

PARTE C

**TEORIA  
DOS GRAFOS**



## GRAFOS E SUBGRAFOS

### 1. Grafos e grafos simples

Muitas situações podem ser convenientemente descritas através de diagramas que consistem de um conjunto de pontos, juntamente com linhas que ligam alguns pares destes pontos. Por exemplo, os pontos poderiam representar pessoas, as linhas ligando pares de amigos; os pontos poderiam representar centros de comunicações, as linhas ligações entre os centros. A abstração matemática de situações desse tipo dá lugar ao conceito de grafo (veja Figura 1).<sup>(1)</sup>

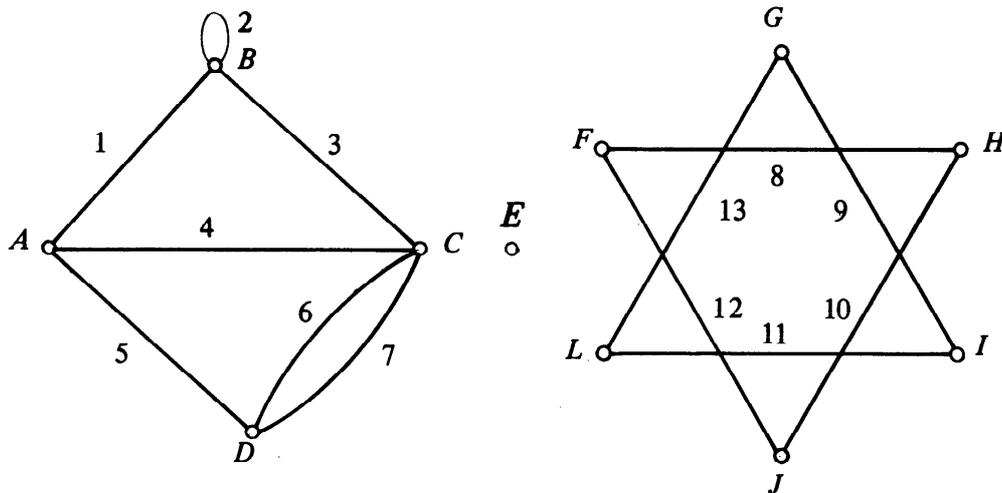
Um *grafo*  $G$  consiste de um conjunto  $VG$  de elementos chamados *vértices*, um conjunto  $aG$  de elementos chamados *arestas* e uma *função de incidência*  $\psi G$  que associa a cada aresta  $\alpha$  de  $G$  um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de  $G$ , chamados de *extremos* de  $\alpha$ .

Grafos podem ser representados por diagramas, onde cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos que representam seus extremos. (Subentende-se que nenhuma linha passa por pontos que representem vértices outros que os extremos da aresta correspondente.)

Convém ressaltar que duas arestas no diagrama de um grafo podem se interceptar num ponto que não representa um vértice. Os grafos que têm um diagrama cujas arestas não se interceptam a não ser nos extremos são ditos *planares*. O grafo da Figura 1 é planar (veja Exercício 1), ao passo que o grafo da Figura 2 não é planar.

Muitos termos utilizados na teoria dos grafos advêm da representação em diagramas. Assim, os extremos de uma aresta são *incidentes* à aresta, e vice-versa. Os extremos de uma aresta são *adjacentes* (mesmo que coincidam); são *adjacentes* também arestas com pelo menos um extremo em comum. Para  $X$  um subconjunto de  $VG$ ,  $AdjG(X)$  denota o conjunto dos vértices de  $G$  adjacentes a, pelo menos, um dos vértices de  $X$ . Uma aresta é um *laço* se seus extremos coincidem, uma

(1) – O termo *grafo* não consta, ainda, nos dicionários da língua portuguesa. No entanto, o uso é unânime, e preferível em nossa opinião, ao uso do termo gráfico.



Grafo  $Z$ :  $VZ = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L\}$   
 $aZ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

$\alpha$	$\psi Z(\alpha)$
1	$\{A, B\}$
2	$\{B\}$
3	$\{B, C\}$
4	$\{A, C\}$
5	$\{A, D\}$
6	$\{C, D\}$
7	$\{C, D\}$
8	$\{F, H\}$
9	$\{G, I\}$
10	$\{H, J\}$
11	$\{I, L\}$
12	$\{F, J\}$
13	$\{G, L\}$

Figura 1 — Um grafo  $Z$  e uma representação, em diagrama, de  $Z$ .

*ligação* caso contrário. A aresta 2 do grafo  $Z$  da Figura 1 é um laço; as demais arestas desse grafo são ligações.

Um grafo  $G$  é *finito* se  $VG$  e  $aG$  forem ambos finitos; o termo “grafo” designará sempre um grafo finito. O *tamanho* de um grafo  $G$  é o inteiro  $|VG| + |aG|$ . O grafo *vazio* é o grafo de tamanho zero, sem arestas nem vértices.

Um grafo  $G$  é *simples* se não tem laços nem duas ligações distintas com o mesmo par de extremos. Um grafo *completo* é um grafo simples cujos vértices são dois a dois adjacentes (veja Figura 2). Um *triângulo* é um grafo completo com exatamente 3 vértices.

Dois grafos  $G$  e  $H$  são *complementares* se forem ambos simples, com  $VG = VH$  e tais que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes em  $G$  se e somente se não o forem em  $H$ .

Um  $n$ -cubo ( $n \geq 1$ ) é um grafo simples cujos vértices são  $n$ -uplas, ordenadas, sobre o conjunto  $\{0, 1\}$ , e no qual dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma coordenada (veja diagrama do 3-cubo na Figura 3).

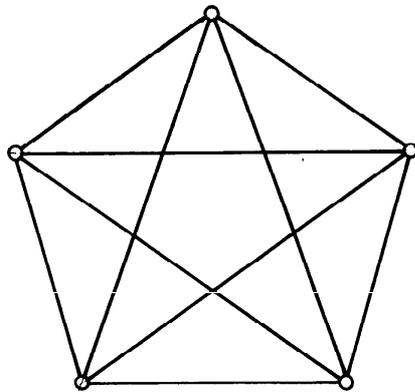


Figura 2 — Um grafo completo com 5 vértices.

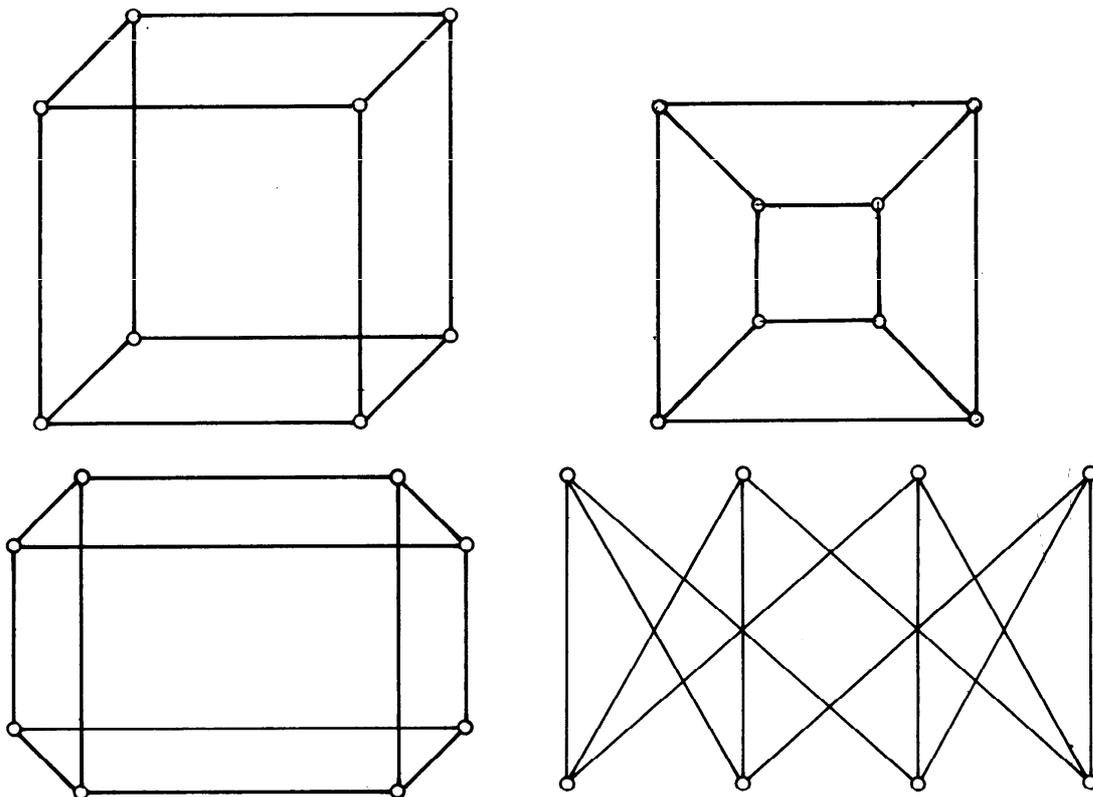


Figura 3 — Quatro representações do cubo (3-cubo).

