

# VISUALIZAÇÃO E GEOMETRIA

## NOS PRIMEIROS ANOS

# ***VISUALIZAÇÃO E GEOMETRIA NOS PRIMEIROS ANOS***

Elaborado por:

Carla Figueira

Cristina Loureiro

Elsa Lobo

Maria Paula Rodrigues

Pedro Almeida

Junho 2007

Conexões entre as tarefas .....	4
Material necessário para a realização das tarefas .....	5
Apresentação .....	6
<b>FIGURAS NO PLANO</b> .....	8
Caminhos .....	9
Observa e Desenha 1 .....	12
Observa e Desenha 2 .....	13
Explorando Ângulos .....	14
Tartaruga Tonta .....	15
Bandeiras Triangulares .....	17
Poliminós .....	21
Figuras com Triminós .....	24
Polidiamantes .....	27
Construindo o Tangram .....	29
Construir Figuras com o Tangram .....	30
Tangram Revisitado .....	31
Transformar .....	32
<b>FIGURAS NO ESPAÇO</b> .....	33
Policubos 1 .....	34
Policubos 2 .....	37
Vistas Daqui e Dali .....	40
Cubos Crescentes .....	43
Cubos Pintados .....	46
Propriedades das figuras .....	48
<b>TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA</b> .....	50
Deslizar, voltar e rodar .....	51
Dobra e Corta .....	53
Perder Simetria .....	54
Dobra e Fura 1 .....	57
Dobra e Fura 2 .....	58
Tangram ao Espelho .....	60
<b>RECURSOS</b> .....	62
<b>ANEXOS</b> .....	73

## CONEXÕES ENTRE AS TAREFAS

<b>FIGURAS NO PLANO</b>	
Caminhos	
Observa e Desenha 1	Observa e Desenha 2, Figuras com Triminós
Observa e Desenha 2	Observa e Desenha 1, Figuras com Triminós
Explorando Ângulos	Tartaruga Tonta
Tartaruga Tonta	Explorando Ângulos
Bandeiras Triangulares	
Poliminós	Figuras com Triminós, Polidiamantes, Policubos 1
Figuras com Triminós	Poliminós, Polidiamantes
Polidiamantes	Figuras com Triminós, Poliminós, Polidiamantes
Construindo o Tangram	Construir Figuras com o Tangram, Tangram Revisitado
Construir Figuras com o Tangram	Construindo o Tangram, Tangram Revisitado, Transformar
Tangram Revisitado	Construindo o Tangram, Construir Figuras com o Tangram, Transformar
Transformar	Tangram Revisitado, Construir Figuras com o Tangram, Deslizar, Voltar e Rodar
<b>FIGURAS NO ESPAÇO</b>	
Policubos 1	Policubos 2, Vistas Daqui e Dali, Cubos Crescentes, Cubos Pintados, Poliminós
Policubos 2	Policubos 1, Vistas Daqui e Dali
Vistas Daqui e Dali	Policubos 1, Policubos 2, Cubos Crescentes, Cubos Pintados
Cubos Crescentes	Poliminós
Cubos Pintados	Vistas Daqui e Dali, Cubos Crescentes, Poliminós
Propriedades dos Sólidos	
<b>TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA</b>	
Deslizar, voltar e rodar	Transformar
Dobra e Corta	Dobra e Fura 1, Dobra e Fura 2, Perder Simetria
Perder Simetria	Dobra e Corta, Dobra e Fura 1, Dobra e Fura 2, Tangram Revisitado
Dobra e Fura 1	Dobra e Corta, Dobra e Fura 2
Dobra e Fura 2	Dobra e Corta, Dobra e Fura 1
Tangram ao Espelho	Construir Figuras com o Tangram

