CAPÍTULO II

FLORESTAS

1. Florestas e árvores

Uma *floresta* é um grafo sem circuitos. Uma *árvore* é uma floresta conexa. (O grafo da Figura 1 é uma floresta com seis componentes, cada um dos quais é uma árvore.)

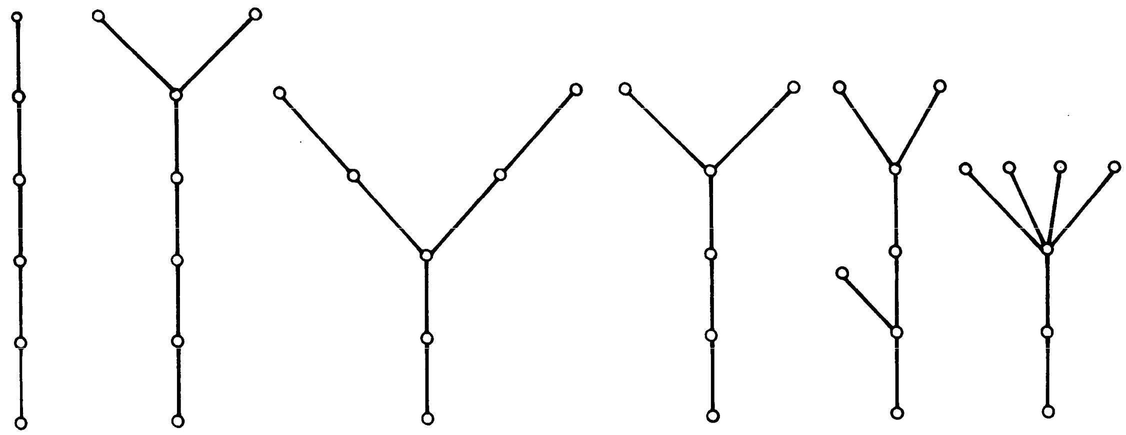

Figura 1 — Uma floresta com seis árvores.

O Teorema 1, abaixo enunciado, é um corolário do Teorema I.3:

TEOREMA 1. *Um grafo é uma floresta se e somente se cada uma de suas arestas é de corte.*

TEOREMA 2. *Para todo grafo G,* $|VG| \leq |aG| + |cG|$. *Ademais a igualdade subsiste se e somente se G é uma floresta.*

Demonstração. Por indução em $|aG|$. Se aG for vazio então certamente G é uma floresta e $|VG| = |aG| + |cG|$.
Suponha então que aG contém uma aresta, α. Por indução,

$$|V(G\text{-}\alpha)| \leq |a(G\text{-}\alpha)| + |c(G\text{-}\alpha)|,$$

e a igualdade subsiste se e somente se $G\text{-}\alpha$ é uma floresta.

Pelo Teorema I.3,

$$|c(G\text{-}\alpha)| \leq |cG| + 1,$$

e a igualdade subsiste se e somente se não existe em G circuito que passe por α.

Ora, $V(G\text{-}\alpha) = VG$ e $|a(G\text{-}\alpha)| = |aG| - 1$. Portanto $|VG| \leq$ $\leq |aG| + |cG|$. Ademais a igualdade subsiste se e somente se $G\text{-}\alpha$ é uma floresta e não existe em G circuito que passe por α. Ou seja, $|VG| = |aG| + |cG|$ se e somente se G é uma floresta. ■

TEOREMA 3. *Um grafo G é uma floresta se e somente se cada um de seus subgrafos com pelo menos uma aresta tem pelo menos dois vértices com grau igual a* 1.

Demonstração. Considere inicialmente, o caso em que G é uma floresta. Seja H um subgrafo de G com pelo menos uma aresta, α, e sejam u e v os extremos de α. Como G é uma floresta, então u e v são distintos. Portanto, (u, α, v) é um caminho em H que passa por α. Dentre os caminhos em H que passam por α, escolha um, C, que não seja seção de nenhum outro caminho em H que passe por α. Como VH é finito, então C existe. Sejam $n, v_0, v_1, \ldots, v_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $C = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$. Vamos agora mostrar que v_0 e v_n são distintos e têm ambos grau 1 em H.

Para mostrar que v_0 e v_n são distintos, basta observar que C é um caminho que passa por α: portanto $n > 0$ e $v_0, v_1, \ldots, v_n$ são dois a dois distintos.