Um par não ordenado  $\{X, Y\}$  de conjuntos de vértices de um grafo  $G$  é uma *bipartição* de  $G$  se  $X \cup Y = VG$ ,  $X \cap Y = \emptyset$  e cada aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$ , o outro em  $Y$ . Um grafo  $G$  é *biparticionável* se tiver uma bipartição. (Uma das representações do cubo dadas na Figura 3 sugere que o cubo é biparticionável – veja Exercício 3.)

Usaremos normalmente a letra  $G$  para designar um grafo; assim, quando não houver possibilidade de ambigüidade omitiremos a letra  $G$  e escreveremos por exemplo,  $V$ ,  $a$ ,  $\psi$  e  $Adj$ , ao invés de  $VG$ ,  $aG$ ,  $\psi G$  e  $AdjG$ , respectivamente.

## 2. Algumas representações de grafos no computador

Uma maneira de representar um grafo  $G$  no computador, e que reflete diretamente a definição de grafo, consiste em representar os conjuntos  $VG$  e  $aG$ , e a tabela que define a função de incidência  $\psi G$ . Para tanto, é conveniente “dar novos nomes” aos vértices e às arestas; assim, é comum impor as igualdades<sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} VG &= \{1, 2, \dots, |VG|\} \\ aG &= \{1, 2, \dots, |aG|\}. \end{aligned}$$

A representação de  $VG$  torna-se então trivial: basta ter a cardinalidade de  $VG$ ; a representação de  $aG$  fica igualmente simples. A função de incidência  $\psi G$  pode nesse caso ser representada pelo *vetor de vértices incidentes*, um vetor com  $|aG|$  coordenadas em que a  $j$ -ésima coordenada é um par  $(u, v)$ , onde  $u$  e  $v$  são os extremos da aresta  $j$ .

Uma outra estrutura que pode ser usada para representar um grafo  $G$  é o *vetor de arestas incidentes*, um vetor com  $|VG|$  coordenadas em que a  $j$ -ésima coordenada é uma lista das arestas incidentes ao vértice  $j$ .

Tanto o vetor de vértices incidentes quanto o vetor de arestas incidentes são representações razoavelmente “concisas” de um grafo. Nas aplicações em que freqüentemente é necessário obter um extremo de uma aresta arbitrária e uma aresta incidente a um vértice arbitrário,

---

(2) – O leitor atento notará que nada há na definição de grafo que exija que os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo sejam disjuntos. Contudo, se um elemento é usado como uma aresta e como um vértice, deve-se deixar claro, a cada uso, se se trata do vértice ou da aresta.

pode-se usar o *par de vetores de incidências*, que consiste do vetor de vértices incidentes e do vetor de arestas incidentes.

Nas aplicações em que freqüentemente se torna necessário determinar se dois vértices arbitrários são ou não adjacentes, pode-se lançar mão da *matriz de adjacências*, uma matriz quadrada com  $|VG|$  linhas e  $|VG|$  colunas, onde o elemento correspondente à  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é igual ao número de arestas cujos extremos são os vértices  $i$  e  $j$ . Convém ressaltar que esta matriz a rigor não representa um grafo, pois “ignora os nomes das arestas”.

Outra representação de um grafo  $G$  é a *matriz de incidências*, uma matriz com  $|VG|$  linhas e  $|aG|$  colunas, em que o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é o número de vezes (0, 1 ou 2) que a aresta  $j$  incide no vértice  $i$ .

### 3. Isomorfismo entre grafos

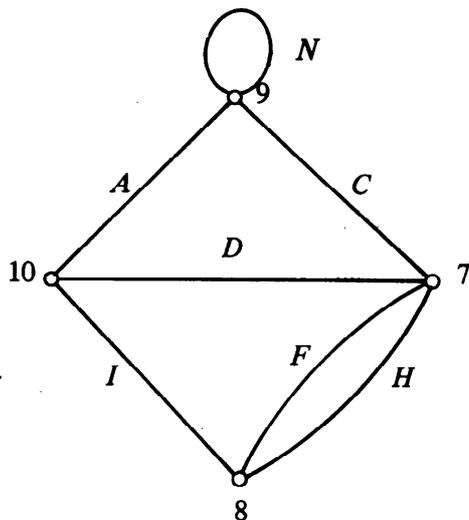
Dois grafos  $G$  e  $H$  são *iguais* se  $VG = VH$ ,  $aG = aH$  e  $\psi G = \psi H$ . Se dois grafos são iguais então podem certamente ser representados pelo mesmo diagrama. Por outro lado, grafos distintos podem, às vezes, ser representados pelo mesmo diagrama, a menos dos nomes dos vértices e arestas. Por exemplo, o grafo  $Y$ , ilustrado na Figura 4, é distinto do grafo  $Z$  ilustrado na Figura 1; no entanto, ambos são representados pelo mesmo diagrama. Dizemos então que  $Y$  e  $Z$  são isomorfos. De fato, é possível “dar novos nomes aos vértices e às arestas de  $Y$ , de forma a torná-lo igual a  $Z$ ”.

Formalmente, um grafo  $G$  é *isomorfo* a outro  $H$  se existirem bijeções  $f: VG \rightarrow VH$  e  $\phi: aG \rightarrow aH$  tais que para cada aresta  $\alpha$  de  $G$ , se  $u$  e  $v$  são os extremos de  $\alpha$  em  $G$ , então  $f(u)$  e  $f(v)$  são os extremos de  $\phi(\alpha)$  em  $H$ <sup>(3)</sup>; o par  $(f, \phi)$  é então um *isomorfismo* de  $G$  em  $H$ . Convém ressaltar que se  $G$  é isomorfo a  $H$  então  $H$  é isomorfo a  $G$ : portanto pode-se simplesmente dizer que  $G$  e  $H$  são isomorfos (veja Exercícios 10 e 22).

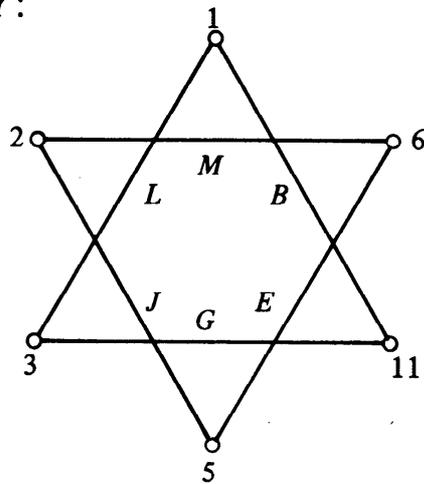
Note que se  $G$  e  $H$  são grafos simples, então  $G$  e  $H$  são isomorfos se e somente se existe uma bijeção  $f$  de  $VG$  em  $VH$  tal que, para quaisquer vértices  $u$  e  $v$  de  $G$ ,  $u$  e  $v$  são adjacentes (em  $G$ ) se e somente se  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes (em  $H$ ) (veja Exercício 16).

---

(3) Assim,  $f[\psi G(\alpha)] = \psi H[\phi(\alpha)]$ .



Grafo Y:



Isomorfismo  $(f, \phi)$  de Y em Z:

$u$	$f(u)$
1	G
2	F
3	L
4	E
5	J
6	H
7	C
8	D
9	B
10	A
11	I

$\alpha$	$\phi(\alpha)$
A	1
B	9
C	3
D	4
E	10
F	6
G	11
H	7
I	5
J	12
L	13
M	8
N	2

Figura 4 — Um grafo Y isomorfo ao grafo Z da figura 1, e um isomorfismo  $(f, \phi)$  de Y em Z.

Um grafo  $G$  é *autocomplementar* se for simples e isomorfo a outro  $H$ , com  $G$  e  $H$  complementares.

Um *automorfismo* de  $G$  é um isomorfismo de  $G$  em  $G$ . Um grafo  $G$  é *transitivo nos vértices* se para quaisquer vértices  $u$  e  $v$  existe um automorfismo  $(f, \phi)$  de  $G$  tal que  $f(u) = v$ . Analogamente,  $G$  é *transitivo nas arestas* se para quaisquer arestas  $\alpha$  e  $\beta$  existe um automorfismo  $(f, \phi)$  de  $G$  tal que  $\phi(\alpha) = \beta$ .