## MATERIAL NECESSÁRIO PARA REALIZAÇÃO DAS TAREFAS

<b>FIGURAS NO PLANO</b>	
Caminhos	papel quadriculado
Observa e Desenha 1	papel quadriculado
Observa e Desenha 2	papel quadriculado
Explorando Ângulos	papel
Tartaruga Tonta	o próprio corpo
Bandeiras Triangulares	geoplano, papel ponteadado
Poliminós	quadrados de espuma
Figuras com Triminós	quadrados de espuma
Polidiamantes	triângulos equiláteros de espuma
Construindo o Tangram	papel colorido
Construir Figuras com o Tangram	tangram
Tangram Revisitado	triângulos rectângulos isósceles
Transformar	geoplano e papel ponteadado
<b>FIGURAS NO ESPAÇO</b>	
Policubos 1	cubos de encaixe
Policubos 2	cubos de encaixe
Vistas Daqui e Dali	cubos soltos ou de encaixe, papel quadriculado
Cubos Crescentes (tetraedros crescentes)	polydrons
Cubos Pintados	cubos soltos ou de encaixe
Propriedades dos Sólidos	Sólidos
<b>TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA</b>	
Deslizar, voltar e rodar	cartões com uma figura
Dobra e Corta	papel, tesoura
Perder Simetria	papel, tesoura
Dobra e Fura 1	papel, furador
Dobra e Fura 2	papel, furador
Tangram ao Espelho	espelho, várias peças de tangram

## **Sobre visualização e geometria**

Muitos professores não se sentem confortáveis com a geometria, associando-a a um nível de ensino mais elevado ou encarando-a como pouco importante no desenvolvimento de competências matemáticas. Sabemos também que a formação em geometria tem sido pouco valorizada nas opções de ensino de muitos professores e em muitos manuais escolares. Porém, é reconhecido pela investigação em educação matemática que a compreensão aprofundada da geometria tem implicações noutras áreas do currículo pela possibilidade de se estabelecerem conexões fundamentais para uma construção mais sólida do conhecimento matemático. Por exemplo, medida e geometria estão intimamente ligadas no desenvolvimento de conceitos como perímetro, área e volume. A semelhança geométrica é indissociável do estudo da proporcionalidade e confere uma dimensão única à sua compreensão. As transformações de figuras — rotação, translação, reflexão e dilação —, bem como a simetria são essenciais para olhar e compreender o mundo que nos rodeia.

Analogamente à expressão Sentido do Número, que pretende abarcar uma compreensão abrangente e significativa dos números e das operações, podemos falar de Sentido Espacial como uma ideia ampla onde se inclui o desenvolvimento de capacidades de visualização, de conhecimentos de geometria e de atitudes de observação e de atenção pelos objectos. O sentido espacial pode ser descrito como uma intuição sobre as formas e as suas relações. Inclui a habilidade para visualizar mentalmente objectos e relações espaciais. As experiências geométricas, diversificadas e ricas, são indispensáveis para o desenvolvimento do sentido e do raciocínio espacial de cada pessoa.

As primeiras tarefas de geometria a proporcionar aos alunos devem incidir nos raciocínios sobre as formas, tanto no plano como no espaço, e sobre as transformações que se podem fazer nessas formas.

## **Sobre as tarefas propostas**

No conjunto de tarefas apresentadas neste documento apontamos exactamente no sentido da valorização do raciocínio espacial e não nos preocupamos com as definições e nomenclaturas. A sequência de tarefas apresentadas não está organizada por nenhuma ordem especial embora apresentemos sugestões de tarefas associadas. Ao contrário do trabalho com os números e as operações, em que há uma hierarquia natural de aprendizagens, em geometria podemos começar por onde quisermos. No entanto, as actividades de visualização e geometria não devem ser isoladas, é importante que haja sequências de tarefas e que estas correspondam a um tempo significativo, daí a nossa sugestão de tarefas associadas. Decidimos arrumar as tarefas em três secções: *Figuras no Plano*, *Figuras no Espaço* e *Transformações Geométricas e Simetria*.

À primeira vista, algumas das tarefas, podem parecer desligadas dos currículos pela sua novidade. No entanto, uma análise mais detalhada dos mesmos permite observar uma ligação estreita. O Programa de matemática começa por afirmar que a acção do aluno deve centrar-se nas actividades de *manipular, explorar, construir, transformar, relacionar* (1ºCiclo); *manipular observar, descobrir, construir, traçar* (2ºCiclo – 5º ano). Do Currículo Nacional do Ensino Básico salientamos duas competências mais intimamente ligadas às tarefas que apresentamos: *“Aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e*

*analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico. A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática*". Consideramos por isso que as propostas que apresentamos ajudam a pôr em prática as orientações dos Programas e do Currículo Nacional.