Para mostrar que o grau de v_0 é igual a 1 em H, basta provar que a ligação α_1 é a única aresta em H incidente a v_0. Para tanto, seja β uma aresta em H incidente a v_0, seja x o extremo de β distinto de v_0. Pela escolha de C, x pertence a VC (pois caso contrário $(x, \beta, v_0)C$ é um caminho em H que passa por α, é distinto de C e tem C como seção). Seja i tal que $x = v_i$ $(0 \leq i \leq n)$. Como G é uma floresta, então o caminho $(v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_i, v_i)$ passa por β (pois caso contrário $(v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_i, v_i)$ (v_i, β, v_0) seria um circuito em G). Finalmente, β, uma aresta incidente a v_0 pela qual passa o caminho C, é igual a α_1, pois nenhuma aresta em $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ incide em v_0. De fato, a ligação α_1 é a única aresta em H que incide em v_0 e portanto $gH(v_0) = 1$. Analogamente, a ligação α_n é a única aresta em H que incide em v_n e portanto $gH(v_n) = 1$.

Para completar a demonstração do teorema, resta agora considerar o caso em que G não é uma floresta. Seja então C um circuito em G. O subgrafo $G[aC]$ de G tem pelo menos uma aresta e é 2-regular. A demonstração do Teorema 3 está completa. ■

TEOREMA 4. *Um grafo G é uma floresta se e somente se não existem duas trilhas distintas com mesma origem e mesmo término.*

Demonstração. Considere inicialmente o caso em que G é uma floresta. Sejam T_1 e T_2 trilhas em G, ambas com a mesma origem, u, e mesmo término, v. Provaremos, por indução na soma dos comprimentos das trilhas T_1 e T_2, que $T_1 = T_2$. Para tanto, observe que $G[aT_1 \cup aT_2]$, um subgrafo de G, é também uma floresta; pelo Teorema 3, ou $aT_1 \cup aT_2$ é vazio ou $G[aT_1 \cup aT_2]$ tem dois vértices distintos, ambos com grau 1.

Se $aT_1 \cup aT_2$ é vazio, então $T_1 = (u) = (v) = T_2$. Suponha pois que $G[aT_1 \cup aT_2]$ tem dois vértices distintos, ambos com grau 1. Como cada vértice interno de T_1 ou de T_2 tem grau maior do que 1, então u e v são distintos, e ambos têm grau 1 em $G[aT_1 \cup aT_2]$. Portanto, existem α, u', T'_1 e T'_2 tais que $T_1 = (u, \alpha, u')T'_1$ e $T_2 = (u, \alpha, u')T'_2$. Por indução, $T'_1 = T'_2$. Logo, $T_1 = T_2$.

Resta agora considerar o caso em que G não é uma floresta. Seja então C um circuito em G, u a sua origem. As trilhas (u) e C são distintas, ambas têm a mesma origem e o mesmo término. A demonstração do teorema está completa. ■

2. Subflorestas maximais

Dado um grafo G, um subgrafo H de G e uma aresta α de G, $H + \alpha$ denota o subgrafo de G obtido a partir de H adicionando-se a aresta α (e, eventualmente, os extremos de α); assim, $H + \alpha$ é o subgrafo de G que tem $VH \cup \psi(\alpha)$ como conjunto de vértices e $aH \cup \{\alpha\}$ como conjunto de arestas.

LEMA 1. *Seja H uma subfloresta de um grafo G, α uma aresta de G. Se $H + \alpha$ não é uma floresta então o conjunto $\{aC \mid C$ é um circuito em $H + \alpha\}$ é unitário.*

Demonstração Suponha que $H + \alpha$ não é uma floresta, seja C um circuito em $H + \alpha$. Como H é uma floresta, então C passa por α. Logo, se u e v denotam os extremos de α, então ou (u, α, v) ou (v, α, u) é uma seção de C. Uma vez que $aC = aR(C)$, podemos ajustar a notação, considerando o reverso $R(C)$ de C se necessário, de forma que (u, α, v) seja uma seção de C. Sejam então C_1 e C_2 trilhas em H tais que $C = C_1\,(u, \alpha, v)C_2$; C_2C_1 é então uma trilha de v a u em H. Logo, $aC = \{\alpha\} \cup aT$, onde T é uma trilha de v a u em H. Como esta conclusão vale para todo circuito C de $H + \alpha$ e como T é única pelo Teorema 4, então $\{aC \mid C \text{ é um circuito em } H + \alpha\}$ é de fato unitário. ■

TEOREMA 5. *Cada subfloresta F de um grafo G é um subgrafo de alguma subfloresta máxima de G.*

Demonstração. Dentre as subflorestas máximas de G, escolha uma, H, tal que $aF \backslash aH$ seja minimal.

Vamos provar que F é um subgrafo de H. Ora, H, sendo máxima, certamente gera G. Basta portanto provar que aF é um subconjunto de aH.