#### 4. Cardinalidade e inclusão. Subgrafos

Dado um conjunto  $C$  de conjuntos, dizemos que um conjunto  $m$  em  $C$  é *máximo* em  $C$  se nenhum conjunto em  $C$  tem cardinalidade maior do que a de  $m$ ; analogamente, um conjunto  $m'$  de  $C$  é *mínimo* em  $C$  se nenhum conjunto em  $C$  tem cardinalidade menor do que a de  $m'$ .

EXEMPLO 1. Dado um grafo  $G$ , um *emparelhamento* em  $G$  é um conjunto  $t$  de ligações de  $G$  duas a duas não adjacentes. Considere o grafo da Figura 5, seja  $C$  o conjunto dos emparelhamentos nesse grafo. Então nem o emparelhamento  $\{2\}$  nem o emparelhamento  $\{2, 5\}$  são máximos em  $C$ ; os emparelhamentos  $\{1, 3, 5\}$  e  $\{1, 3, 6\}$ , por exemplo, são ambos máximos em  $C$ . O emparelhamento vazio é o único mínimo em  $C$ .

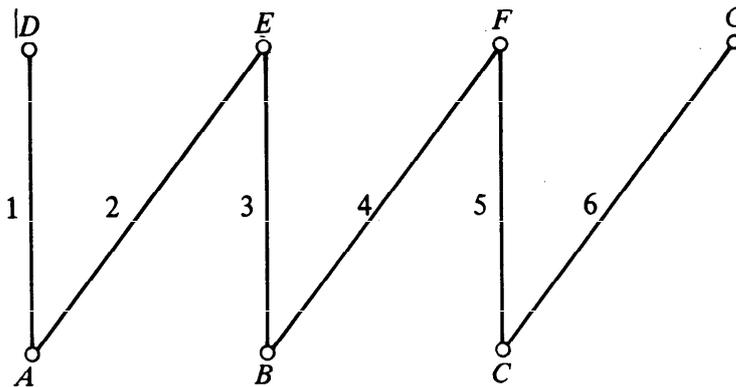


Figura 5 — O grafo dos Exemplos 1 e 2.

Dado um conjunto  $C$  de conjuntos, dizemos que um conjunto  $m$  em  $C$  é *maximal* em  $C$  se nenhum conjunto em  $C$  inclui propriamente  $m$ ; analogamente, um conjunto  $m'$  em  $C$  é *minimal* se nenhum conjunto em  $C$  é um subconjunto próprio de  $m'$ .

EXEMPLO 2. Utilizando ainda o conjunto  $C$  do exemplo anterior, nem o emparelhamento  $\{2\}$  nem o emparelhamento  $\{2, 4\}$  são maximais em  $C$ ; os emparelhamentos  $\{2, 5\}$  e  $\{2, 4, 6\}$  são ambos maximais em  $C$ . O emparelhamento vazio é o único minimal em  $C$ .

Pode-se demonstrar que todo conjunto finito e não vazio de conjuntos finitos tem elementos máximos e mínimos, e que todo elemento máximo é maximal, todo elemento mínimo é minimal (vide Exercício 27).

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de outro  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se  $VH$  inclui  $VH$ ,  $aG$  inclui  $aH$  e, para toda aresta de  $H$ , seus extremos em  $H$  são também seus extremos em  $G$ ;  $H$  é um subgrafo *próprio* de  $G$  ( $H \subsetneq G$ ) se  $H$  é um subgrafo de  $G$ , mas distinto de  $G$ . O grafo da Figura 6 é um subgrafo próprio do grafo  $Z$  da Figura 1.

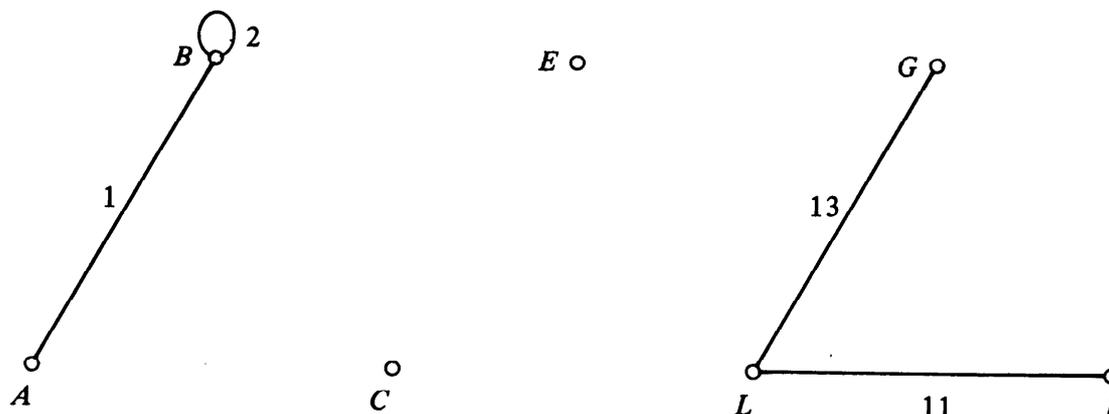


Figura 6 — Um subgrafo próprio do grafo  $Z$  da Figura 1.

Dado um conjunto  $C$  de grafos, um grafo  $G$  é *máximo* em  $C$  se nenhum outro grafo em  $C$  tem tamanho maior do que o de  $G$ ; um grafo  $H$  é *maximal* em  $C$  se  $H$  não é subgrafo próprio de nenhum grafo em  $C$ . Analogamente se definem grafos mínimos e minimais.

Para  $X$  um subconjunto de  $V$ , o *subgrafo de  $G$  gerado por  $X$* ,  $G[X]$ , é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $VH = X$  e  $aH$  é o conjunto das arestas de  $G$  que têm ambos os extremos em  $X$  (vide Exercício 29). Para  $X$  um subconjunto de  $V$ ,  $v$  um vértice de  $V$ ,  $G-X$  abrevia  $G[V \setminus X]$  e  $G-v$  abrevia  $G - \{v\}$ .

Um grafo  $H$  *gera* outro  $G$  se  $H$  é um subgrafo de  $G$  tal que  $G = G[VH]$ . Grafo  $H$  é um *subgrafo gerador* de  $G$  se  $H$  gera  $G$ . Assim, um grafo  $H$  gera  $G$  se e somente se  $H$  é um subgrafo de  $G$  com  $VH = VG$  (vide Exercício 30).

Para  $x$  um subconjunto de  $a$ , o *subgrafo de  $G$  gerado por  $x$* ,  $G[x]$ , é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $aH = x$  e  $VH$  é o conjunto dos extremos das arestas em  $x$ ; por outro lado,  $G-x$  denota o subgrafo gerador de  $G$  que tem  $a \setminus x$  como conjunto de arestas; em particular, para  $\alpha$  uma aresta em  $aG$ ,  $G-\alpha$  abrevia  $G - \{\alpha\}$  (vide Exercícios 31 e 32).

## 5. Graus

O *grau*  $gG(v)$  de um vértice  $v$  em  $G$  é o número de arestas incidentes a  $v$ , cada laço sendo contado duas vezes. Em todo grafo, a soma

dos graus de seus vértices é igual ao dobro do número de arestas (Exercício 33).

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices  $1, 2, \dots, n$ ; a seqüência  $(g(1), g(2), \dots, g(n))$  é a *seqüência de graus* de  $G$ . Uma seqüência de naturais é *gráfica* se for a seqüência de graus de algum grafo simples. Convém ressaltar que existem grafos não isomorfos com a mesma seqüência de graus (vide Exercício 34).

Um grafo é *regular* se todos os seus vértices têm o mesmo grau; caso haja necessidade de se explicitar o grau,  $k$ , comum a todos os vértices, diremos então que o grafo é *k-regular*.

## 6. Passeios

Um *passeio*  $P$  em  $G$  é uma seqüência finita e não vazia  $(v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$ , cujos termos são alternadamente vértices  $v_i$  e arestas  $\alpha_j$ , e tal que, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os extremos de  $\alpha_i$ . Dizemos que  $P$  é um passeio de  $v_0$  a  $v_n$ ; os vértices  $v_0$  e  $v_n$  são a *origem* e o *término* de  $P$ , respectivamente; os vértices  $v_1, \dots, v_{n-1}$  são *vértices internos* de  $P$ ;  $VP$  e  $aP$  denotam os conjuntos  $\{v_0; \dots, v_n\}$  e  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  respectivamente; o passeio  $P$  *passa* por  $\alpha_i$  e por  $v_j$  ( $\alpha_i \in aP$  e  $v_j \in VP$ ). Admite-se o caso em que  $n = 0$ , no qual  $P$  é então dito *degenerado*. O *comprimento* de  $P$  é o inteiro  $n$ . O passeio  $(v_n, \alpha_n, v_{n-1}, \dots, \alpha_1, v_0)$  é o *reverso*  $R(P)$  de  $P$ . Uma *seção* de  $P$  é um passeio que é uma subseqüência de termos consecutivos de  $P$ . Se as arestas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $P$  forem duas a duas distintas então  $P$  é uma *trilha*. Se os vértices  $v_0, \dots, v_n$  forem dois a dois distintos então  $P$  é um *caminho*. Se a origem e o término de  $P$  coincidirem e  $P$  não for degenerado então  $P$  é *fechado*. Se  $P$  for uma trilha fechada e se  $v_1, \dots, v_n$  forem dois a dois distintos então  $P$  é um *circuito*.