Uma das nossas intenções foi organizar tarefas para dinâmicas de sala de aula diversificadas. O trabalho sobre visualização e geometria precisa de momentos colectivos, mas também de momentos mais recolhidos e individualizados. Várias das actividades que propomos são excelentes para momentos individuais ou a pares. São tarefas em que cada aluno se confronta com as suas capacidades, ao seu ritmo e sem pressões da discussão colectiva. Estar algum tempo a desenhar sólidos em perspectiva ou através das suas vistas, descobrir as diferentes figuras que se podem construir a partir de uma figura base, por exemplo, são actividades muito formativas, desafiantes e até calmantes. Como recurso para este trabalho mais individualizado, há já muitas actividades interactivas em sites didácticos ou em *Cd-roms* e que não podem ser esquecidas pelos professores. Mesmo que as condições em termos dos recursos já existentes não sejam as mais favoráveis, a existência destes materiais devia ser usada com o objectivo de exigência de melhores recursos informáticos.

### ***Sobre a forma de apresentação das tarefas***

Cada tarefa é exposta seguindo uma matriz de apresentação: Proposta de tarefa para o professor; Hipóteses possíveis; Notas e comentários; Proposta para os alunos. Optámos por iniciar cada tarefa com uma ***proposta para o professor*** pois reconhecemos a necessidade de conhecer e ter experimentado previamente a situação que vai ser proposta aos alunos. Além disso, em muitas tarefas a proposta para o professor é mais ampla do que a dos alunos, proporcionando ao professor um conhecimento geométrico mais abrangente e completo. Nas ***hipóteses possíveis*** incluímos soluções ou sugestões de apoio à resolução da actividade. As ***notas e comentários*** apresentam breves e curtos esclarecimentos sobre aspectos matemáticos, remissões para leituras de textos, sugestões de consultas na internet, experiências com actividades interactivas na internet e justificações matemáticas e didácticas do valor da actividade proposta. Em ***outras tarefas associadas*** são indicadas outras tarefas que permitem trabalhar alguns dos conceitos ou os mesmos mas com outro tipo de abordagem e exploração. Finalmente, a ***proposta para os alunos*** é feita com indicações sobre a maneira de apresentar a tarefa aos alunos e sobre os materiais de apoio a usar (manipuláveis, folhas de registo, folhas de trabalho). Muitas propostas são apresentadas aos alunos oralmente. No caso das propostas escritas, incluímos o texto pronto a ser usado pelo professor.

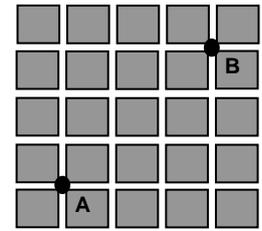
Nas diversas propostas apresentadas não há qualquer referência ao nível ou ano de escolaridade adequado para cada tarefa. Tendo em conta o conhecimento do que se faz em outros países e a nossa experiência de ensino, consideramos que estas tarefas contemplam aprendizagens importantes de serem realizadas nos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico.

Para terminar, pensamos que este primeiro caderno de tarefas está ainda muito incompleto no que respeita a alguns assuntos, nomeadamente sobre localização, orientação e simetria. Esperamos futuramente poder vir a desenvolvê-lo e ampliá-lo.

A incidência fundamental deste bloco de tarefas é sobre capacidades de visualização e conhecimentos de geometria no plano. A separação entre o plano e o espaço é artificial e por isso algumas tarefas estão associadas a tarefas de Figuras no Espaço. Apesar de termos colocado este bloco em primeiro lugar, defendemos que se inicie o trabalho com as crianças com a exploração do espaço envolvente e com actividades sobre objectos tridimensionais.