Para tanto, suponha que, pelo contrário, $aF \backslash aH$ contém uma aresta, α. Pela definição de H, $H + \alpha$ não é uma floresta: seja C um circuito em $H + \alpha$. Como F é uma floresta e α é uma de suas arestas, então C passa por alguma aresta em $aH \backslash aF$, digamos, β. Seja H' o grafo $(H + \alpha) - \beta$. Pelo Lema 1, H' é uma floresta. De fato, H' é uma subfloresta de G cujo tamanho é idêntico ao de H; ademais, $aF \backslash aH'$, igual a $aF \backslash aH \backslash \{\alpha\}$, é um subconjunto próprio de $aF \backslash aH$, em contradição à definição de H. Portanto, F é um subgrafo da subfloresta máxima H de G. ■

COROLÁRIO 1. *Uma subfloresta de um grafo é máxima se e somente se for maximal.*

Com base no Corolário 1, apresentamos o algoritmo da Figura 2, para a obtenção de uma subfloresta máxima de um grafo G.[1]

(1) Tanto neste como noutros algoritmos apresentados a seguir, incluimos novas construções, de significado óbvio, mas que não constam da definição dada no Capítulo A.I.

procedimento *subfloresta máxima* (G):
  início
    $VF, aF \leftarrow VG, \varnothing$; {$F$ é o subgrafo de G, sem arestas, que gera G}
    para cada *aresta* α *de* aG **faça**
      se $F + \alpha$ *é uma floresta* **então** $F \leftarrow F + \alpha$;
    devolva F
  fim

Figura 2 — Um algoritmo para a determinação de uma subfloresta máxima de um grafo G (para determinar se $F+\alpha$ é ou não uma floresta, basta determinar se passa ou não um circuito por α em $F+\alpha$; vide Exercício I.46).

EXERCÍCIOS

1. Mostre que um grafo é uma floresta se e somente se cada um de seus componentes é uma árvore.
2. Mostre que para todo grafo G não vazio, as seguintes afirmações são equivalentes:
   (i) G é uma árvore,
   (ii) $|V| = |a| + 1$ e G é uma floresta,
   (iii) $|V| = |a| + 1$ e G é conexo,
   (iv) para w e x vértices quaisquer de G existe exatamente uma trilha de w a x em G.
3. Seja G um grafo tal que $|a| \geq |V| + 1$, α uma aresta de G. Mostre que G tem um circuito que não passa por α.
4. Um emparelhamento t de um grafo G *cobre* um subconjunto X de VG se cada vértice em X é incidente a uma aresta de t. Mostre que nenhuma floresta G tem mais do que um emparelhamento que cobre VG.
5. Prove que todo grafo conexo G com pelo menos uma ligação tem dois vértices distintos, v_1 e v_2, tais que $G - v_1$ e $G - v_2$ são ambos conexos.
6. Dado um grafo conexo G e um vértice v de G, a *excentricidade* de v em G é igual ao máximo do conjunto de distâncias de v aos vértices de G. Um vértice de G é um *centro* de G se sua excentricidade em G for mínima. Mostre que toda árvore tem no máximo dois centros, e se tiver exatamente dois centros então estes são adjacentes.

7. Caracterize a classe dos grafos G nos quais não existe mais do que um caminho de u a v em G, quaisquer que sejam os vértices u e v de G.

8. Seja $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ uma seqüência de números naturais positivos. Mostre que existe uma árvore cuja seqüência de graus é d se e somente se $\Sigma d_i = 2(n-1)$. Mostre que existe uma floresta cuja seqüência de graus é d se e somente se Σd_i for par e menor do que $2n$.

9. Um *matróide* M consiste de um conjunto finito aM de elementos chamados *arestas* e um conjunto CM de elementos chamados *circuitos*, que satisfazem as seguintes propriedades:
   (i) cada circuito em CM é um subconjunto não vazio de aM,
   (ii) nenhum circuito em CM é subconjunto de outro circuito em CM,
   (iii) se C_1 e C_2 são circuitos distintos e α é uma aresta que pertence a C_1 e a C_2 então existe um circuito em CM que é subconjunto de $(C_1 \cup C_2)\backslash\{\alpha\}$.

   Mostre que para qualquer grafo G, se *cir* G denota o conjunto $\{aC \mid C$ é um circuito em $G\}$ então $(aG$, *cir* $G)$ é um matróide. Mostre que para qualquer grafo G, se *cor* G denota o conjunto de cortes minimais não vazios de G, então $(aG$, *cor* $G)$ é um matróide.

10. Considere a seguinte definição alternativa de matróide: um matróide M consiste de um conjunto finito aM de elementos chamados *arestas* e um conjunto IM de subconjuntos de aM, chamados *conjuntos independentes*, que satisfazem as seguintes propriedades:
   (i) o conjunto vazio é independente,
   (ii) todo subconjunto de um conjunto independente é independente,
   (iii) para cada subconjunto x de aM, todos os subconjuntos de x independentes e maximais têm a mesma cardinalidade.