Sejam  $P$  e  $Q$  passeios  $(v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$  e  $(u_0, \beta_1, u_1, \dots, \beta_m, u_m)$  em  $G$ , respectivamente, tais que  $v_n = u_0$ : o passeio  $(v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n, \beta_1, u_1, \dots, \beta_m, u_m)$  é o *produto*  $PQ$  de  $P$  e  $Q$  nesta ordem.

**EXEMPLO 3.** No grafo  $Z$  da Figura 1,  $P = (A, 1, B, 3, C, 4, A, 5, D, 5, A, 1, B, 2, B)$  é um passeio de  $A$  a  $B$  de comprimento 7,  $A$  é sua origem,  $B$  é seu término,  $B, C, A, D$  são internos em  $P$ ,  $VP = \{A, B, C, D\}$ ,  $aP = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $P$  não é uma trilha, nem um caminho, nem um passeio fechado. Por outro lado,  $Q = (B, 2, B, 3, C, 4, A)$  é uma trilha não fechada, mas não é um ca-

minho. A seção  $(A, 1, B, 3, C)$  de  $P$  é um caminho. A seção  $(A, 1, B, 3, C, 4, A)$  de  $P$  é um circuito, ao passo que a trilha fechada  $(A, 1, B, 2, B, 3, C, 4, A)$  não é um circuito.

A *distância* de um vértice  $u$  a outro  $v$  em  $G$  é o mínimo dos comprimentos dos passeios de  $u$  a  $v$  em  $G$ . (Se não existir nenhum passeio de  $u$  a  $v$  então dizemos que a distância de  $u$  a  $v$  é infinita.) O *diâmetro* de  $G$  é o máximo das distâncias entre vértices de  $G$ . A *cintura* de  $G$  é o comprimento do menor circuito em  $G$ . (Se não houver nenhum circuito então dizemos que a cintura é infinita.)

Vértice  $u$  de  $G$  é *ligado* ao vértice  $v$  de  $G$  se existe um passeio de  $u$  a  $v$  em  $G$ ; a relação de ligação é certamente de equivalência.

**TEOREMA 1.** *Seja  $u$  um vértice em  $G$ . Defina a seqüência  $S_0, S_1, \dots, S_k, \dots$  de subconjuntos de  $V$  indutivamente da seguinte maneira, onde  $S_{\leq j}$  denota  $\bigcup_{0 \leq i \leq j} S_i$*

$$S_k = \begin{cases} Adj(S_{k-1}) \setminus S_{\leq k-1} & \text{se } k > 0, \\ \{u\} & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

*Então*

- (i) *para todo  $k$ ,  $S_k$  é o conjunto dos vértices de  $G$  cuja distância a  $u$  é  $k$ ;*
- (ii) *existe um inteiro  $\ell$  tal que  $\ell \leq |V|$ ,  $S_0, S_1, \dots, S_{\ell-1}$  são todos não vazios e  $S_\ell, S_{\ell+1}, \dots$  são todos vazios.*

*Demonstração de (i).* Para cada  $k$ , seja  $D_k$  o conjunto dos vértices que distam  $k$  de  $u$ , seja  $D_{\leq k}$  o conjunto  $\bigcup_{0 \leq i \leq k} D_i$ .

Provaremos, por indução em  $k$ , que  $D_k = S_k$ . Evidentemente, a igualdade vale para  $k = 0$ , uma vez que  $D_0$  e  $S_0$  são ambos iguais a  $\{u\}$ . Suponha pois que  $k > 0$ . Admita, como hipótese de indução, que  $D_r = S_r$  para cada  $r \leq k - 1$ .

Para provar que  $S_k \subseteq D_k$ , seja  $v$  um vértice em  $S_k$ . Por definição de  $S_k$ ,  $v$  pertence a  $Adj(S_{k-1}) \setminus S_{\leq k-1}$ . Por hipótese de indução,  $v$  pertence a  $Adj(D_{k-1}) \setminus D_{\leq k-1}$ .

Como  $v$  pertence a  $Adj(D_{k-1})$ , então existe um vértice,  $w$ , em  $D_{k-1}$  e uma aresta,  $\alpha$ , com extremos  $v$  e  $w$ . Como  $w$  pertence a  $D_{k-1}$ , então existe um passeio,  $P$ , de comprimento  $k - 1$ , de  $u$  a  $w$ . Ora, o produto  $P(w, \alpha, v)$  é um passeio de comprimento  $k$ , de  $u$  a  $v$ ; portanto,  $v$  pertence a  $D_{\leq k}$ . Mas  $v$  pertence também a  $V \setminus D_{\leq k-1}$ . Logo,  $v$  per-

tence a  $D_{\leq k} \setminus D_{\leq k-1}$ . Ou seja,  $v$  pertence a  $D_k$ . Como esta conclusão vale para todo vértice  $v$  em  $S_k$ , então  $S_k \subseteq D_k$ .

Para provar que  $D_k \subseteq S_k$ , seja  $v$  um vértice em  $D_k$ . Então existe um passeio  $P = (u_0, \alpha_1, u_1, \dots, \alpha_k, u_k)$  de  $u$  a  $v$ , e de comprimento  $k$ . Como  $k > 0$ , então,  $(u_0, \alpha_1, u_1, \dots, \alpha_{k-1}, u_{k-1})$  é uma seção de  $P$  de comprimento  $k-1$ , de  $u$  a  $u_{k-1}$ . Logo,  $u_{k-1}$  pertence a  $D_{\leq k-1}$ . Seja  $r \leq k$  tal que  $u_{k-1}$  pertence a  $D_{r-1}$ . Pela hipótese de indução,  $u_{k-1}$  pertence a  $S_{r-1}$ . Como  $\alpha_k$  tem extremos  $u_{k-1}$  e  $v$ , então  $v$  pertence a  $Adj(S_{r-1})$ . Por definição,  $v$  pertence então a  $S_{\leq r}$  (pois ou  $v$  pertence a  $S_{\leq r-1}$  ou  $v$  pertence a  $S_r = Adj(S_{r-1}) \setminus S_{\leq r-1}$ ). Seja  $s \leq r \leq k$  tal que  $v$  pertence a  $S_s$ . Pela hipótese de indução,  $s = k$ , pois se  $s < k$  então  $v$  pertence a  $D_s$ , contradição, pois  $v$  pertence a  $D_k$ . Ou seja, o vértice  $v$ , de  $D_k$ , pertence a  $S_k$ . Como esta conclusão vale para todo vértice  $v$  em  $D_k$ , então  $D_k \subseteq S_k$ .

De fato,  $D_k = S_k$  para todo  $k$ . A demonstração de (i) está completa.

*Demonstração de (ii)* – Como todo passeio de comprimento mínimo entre dois vértices é um caminho (veja Exercício 44), então nenhum vértice dista  $|V|$  de  $u$  (pois se um passeio tem comprimento  $|V|$  então passa pelo menos duas vezes por algum vértice). De (i),  $S_{|V|} = \emptyset$ . Seja  $\ell$  o menor inteiro tal que  $S_\ell = \emptyset$ . Então  $\ell \leq |V|$  e  $S_0, S_1, \dots, S_{\ell-1}$  são todos não vazios. Ademais, como  $Adj(\emptyset) = \emptyset$ , segue de um argumento indutivo que  $S_\ell, S_{\ell+1}, \dots$  são todos vazios. A demonstração de (ii) completa a demonstração do teorema. ■

Baseados no teorema, descreveremos o algoritmo *distância* (vide Figura 7), que determina o *vetor de distâncias* de  $u$ , um vetor com  $|V|$  coordenadas onde a  $i$ -ésima coordenada é igual à distância de  $u$  ao vértice  $i$ . O algoritmo pressupõe que  $G$  é dado pela quádrupla  $(m, n, arestas, vértices)$ , onde  $m = |VG|$ ,  $n = |aG|$ , *arestas* é o vetor de arestas incidentes de  $G$  e *vértices* o vetor de vértices incidentes.

O primeiro passo do algoritmo é a inicialização do vetor  $s$  de distâncias de  $u$  e da fila  $S$ . O vetor  $s$  é inicializado fazendo cada uma de suas coordenadas igual a  $\infty$ , exceto a  $u$ -ésima, que é igual a zero. A fila  $S$  é inicialmente unitária, e consiste do vértice  $u$ .