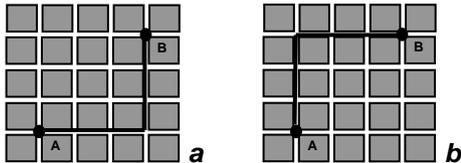
## CAMINHOS

Quantos caminhos diferentes existem para ir do ponto A ao ponto B?  
Considere apenas os caminhos mais curtos sobre a linha do quadriculado.

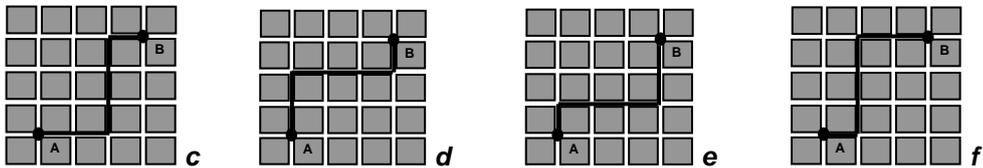


### Hipóteses possíveis

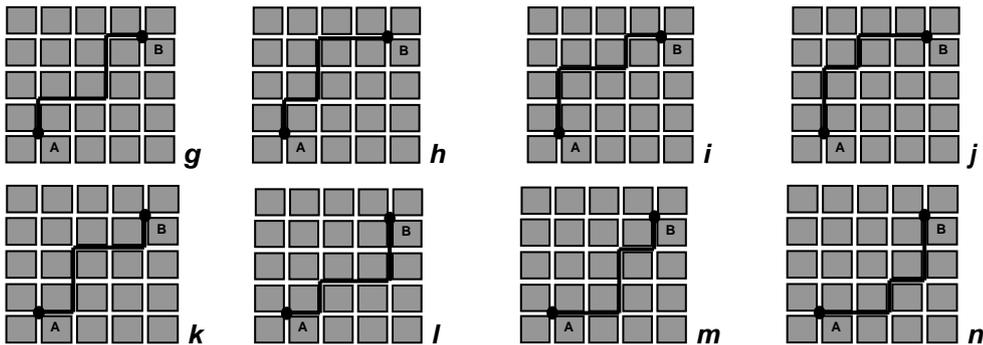
Com apenas 1 esquina:



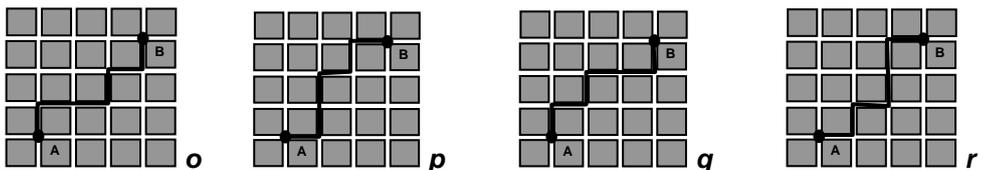
Com 2 esquinas:



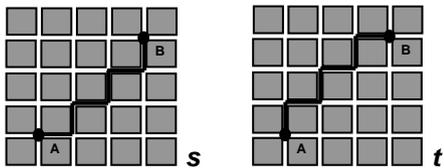
Com 3 esquinas:



Com 4 esquinas:



Com 5 esquinas:



### Notas e comentários

Com esta actividade pode explorar-se o traçado de itinerários em quadriculado e a respectiva distância entre dois pontos. Podemos observar que numa grelha quadriculada a distância mais curta entre dois pontos assume diferentes itinerários, enquanto que no plano euclidiano corresponde apenas a um único

segmento de recta. Na grelha quadriculada alguns axiomas da geometria euclidiana são colocados em causa<sup>1</sup>.

Outro aspecto que se pode explorar prende-se com a simetria. Há caminhos que se podem obter pela reflexão de outro. Por exemplo  $a - b, h - l, i - m, j - n, \dots$ . Mas para além da simetria de reflexão, está presente a rotação. É o caso de  $c$  para  $f$  e de  $d$  para  $e$ , entre outros, em que houve rotação de meia volta.

Um terceiro objectivo prende-se com o desenvolvimento de capacidades de visualização.

