em $Vt_+ \setminus Vt$.

6. Seja G um grafo, $I(G)$ o conjunto dos subconjuntos Z de V tais que G tem emparelhamento que cobre Z. Mostre que $(V, I(G))$ é um matróide (vide Exercício II.10).
7. Um conjunto X de vértices de um grafo G é *independente* se nenhuma aresta de G tem ambos os extremos em X. Mostre que um conjunto X é independente se e somente se $V \setminus X$ cobre aG. Conclua que S é um conjunto independente máximo se e somente se $V \setminus X$ é uma cobertura mínima de aG. Dê um algoritmo eficiente para obter um conjunto independente máximo num grafo biparticionável.
8. Dê exemplos de grafos em que a cardinalidade de uma cobertura mínima de aG e a de um emparelhamento máximo são distintas.
9. Mostre que se t é um emparelhamento num grafo G sem vértices de grau zero, então uma cobertura $c(t)$ de VG pode ser obtida a partir de t adicionando a t arestas incidentes em vértices de $V \setminus Vt$. Mostre que existe uma cobertura $c(t)$ de V que inclui t e tal que $|c(t)| + |t| \leq |V|$.
10. Mostre que se c é uma cobertura de VG então c inclui um emparelhamento $t(c)$ tal que $|c| + |t(c)| \geq |V|$.
11. Mostre que se t é um emparelhamento máximo em G e c uma cobertura mínima de VG, então $|c| + |t| = |V|$.
12. Mostre que se t é um emparelhamento em G e c uma cobertura de VG tais que $|c| + |t| = |V|$, então c é mínima se e somente se t é máximo.
13. Dê um algoritmo polinomial que obtém uma cobertura mínima de VG, G biparticionável sem vértices de grau zero.
14. Mostre que em todo grafo G, se I é um conjunto independente máximo de vértices (vide Exercício 7) e c uma cobertura mínima de VG, então $|I| \leq |c|$. Dê exemplos em que a desigualdade estrita é observada. Mostre que para grafos biparticionáveis sem vértices de grau zero vale sempre a igualdade.
15. Mostre que se G, com bipartição $\{P, N\}$, tem um emparelhamento que cobre N e outro que cobre P então G tem um emparelhamento que cobre V.
16. Deduza o Teorema de Hall a partir do Teorema de König.

17. (*Teorema de Tutte*) – Um grafo G tem um emparelhamento que cobre V se e somente se $|Adj(X)\backslash X| \geq |iG[X]|$, para todo subconjunto X de V (a necessidade da condição é o enunciado do Exercício 4). Demonstre a suficiência da condição, por indução em $|V|$, da seguinte maneira:

    (a) Defina um subconjunto S de V como *crítico* se $|Adj(S)\backslash \widehat{S}| = |iG[S]|$ e se S é não vazio.
    (b) Mostre que V é crítico quando G é não vazio.
    (c) Mostre que se S é crítico minimal, então nenhum componente de $G[S]$ é par (remova um vértice de um componente par de $G[S]$).
    (d) Para cada conjunto crítico S, defina um grafo $H(S)$ com bipartição $\{iG[S], Adj(S)\backslash S\}$, cujas arestas são as arestas do corte de S e tal que se α é uma aresta de $\delta(S)$ com um extremo, u, num componente ímpar, C, de $G[S]$, e o outro extremo, v, em $Adj(S)\backslash S$, então C e u são os extremos de α em H. Mostre que $H(S)$ tem um emparelhamento $t(S)$ que cobre $VH(S)$.
    (e) Mostre que para cada conjunto crítico minimal S, e cada componente ímpar K de $H[S]$, se v é o vértice de VK incidente à aresta de $t(S)$, então $K' = K - v$ tem um emparelhamento que cobre VK' pois se $|AdjK'(T)\backslash T| < |iK'[T]|$, para algum $T \subseteq VK'$, então $S\backslash\{v\}\backslash(AdjK'(T)\backslash T)$ é crítico.
    (f) Mostre que se S é crítico então $G' = G - [S \cup Adj(S)]$ tem um emparelhamento que cobre VG'.

18. Mostre que todo grafo 3-regular sem arestas de corte tem um emparelhamento que cobre VG. Sugestão: use o Teorema de Tutte (Exercício 17).

19. Mostre que para toda aresta α de um grafo G 3-regular sem arestas de corte existe um emparelhamento em G que cobre VG e contém α.

20. Dê um exemplo de um grafo simples 3-regular que não têm um emparelhamento que cobre VG.

21. O grafo 3-regular da Figura 7, o grafo de Petersen, tem, para cada uma de suas arestas α, um emparelhamento, $t\alpha$, que contém α e cobre VG; mas G não possui três emparelhamentos dois a dois disjuntos cuja união é aG. Demonstre estas afirmações.

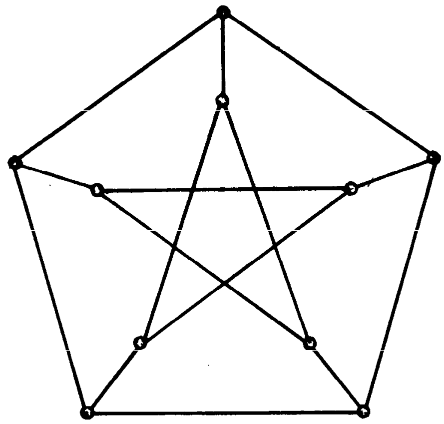

Figura 7 — O grafo de Petersen.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

O Teorema de Hall foi provado pela primeira vez por Philip Hall [46] em 1935, e sua demonstração era relativamente complicada. Várias outras demonstrações apareceram deste então (veja Mirsky [84]). A demonstração do Teorema de Hall aqui apresentada é de Halmos e Vaughan [48]. A demonstração do Lema 3 é nova, de Lucchesi e Younger. Um algoritmo eficiente equivalente ao algoritmo *Hall2* foi dado por M. Hall Jr. [44].

König provou o teorema que leva seu nome em 1931 [63]. Aqui no entanto damos uma demonstração que usa o Teorema de Hall como lema, apesar de historicamente este ter sido provado posteriormente.

Existem inúmeros teoremas na literatura cuja primeira demonstração induz um algoritmo exponencial; somente mais tarde é obtida outra que induz um algoritmo polinomial. Assim temos por exemplo o Teorema de Tutte [120] (vide Exercício 17), do qual Edmonds [23] deu uma demonstração que induz um algoritmo eficiente. Outro exemplo pode ser encontrado em Lucchesi [69], Lovász [68] e em Lucchesi e Younger [70].

Para um grafo biparticionável G, existem algoritmos polinomiais que determinam emparalhamentos máximos, conjuntos independentes máximos e coberturas mínimas de aG e VG (vide Exercícios 7, 13 e 14). Para grafos G arbitrários os problemas de determinar se G tem uma cobertura de aG com no máximo k arestas ou um conjunto independente com pelo menos k vértices (k dado) são $\mathcal{NP}$-m-completos [57] (vide Capítulo B.IV.). Por outro lado existem algoritmos polinomiais para determinar emparelhamentos máximos e coberturas mínimas de VG, G genérico [23].