Durante o processo, a fila  $S$  consiste dos vértices cujos adjacentes precisam ser examinados. Ademais, se  $S = \langle v_1, \dots, v_p \rangle$ , então para algum  $r$ , com  $0 \leq r \leq p$ , todos os vértices  $v_1, \dots, v_r$  têm a mesma distância de  $u$ , digamos  $k-1$ ; todos os vértices  $v_{r+1}, \dots, v_p$  distam  $k$  de  $u$ ; cada vértice que dista não mais do que  $k-1$  de  $u$  ou pertence a  $\{v_1, \dots, v_r\}$  ou seus adjacentes já foram todos examinados.

O marcador \* é utilizado nas coordenadas de *arestas* a fim de examinar os conjuntos que representam, deixando o vetor *arestas* intacto ao fim do processo.

Deixamos ao leitor verificar que existem constantes  $b$ ,  $c$  e  $d$  tais que *distância* executa no máximo  $bm + cn + d$  operações. Dizemos então que *distância* é um algoritmo *linear* (no tamanho do grafo).

**procedimento** *distância* ( $m$ ,  $n$ , *arestas*, *vértices*,  $u$ ):

{ $s$  é um vetor com  $n$  coordenadas que ao fim do processo será o vetor de distâncias de  $u$ }

**início**

$i \leftarrow 1$ ;

**enquanto**  $i \leq n$  **faça**  $s[i]$ ,  $i \leftarrow \infty$ ,  $i + 1$ ;

$s[u]$ ,  $S \leftarrow 0$ ,  $\langle u \rangle$ ;

**enquanto**  $S \neq \langle \rangle$  **faça**

**início**

$w$ ,  $S \leftarrow \text{car}(S)$ ,  $\text{cdr}(S)$ ;

*arestas*[ $w$ ],  $k \leftarrow \text{arestas}[w] \# *$ ,  $s[w] + 1$ ;

**enquanto**  $\text{car}(\text{arestas}[w]) \neq *$  **faça**

**início**

$\alpha \leftarrow \text{car}(\text{arestas}[w])$ ;

*arestas*[ $w$ ]  $\leftarrow \text{cdr}(\text{arestas}[w]) \# \alpha$ ;

$x_1, x_2 \leftarrow \text{vértices}[\alpha][1]$ ,  $\text{vértices}[\alpha][2]$ ;

**se**  $x_1 = w$  **então**  $z \leftarrow x_2$  **senão**  $z \leftarrow x_1$ ;

**se**  $s[z] = \infty$  **então**  $s[z]$ ,  $S \leftarrow k$ ,  $S \# z$

**fim**;

*arestas*[ $w$ ]  $\leftarrow \text{cdr}(\text{arestas}[w])$  {remove \*}

**fim**;

**devolva**  $s$

**fim**

Figura 7 — Algoritmo *distância*.

## 7. Componentes, conexão e cortes

Conforme foi visto na seção anterior, a relação de ligação é de equivalência; portanto, a relação de ligação induz uma partição  $p$  de  $V$  tal que dois vértices são ligados se e somente se pertencem ao mesmo elemento de  $p$ . O conjunto de componentes de  $G$ ,  $cG$ , é então definido como sendo igual a  $\{G[X] \mid X \in p\}$ . Cada grafo em  $cG$  é um componente de  $G$ .

Um grafo é *conexo* se quaisquer dois de seus vértices são ligados. Evidentemente, cada componente de um grafo é conexo. (O grafo  $Z$  da Figura 1 não é conexo; a Figura 8 mostra os quatro componentes do grafo  $Z$ .)

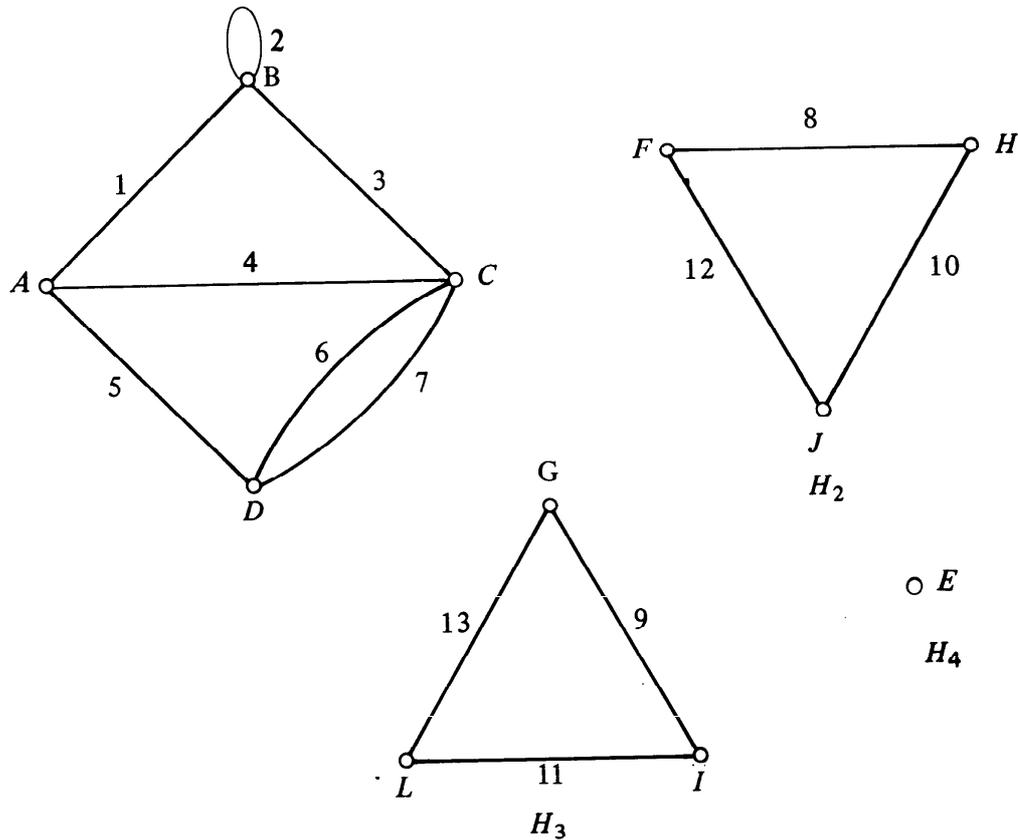


Figura 8 — O grafo  $Z$  da Figura 1 e seus quatro componentes  $H_1, H_2, H_3$  e  $H_4$ .

Um subconjunto  $S$  de  $V$  *separa* os vértices  $u$  e  $v$  se um dos vértices  $u$  e  $v$  pertence a  $S$ , o outro a  $V \setminus S$ . A cada subconjunto  $S$  de  $V$  podemos associar o conjunto das arestas cujos extremos  $S$  separa; esse conjunto é chamado *o corte associado a  $S$*  e é denotado por  $\delta G(S)$ ; assim,  $\delta G(S)$  é o conjunto das arestas de  $G$  que têm um extremo em  $S$ , o outro em  $V \setminus S$ . Convém ressaltar que  $\delta(S) = \delta(V \setminus S)$  e  $\delta(\emptyset) = \emptyset = \delta(V)$ . Um subconjunto  $d$  de  $aG$  é um *corte* em  $G$  se for o corte associado a algum subconjunto de  $V$ . Uma aresta  $\alpha$  é *de corte* se  $\{\alpha\}$  é um corte. Um corte  $d$  *separa* os vértices  $u$  e  $v$  se for o corte associado a algum subconjunto de  $V$  que separa  $u$  e  $v$ .

Um subgrafo  $H$  de  $G$  é *isolado* em  $G$  se toda aresta de  $G$  com pelo menos um extremo em  $VH$  é uma aresta de  $H$ ; assim,  $H$  é isolado se e somente se  $H = G[VH]$  e  $\delta G(VH) = \emptyset$ .

EXEMPLO 4. No grafo  $Z$  da Figura 8,

- (i) o conjunto  $S = \{A, C, D, J\}$  separa  $B$  e  $D$ , separa  $J$  e  $E$ , mas não separa nem  $A$  e  $J$ , nem  $E$  e  $I$ .
- (ii) o corte  $\delta Z(S)$  associado ao conjunto  $S = \{B, C, F\}$  é o conjunto  $\{1, 4, 6, 7, 8, 12\}$ .
- (iii) o conjunto  $\{3, 4, 5, 9, 11\}$  é um corte (associado, por exemplo, ao conjunto  $\{A, B, F, H, J, I\}$ ); nem o conjunto  $\{8, 10, 12\}$  nem o conjunto  $\{1, 4, 6\}$  são cortes.
- (iv) não há arestas de corte.
- (v) o corte vazio separa os vértices  $D$  e  $J$ , mas não separa os vértices  $B$  e  $D$ .
- (vi) o subgrafo  $H_1$  de  $Z$  é isolado; também é isolado o subgrafo de  $Z$  que tem dois componentes,  $H_1$  e  $H_2$ ; o subgrafo  $Z[A, B, C]$  não é isolado; tampouco são isolados os subgrafos  $X$  de  $Z$  tais que  $VX = \{A, B, C, D\}$  e  $aX \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

TEOREMA 2. Um grafo  $H$  é um componente de  $G$  se e somente se  $H$  é um subgrafo não vazio, isolado e conexo, de  $G$ .