   Mostre que se IM denota o conjunto $\{aF \mid F$ é uma subfloresta de $G\}$ então (aG, IM) é um matróide, de acordo com esta definição alternativa. Mostre que se IM denota o conjunto $\{z \mid z \subseteq aG$ e todo corte não vazio de G tem uma aresta em $aG\backslash z\}$ então (aG, IM) é um matróide, de acordo com esta definição alternativa.

11. Mostre que se (aM, CM) é um matróide, de acordo com a definição dada no Exercício 9, e se IM denota o conjunto $\{z \mid z \subseteq aM$ e todo elemento em CM tem uma aresta em $aM\backslash z\}$ então (aM, IM)

é um matróide, de acordo com a definição alternativa, dada no Exercício 10.

12. Mostre que se (aM, IM) é um matróide, de acordo com a definição alternativa, dada no Exercício 10, e se CM denota o conjunto de elementos minimais do conjunto $\{z \mid z \subseteq aM$ e $z \notin IM\}$ então (aM, CM) é um matróide de acordo com a definição dada no Exercício 9.

13. Mostre que se S é um conjunto finito e não vazio e A é um conjunto de subconjuntos de S tal que $|A| = |S|$, então existe um elemento x de S tal que $|Ax| = |S|$, onde Ax denota o conjunto $\{X \cup \{x\} \mid X \in A\}$.

14. Mostre que um grafo G é conexo se e somente se G tem uma subárvore geradora. Escreva um algoritmo linear que determina se G é conexo e, em caso afirmativo, dê também uma subárvore geradora de G. Escreva um algoritmo linear que obtém uma subfloresta máxima de um grafo.

15. (*Algoritmo de Kruskal*). Suponha que associado a cada aresta α de um grafo G existe um número real $p(\alpha)$, chamado *peso* de α. O *peso* $p(H)$ de um subgrafo H de G é então definido como a soma dos pesos de suas arestas. Demonstrle a seguinte proposição, emulando a demonstração do Teorema 5: "seja F uma subfloresta de G, seja z o conjunto das arestas α em $aG \backslash aF$ tais que $F + \alpha$ é uma floresta, seja α uma aresta em z, de peso máximo, seja $\mathscr{F}$ o conjunto das subflorestas de G que têm F como subfloresta. Então $F + \alpha$ é subfloresta de alguma floresta de peso máximo em $\mathscr{F}$". Com base nesta propriedade, dê um algoritmo polinomial que determina uma subfloresta de peso máximo de um grafo, dados o grafo e a função peso, esta através de uma tabela.

16. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes, para qualquer grafo G conexo:
    (i) H é um subgrafo gerador conexo minimal de G,
    (ii) H é um subgrafo gerador conexo mínimo de G,
    (iii) H é uma subárvore geradora de G,
    (iv) H é uma subárvore maximal de G,
    (v) H é uma subárvore máxima de G.

17. Modifique o algoritmo de Kruskal (Exercício 15) de forma a obter outro que determina uma subárvore geradora de peso mínimo, de um grafo conexo G.

18. Mostre que um grafo G é uma floresta se e somente se cada subconjunto de aG é um corte em G.

19. Mostre que se uma floresta G tem um vértice v cujo grau $g(v)$ é positivo, então G tem pelo menos $g(v)$ vértices com grau 1.

20. Sejam F e H subflorestas maximais de um grafo G. Mostre que para cada aresta α em $aF \backslash aH$ existe uma aresta, β, em $aH \backslash aF$ tal que $(H+\alpha)-\beta$ e $(F+\beta)-\alpha$ são ambas subflorestas maximais de G.

21. Considere o "problema da mochila": dados $n+1$ números reais positivos $x_1, \ldots, x_n$ e y, determine um subconjunto I de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que
(i) $\sum\limits_{i \in I} x_i \leq y$
e
(ii) $\sum\limits_{i \in I} x_i$ seja o maior possível.
Mostre que um algoritmo ganancioso não obtém um I ótimo (vide Notas Bibliográficas).

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

O algoritmo da Figura 2 é uma versão simplificada do algoritmo de Kruskal [64] (vide Exercício 15). Algoritmos como esses são exemplos típicos de algoritmos "gananciosos" (o algoritmo da Figura 2, por exemplo, "toma a primeira aresta α" que pode ser adicionada a F de forma que $F+\alpha$ seja ainda uma floresta). Este tipo de algoritmo pode ser usado sempre que maximal e máximo forem indistingüíveis (vide Exercícios 9, 10, 11 e 12). O conceito de matróide (Exercício 9) foi introduzido por Whitney [128] e bastante desenvolvido por Tutte [121], [122]. A definição alternativa de matróide (Exercício 10) foi dada por Edmonds, que também relaciona matróides e algoritmos gananciosos em [24].

Uma versão bastante eficiente ($O(|aG| log_2\ log_2 |VG|)$) do algoritmo de Kruskal é dada em [131].