### ***Outras tarefas associadas***

Existem outras tarefas que se podem considerar associadas a esta, embora tenham um valor diferente, que consistem em fazer ditados de percursos em quadriculado ou em descrever esses mesmos percursos, tanto no que diz respeito à orientação como à distância percorrida.

No entanto existe ainda outra possibilidade de conexão com Números e Cálculo. Trata-se de investigar porque são 20 os itinerários encontrados.

### ***Proposta para os alunos***

Os alunos podem realizar a tarefa em folhas de papel quadriculado, embora seja mais fácil se lhes for fornecida uma folha de trabalho com os pontos já assinalados dentro de manchas quadriculadas em número superior ao das soluções existentes. É da maior importância a comparação das soluções obtidas entre os diferentes alunos e a discussão de arrumações possíveis, por exemplo, arrumar pelo número de esquinas, ou pela simetria. Tudo depende também do que os alunos serão capazes de observar entre os diferentes itinerários.

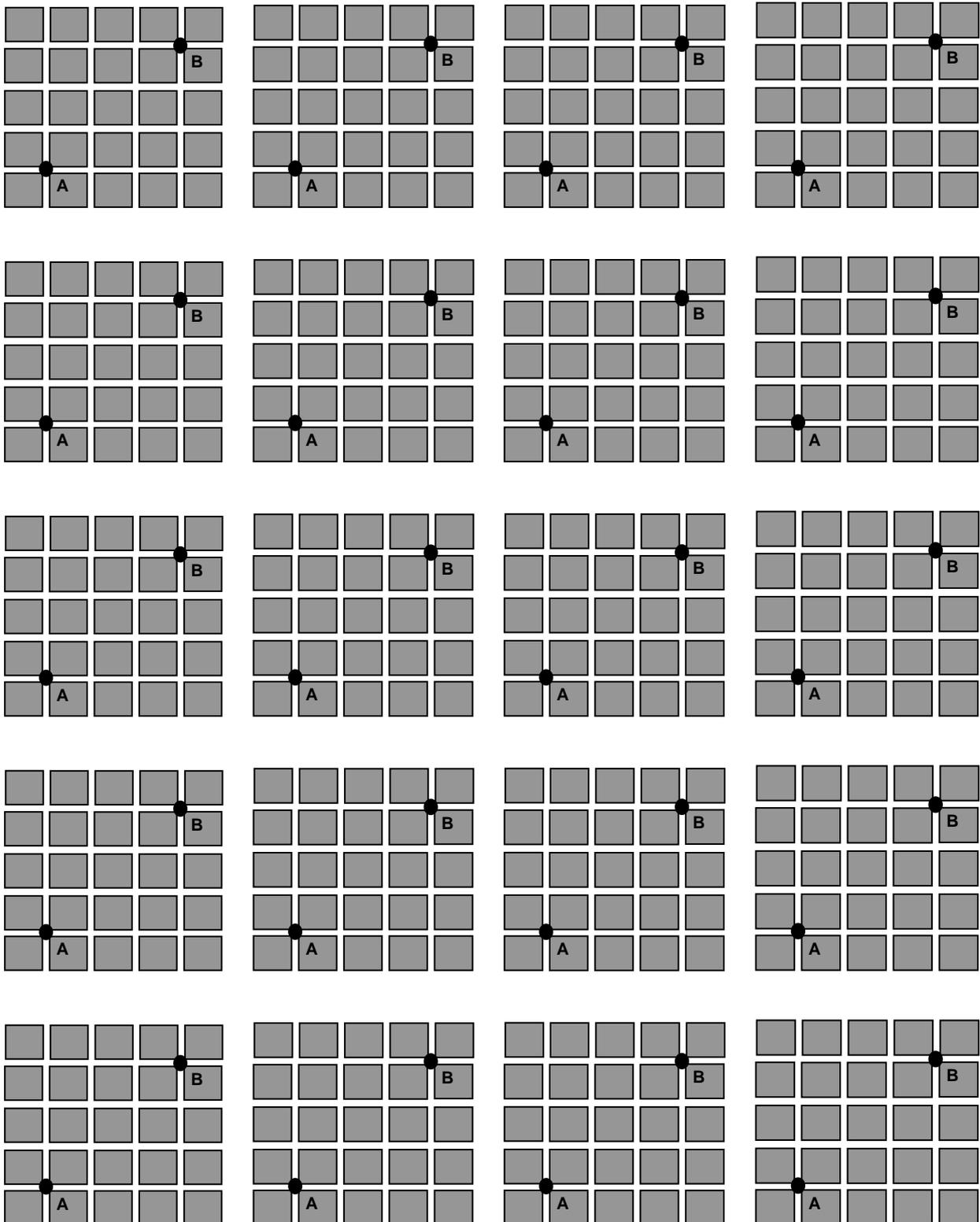
---

<sup>1</sup> É também o caso da linha formada pelos pontos equidistantes de um determinado ponto, que no plano euclidiano é uma circunferência, mas na grelha quadriculada (chamada geometria do motorista de táxi) é um quadrado.