*Demonstração.* Afirmar que  $H$  é um componente de  $G$  equivale a afirmar que

- (i)  $VH$  é não vazio,
- e
- (ii)  $H = G[VH]$ ,
- e
- (iii) para qualquer vértice  $v$  em  $VH$ ,  $VH$  é o conjunto dos vértices ligados a  $v$  em  $G$ .

Considere agora a afirmação

- (iii')  $\delta G(VH) = \emptyset$  e  $G[VH]$  é conexo.

Pelo Lema 1, abaixo, a validade de (iii') implica na validade de (iii). Pelos Lemas 1 e 2, abaixo, a validade de (iii) implica na validade de (iii'). Logo (iii) e (iii') são equivalentes.

Portanto,  $H$  é um componente de  $G$  se e somente se  $VH$  é não vazio,  $H = G[VH]$ ,  $\delta G(VH) = \emptyset$  e  $G[VH]$  é conexo. De fato,  $H$  é um componente de  $G$  se e somente se  $H$  é um subgrafo não vazio, isolado e conexo, de  $G$ .

LEMA 1. *Sejam  $u$  e  $v$  vértices de  $G$ ,  $S$  um subconjunto de  $V$  que separa  $u$  e  $v$ ,  $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$  um passeio de  $u$  a  $v$ . Então  $aP$  encontra<sup>(4)</sup>  $\delta S$ .*

*Demonstração.* Ajuste a notação, permutando  $S$  e  $V \setminus S$  se necessário, de forma que  $u$  pertença a  $S$  e  $v$  a  $V \setminus S$ . Como  $v_0 = u$ , então  $v_0 \in S$ : seja  $k$  o maior inteiro tal que  $0 \leq k \leq n$  e  $v_k \in S$ . Como  $v_n = v$ , então  $v_n$  pertence a  $V \setminus S$  e portanto  $k < n$ : ou seja,  $v_k \in S$  e  $v_{k+1} \in V \setminus S$ . Logo  $\alpha_{k+1} \in \delta S$ . De fato,  $aP$  encontra  $\delta S$ . ■

LEMA 2. *Seja  $u$  um vértice de  $G$ ,  $S$  o conjunto dos vértices ligados a  $u$ . Então  $\delta S$  é vazio.*

*Demonstração.* Suponha que, pelo contrário,  $\delta S$  contém uma aresta,  $\alpha$ . Seja  $w$  o extremo de  $\alpha$  em  $S$ ,  $v$  seu extremo em  $V \setminus S$ . Como  $w$  pertence a  $S$ , então  $u$  e  $w$  são ligados; como  $w$  e  $v$  são adjacentes, então  $u$  e  $v$  são ligados e portanto  $v \in S$ , contradição. De fato,  $\delta S$  é vazio. A demonstração do Lema 2 completa a demonstração do Teorema 2. ■ ■

COROLÁRIO 1 (dos Lemas 1 e 2). *Dois vértices são ligados se e somente se o corte vazio não os separa.*

COROLÁRIO 2. *Um grafo  $G$  é conexo se e somente se o corte associado a cada subconjunto próprio e não vazio de  $V$  é não vazio.*

TEOREMA 3. *Seja  $\alpha$  uma aresta de um grafo  $G$ . Então  $|cG| \leq |c(G - \alpha)| \leq |cG| + 1$ . Ademais, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $|c(G - \alpha)| = |cG| + 1$ ,
- (ii) os extremos de  $\alpha$  não são ligados em  $G - \alpha$ ,
- (iii) a aresta  $\alpha$  é de corte,
- (iv) nenhum circuito passa pela aresta  $\alpha$ .

*Demonstração.* A equivalência das afirmações (ii), (iii) e (iv) fica a cargo do leitor (vide Exercícios 46 e 70). Para de-

---

(4) Dizemos que  $A$  encontra  $B$  se  $A$  e  $B$  não forem disjuntos.

monstrar a desigualdade constante da asserção, bem como a equivalência das afirmações (i) e (ii), sejam  $u$  e  $v$  os extremos de  $\alpha$ ,  $G'$  o grafo  $G - \alpha$ . Para cada vértice  $x$  em  $V$ , sejam  $G_x$  e  $G'_x$  as componentes de  $G$  e de  $G'$ , respectivamente, que têm  $x$  como vértice. Denotaremos por  $c_0G$  e  $c_0G'$  os conjuntos dos componentes de  $G$  e de  $G'$ , respectivamente que não têm nem  $u$  nem  $v$  como vértices.

Valem então as seguintes igualdades:

$$|cG| = |c_0G| + |\{G_u, G_v\}| \quad (1)$$

e

$$|cG'| = |c_0G'| + |\{G'_u, G'_v\}| \quad (2)$$

Como  $u$  e  $v$ , os extremos de  $\alpha$ , são ligados em  $G$ , então  $G_u = G_v$ . Portanto,

$$|\{G_u, G_v\}| = 1. \quad (3)$$

Analogamente,

$$|\{G'_u, G'_v\}| = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ e } v \text{ são ligados em } G', \\ 2 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

De (1), (2), (3) e (4), pela Proposição 1, abaixo, seguem a desigualdade constante da asserção e a equivalência das afirmações (i) e (ii).

**PROPOSIÇÃO 1.**  $c_0G = c_0G'$ .

*Demonstração.* Seja  $S$  um subconjunto de  $V \setminus \{u, v\}$ . Como  $u$  e  $v$  são os extremos de  $\alpha$ , então  $\delta G(S) = \delta G'(S)$  e  $G[S] = G'[S]$ . Portanto,  $G[S]$  é um subgrafo não vazio, conexo e isolado em  $G$  se e somente se  $G'[S]$  é um subgrafo não vazio, conexo e isolado em  $G'$ . Pelo Teorema 2,  $G[S]$  é um componente de  $G$  se e somente se  $G'[S]$  é um componente de  $G'$ . Como esta conclusão vale para todo subconjunto  $S$  de  $V \setminus \{u, v\}$ , então, de fato,  $c_0G = c_0G'$ . A demonstração da proposição completa a demonstração do teorema. ■■

## EXERCÍCIOS

1. Dê uma representação para o grafo  $Z$  da Figura 1 tal que as arestas não se interceptam a não ser nos extremos. Portanto,  $Z$  é um grafo planar.

2. Quantos grafos  $H$  existem tais que

$$VH = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{e} \quad aH = \{A, B, C, D, E\}?$$

Quantos grafos simples  $H$  existem com os citados conjuntos de vértices e arestas?

3. Mostre que todo  $k$ -cubo tem  $2^k$  vértices,  $k2^{k-1}$  arestas e é biparticionável.
4. Mostre que se  $G$  é simples,  $H$  é completo e ambos têm exatamente  $n$  vértices, então

$$|aG| \leq |aH| = \binom{n}{2}.$$

5. Dê um exemplo de um grafo simples não biparticionável que não seja um triângulo, e de tamanho o menor possível.
6. Mostre que o número de mulheres é igual ao de homens em toda festa em que cada pessoa é amiga de precisamente  $k$  outras do sexo oposto presentes à festa ( $k \geq 1$ ). *Sugestão*: obtenha o número de pares de amigos em função de  $k$  e do número de mulheres, em função de  $k$  e do número de homens, representando a situação por um grafo biparticionável.
7. (*Teorema da amizade*) Mostre que, se numa festa com pelo menos duas pessoas quaisquer duas pessoas têm exatamente um amigo comum presente à festa, então existe uma pessoa na festa que é amiga de todas.
8. Represente o grafo  $Z$  da Figura 1 através de (i) uma matriz de adjacências, (ii) um par de vetores de incidências, dando novos nomes aos vértices e às arestas, se necessário. Escreva algoritmos, tão eficientes quanto possível, que obtêm a matriz de adjacências e o vetor de vértices incidentes, respectivamente, dado o vetor de arestas incidentes, o número de vértices e o número de arestas de um grafo.
9. Obtenha  $f$  e  $\phi$  tais que  $(f, \phi)$  seja um isomorfismo de  $Z$  (Figura 1) em  $Y$  (Figura 4). Quantos isomorfismos de  $Z$  em  $Y$  existem? Quantos automorfismos tem um grafo completo?
10. Se dois grafos são isomorfos então ambos têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas. Mostre, através de um exemplo, que a recíproca é falsa.
11. Mostre que os quatro grafos indicados na Figura 3 são isomorfos.

12. Escreva um algoritmo para determinar se dois grafos dados são ou não isomorfos. Quão eficiente é seu algoritmo? (confronte com Exercício 81)
13. Verifique que, a menos de isomorfismo, existem onze grafos simples com quatro vértices. Quantos grafos existem, a menos de isomorfismo, com quatro vértices?
14. Verifique que, a menos de isomorfismo, existem 34 grafos simples com cinco vértices.
15. Escreva um algoritmo que obtém a lista de grafos com  $n$  vértices não isomorfos, dado  $n$ . Quão eficiente é seu algoritmo?
16. Mostre que, restrito a grafos simples, o conceito de isomorfismo pode ser encarado como uma bijeção (entre os conjuntos de vértices) que preserva adjacência.
17. Obtenha um grafo autocomplementar com quatro vértices. Dê dois grafos autocomplementares, não isomorfos e com cinco vértices cada um. Mostre que não existem grafos autocomplementares com três vértices.
18. Mostre que se  $G$  é autocomplementar então
 
$$|VG| \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{4}.$$
19. Mostre que para todo natural  $n$  tal que  $n \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ , existem grafos autocomplementares com  $n$  vértices.
20. Mostre que existem, a menos de isomorfismo, 8 grafos simples regulares com 6 vértices.
21. Dados isomorfismos  $(f, \phi)$  e  $(f', \phi')$  de  $G$  em  $H$  e de  $H$  em  $K$ , respectivamente, a composição destes isomorfismos é o par  $(f'f, \phi'\phi)$ : mostre que este é um isomorfismo de  $G$  em  $K$ .
22. Verifique que a relação de isomorfismo entre grafos é de equivalência.
23. Verifique que o conjunto de automorfismos de um grafo é um grupo com relação à operação de composição.
24. Obtenha um grafo simples com seis vértices que tenha exatamente um automorfismo. Mostre que todo grafo simples com mais de um e menos de seis vértices tem mais de um automorfismo.
25. Que pode ser dito a respeito dos conjuntos de automorfismos de dois grafos complementares?

26. Dê um grafo simples que seja transitivo nos vértices mas não nas arestas e outro que seja transitivo nas arestas mas não nos vértices.
27. Seja  $C$  um conjunto finito e não vazio de conjuntos finitos. Mostre que  $C$  tem elementos máximos e mínimos. Mostre que todo elemento máximo (mínimo) é maximal (minimal).
28. Demonstre as seguintes afirmações:
  - (a) todo conjunto não vazio de conjuntos finitos tem um elemento mínimo e todo elemento mínimo é minimal.
  - (b) todo conjunto finito e não vazio de conjuntos tem um elemento máximo.
  - (c) todo conjunto finito e não vazio de conjuntos tem elementos maximais e minimais.
  - (d) conjuntos infinitos de conjuntos podem não ter nem elementos minimais nem elementos maximais.
29. Mostre que  $H = G[X]$  se e somente se  $H$  é maximal no conjunto dos subgrafos de  $G$  cujos vértices pertencem a  $X$ .
30. Mostre que  $H$  gera  $G$  se e somente se  $H$  é um subgrafo de  $G$  tal que  $VH = VG$ .
31. Dê um grafo  $G$  e um subconjunto  $x$  de  $a$  tais que  $G[a \setminus x]$  e  $G - x$  sejam distintos.
32. Mostre que  $H = G[x]$  se e somente se  $H$  é um subgrafo minimal no conjunto dos subgrafos de  $G$  que têm todas as arestas de  $x$ .
33. Mostre que para qualquer grafo  $G$ ,
 
$$2|a| = \sum_{v \in V} g(v).$$

Conclua então que o número de vértices de grau ímpar é par, em qualquer grafo.
34. Dê uma seqüência que seja a seqüência de graus de (pelo menos) dois grafos simples não isomorfos.
35. Obtenha um grafo simples e biparticionável que não seja isomorfo a nenhum subgrafo de nenhum  $k$ -cubo.
36. Mostre que todo grafo é o subgrafo gerado por algum subconjunto do conjunto de vértices de algum grafo regular.
37. Mostre que em toda cidade (com pelo menos dois habitantes) residem duas pessoas com o mesmo número de amigos habitantes na cidade. Formule a asserção em termos de grafos simples.

38. Mostre que para todo  $n \geq 3$  existe um grafo simples 3-regular com  $2n$  vértices que não tem triângulos como subgrafos.
39. Mostre que uma seqüência  $(g(1), \dots, g(n))$  de naturais é a seqüência de graus de algum grafo se e somente se  $\sum_{1 \leq i \leq n} g(i)$  for par.
40. Seja  $g = (g(1), \dots, g(n))$  uma seqüência não vazia de naturais tais que  $g(1) \geq g(2) \geq \dots \geq g(n)$ . Mostre que  $g$  é gráfica se e somente se  $n > g(1)$  e  $(g(2) - 1, \dots, g(i + 1) - 1, g(i + 2), \dots, g(n))$  é gráfica, onde  $i$  denota  $g(1)$ . Com base nessa demonstração, descreva um algoritmo que determina se uma seqüência dada é ou não gráfica, e, em caso afirmativo, obtém um grafo (simples) com a seqüência de graus dada.
41. Mostre que existe um grafo simples  $k$ -regular com  $n$  vértices se e somente se  $k < n$  e  $kn$  é par.
42. Mostre que todo grafo  $G$  sem laços tem um subgrafo gerador biparticionável  $H$  tal que  $gH(v) \geq gG(v)/2$  para cada vértice  $v$  de  $G$ .
43. Dê um exemplo de, ou mostre que não existe:
- um passeio que não seja uma trilha,
  - uma trilha que não seja um caminho,
  - um caminho que não seja uma trilha,
  - um passeio fechado que não seja um circuito,
  - dois caminhos cujo produto não seja um caminho.
44. Mostre que um passeio de comprimento mínimo de  $u$  a  $v$  em  $G$  é um caminho.
45. Mostre que existe um passeio de  $u$  a  $v$  em  $G$  se e somente se existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ .
46. Mostre que existe um circuito em  $G$  que passa por  $\alpha$  se e somente se os extremos de  $\alpha$  são ligados em  $G - \alpha$ .
47. Mostre que o passeio fechado e não degenerado  $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$  ( $n \neq 2$ ) é um circuito se e somente se  $v_1, \dots, v_n$  forem dois a dois distintos. (Confronte com o Exercício VI.3.)
48. Prove que por toda aresta numa trilha fechada passa algum circuito. Mostre que a afirmação seria falsa se substituíssemos “trilha” por “passeio”.
49. Mostre que a operação de produto de passeios é associativa.
50. Mostre que a relação de ligação é de equivalência.

51. Seja  $\gamma G$  o mínimo dos graus dos vértices de um grafo  $G$  não vazio. Mostre que se  $G$  for simples então  $G$  tem um caminho de comprimento  $\gamma G$ . Para cada  $n$ , ache um grafo simples  $G$  tal que  $n = \gamma G$  e  $G$  não tem caminhos de comprimento  $n + 1$ .
52. Prove que se  $\gamma G$  (vide exercício anterior) é maior do que 1 então  $G$  tem um circuito. Prove também que se  $G$  for simples e  $\gamma G > 1$  então  $G$  tem um circuito cujo comprimento é maior do que  $\gamma G$ .
53. Sejam  $u, v$  e  $w$  três vértices num grafo  $G$  e sejam  $C$  e  $D$  caminhos de comprimento mínimo de  $u$  a  $v$  e de  $u$  a  $w$ , respectivamente. Mostre que se  $x$  e  $y$  são ambos vértices de  $VC$  e de  $VD$  então  $x$  precede  $y$  em  $C$  se e somente se  $x$  precede  $y$  em  $D$ . (Um vértice  $z'$  precede outro  $z''$  num caminho  $A$  se existem seções  $A', A'', A'''$  tais que  $A = A'A''A'''$ ,  $z'$  é o término de  $A'$  e  $z''$  o término de  $A''$ .)
54. Mostre que se modificarmos a definição de  $S_k$  ( $k > 0$ ) no enunciado do Teorema 1 para

$$S_k = Adj(S_{k-1}) \setminus S_{k-2} \setminus S_{k-1}$$

e adicionarmos a igualdade  $S_{-1} = \emptyset$ , então o teorema continua válido.

55. Escreva um algoritmo linear que, dados  $G$ , vértices  $u$  e  $w$  de  $G$  e vetor de distâncias  $d$  de  $u$ , determina um caminho de comprimento mínimo de  $u$  a  $w$ , se  $u$  e  $w$  são ligados.
56. Dê um algoritmo linear que determina um circuito de comprimento mínimo que passe por uma dada aresta, se existir tal circuito.
57. Dê um algoritmo que determina a cintura de um grafo em tempo  $O(n(n+m))$ , onde  $n = |VG|$  e  $m = |aG|$ .
58. Mostre que cada elemento  $a_{ij}^{(k)}$  da  $k$ -ésima potência  $A^k$  da matriz de adjacências  $A$  é o número de passeios de  $i$  e  $j$  de comprimento  $k$ . Baseando-se nesta propriedade, escreva um algoritmo que determina os vetores de distâncias de cada vértice. Qual é a complexidade do seu algoritmo?
59. Um passeio é *par* (*ímpar*) se seu comprimento é par (ímpar). Da mesma forma como distância, diâmetro e cintura foram definidos com relação a passeios, podemos também definir distâncias, diâmetros e cinturas pares e ímpares. Por exemplo, a *distância par* de  $u$  a  $v$  é o mínimo dos comprimentos dos passeios pares de  $u$  a  $v$ . Dê exemplos de passeios pares (ímpares) de  $u$  a  $v$ , de comprimento igual à distância par (ímpar) de  $u$  a  $v$  mas que não sejam trilhas.

60. Defina uma seqüência  $(P_0, I_0), (P_1, I_1), \dots$  de pares ordenados de subconjuntos de  $V$  de forma que para cada  $k$ ,  $P_k (I_k)$  é o conjunto dos vértices cuja distância par (ímpar) de  $u$  é  $2k (2k + 1)$ . Escreva um algoritmo linear que determina os vetores das distâncias pares e ímpares de um vértice  $u$ .
61. Prove que existe um passeio ímpar fechado em  $G$  se e somente se existe um circuito ímpar em  $G$ . Mostre, através de um exemplo, que a afirmação fica falsa se substituirmos “ímpar” por “par”, mesmo se substituirmos “passeio” por “trilha”. Dê um algoritmo polinomial que determina a cintura ímpar de um grafo.
62. Dado um conjunto  $t$  de arestas de um grafo  $G$ , um passeio  $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$  é *alternado* (com relação a  $t$ ) se, para cada  $i (1 \leq i \leq n - 1)$ , uma das arestas  $\alpha_i$  e  $\alpha_{i+1}$  pertence a  $t$ , a outra a  $aG \setminus t$ . Podemos então definir *distância alternada* da maneira natural. Escreva um algoritmo linear que determina o vetor de distâncias alternadas de um vértice  $u$  dado.
63. Faça uma pequena modificação no algoritmo distância de forma a obter também o conjunto dos vértices do componente que tem  $u$  como um de seus vértices. Dê um algoritmo linear para a determinação da partição de  $V$  induzida pela relação de ligação.
64. Mostre que para quaisquer subconjuntos  $X$  e  $Y$  de  $V$ ,  $\delta(X \oplus Y) = \delta(X) \oplus \delta(Y)$  onde  $\oplus$  denota a operação de diferença simétrica, ou seja,  $A \oplus B = A \cup B \setminus A \cap B$ .
65. Mostre que todo corte é a união de uma coleção disjunta de cortes não vazios minimais.
66. Mostre que se  $G$  é conexo, então  $\delta(S)$  é um corte não vazio minimal se e somente se  $G[S]$  e  $G[V \setminus S]$  são ambos subgrafos próprios e conexos, de  $G$ .
67. Seja  $S$  um subconjunto de  $V$ ,  $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$  um passeio. Mostre que  $|\{i \mid \alpha_i \in \delta(S)\}|$  é ímpar se e somente se  $S$  separa  $v_0$  e  $v_n$ .
68. Mostre que um conjunto  $d$  de arestas é um corte se e somente se  $|d \cap aC|$  é par, para todo circuito  $C$ . Dê um algoritmo linear que determina se um conjunto dado de arestas é ou não um corte.
69. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
- (i)  $G$  é biparticionável,
  - (ii)  $aG$  é um corte em  $G$ ,
  - (iii) nenhum circuito em  $G$  tem comprimento ímpar.

70. Demonstre a seguinte afirmação como um corolário do Corolário 1: uma aresta  $\alpha$  é de corte se e somente se seus extremos não são ligados em  $G-\alpha$ .
71. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
- $H$  é um componente de  $G$ ,
  - $H$  é um subgrafo conexo, não vazio, maximal, de  $G$ ,
  - $H$  é um subgrafo isolado, não vazio, minimal, de  $G$ .
72. Mostre que todo grafo simples com  $n$  vértices e mais do que  $\binom{n-1}{2}$  arestas é conexo.
73. Mostre que se  $G$  é um grafo simples com  $n$  vértices e cada um de seus vértices tem grau pelo menos  $(n-1)/2$  então  $G$  é conexo.
74. Demonstre que dois caminhos de comprimento máximo num grafo conexo têm um vértice em comum.
75. Mostre que se  $G$  é não conexo e  $H$  e  $G$  são complementares então  $H$  é conexo. Dê exemplos de grafos complementares  $G$  e  $H$  que sejam ambos conexos.
76. Mostre que se  $G$  tem diâmetro pelo menos 3 e  $H$  e  $G$  são complementares então  $H$  tem diâmetro no máximo 3.
77. Prove que existe um corte com um número ímpar de arestas num grafo se e somente se existe um vértice no grafo cujo grau é ímpar.
78. Um grafo é *euleriano* se é conexo e se todos os seus vértices têm grau par. Mostre que um grafo admite uma trilha que passa por todos os seus vértices e todas as suas arestas se e somente se o grafo é euleriano. (Informalmente, um grafo é euleriano se e somente se um seu diagrama pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel, sem passar mais de uma vez por alguma linha, mas voltando o lápis ao ponto de partida.) [32].
79. Mostre que para quaisquer vértices distintos  $u$  e  $v$  ligados em  $G$ , a distância de  $u$  a  $v$  é igual à cardinalidade de um elemento máximo do conjunto de coleções disjuntas de cortes que separam  $u$  e  $v$ .
80. Suponha que a cada aresta  $\alpha$  de um grafo  $G$  seja associado um real não negativo,  $p(\alpha)$ , chamado o *peso* de  $\alpha$ . O *peso* de um passeio  $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$  é a soma  $p(\alpha_1) + p(\alpha_2) + \dots + p(\alpha_n)$ . Dê um algoritmo polinomial que determina um passeio de peso mínimo entre dois dados vértices. ([22] e [127].) Generalize a asserção do exercício anterior. (Confronte com o Exercício B.III.26.)

81. Alguns problemas em aberto, reconhecidamente difíceis:
- (a) demonstrar que existe um algoritmo polinomial para determinar se a cintura par de um grafo dado é ou não menor do que um inteiro dado, ou então mostrar que o problema é  $\mathcal{NP}$ - $m$ -completo.
  - (b) demonstrar que existe um algoritmo polinomial para determinar se dois grafos dados são ou não isomorfos, ou então mostrar que o problema é  $\mathcal{NP}$ - $m$ -completo.
  - (c) (*conjetura da reconstrução de Ulam*). Sejam  $G$  e  $H$  grafos com  $VG = VH = \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \geq 3$ ). Se, para cada  $i$ ,  $G-i$  e  $H-i$  são isomorfos, então  $G$  e  $H$  são isomorfos [123].
82. Mostre que todo grupo finito é isomorfo ao grupo de automorfismos de um grafo simples 3-regular conexo [35].

## NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

A teoria dos grafos tem sido utilizada em áreas tão díspares do conhecimento humano como análise de circuitos elétricos, pesquisa operacional, teoria da computação, análise numérica, química orgânica, física, topologia, genética e psicologia (vide, por exemplo, [49]).

Leonhard Euler é considerado o primeiro autor em teoria dos grafos; em 1736, o famoso físico e matemático resolveu o problema das pontes de Königsberg [32] (vide Exercício 78).

O conceito de planaridade foi aqui apenas abordado, e como de caráter puramente topológico; no entanto, Kuratowski [65] deu uma caracterização estritamente combinatorial de planaridade.

Algoritmos em grafos têm recentemente recebido muita atenção dos cientistas da computação, especialmente em conexão com o problema da igualdade de  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{NP}$ , conforme foi visto no Capítulo B.IV.

O número de textos em teoria dos grafos é razoavelmente grande. Destacamos [6], [3] e [49] como textos de caráter geral, [1] e [60] como textos que enfocam complexidade de algoritmos e estruturas de dados e [4] como um enfoque algébrico de teoria dos grafos.