## CAMINHOS

Quantos caminhos diferentes existem para ir do ponto A ao ponto B?

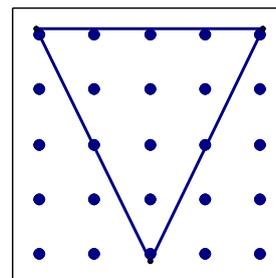
Considera apenas os caminhos mais curtos sobre a linha do quadriculado.



**OBSERVA E DESENHA 1**

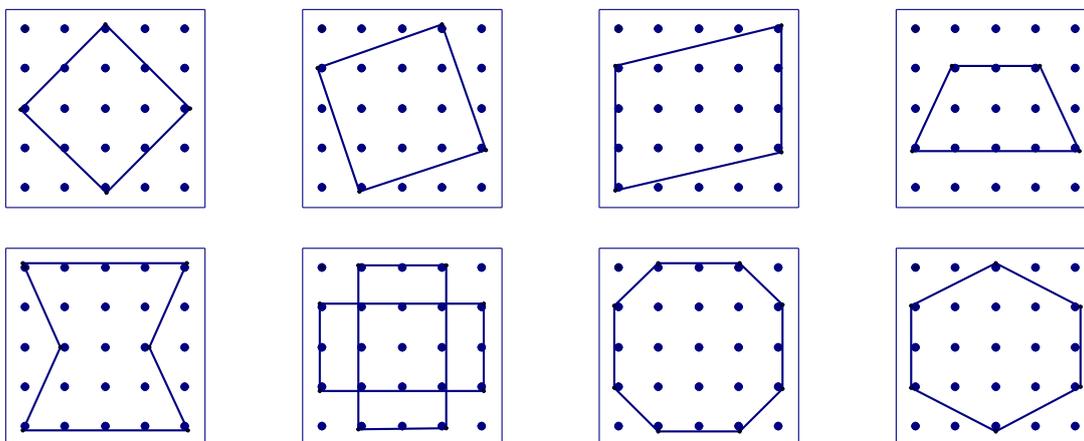
Observe a figura dada durante alguns segundos.

Sem o modelo, represente a figura que viu no seu GEOPLANO.



**Hipóteses possíveis**

Neste caso há apenas um resultado possível. Existem, no entanto muitas figuras interessantes para explorar.



**Notas e comentários**

O objectivo desta tarefa prende-se com a percepção de relações espaciais e com o desenvolvimento de capacidades de visualização. A capacidade de visualização é imprescindível no desenvolvimento de competências em geometria<sup>2</sup>.

**Outras tarefas associadas**

Descobrir um padrão numa sequência de imagens propondo-se descobrir a figura seguinte (*OBSERVA E DESENHA 2*) e perceber figuras dentro de outras (*FIGURAS COM TRIMINÓS*) são duas das tarefas que promovem o desenvolvimento das capacidades de visualização.

**Proposta para os alunos**

Proponha oralmente esta tarefa aos seus alunos. Pode mostrar a figura já montada num geoplano, durante um período adequado de tempo e pedir aos alunos para a representarem nos geoplanos deles. Volte depois a mostrar a figura para que eles possam confirmar a sua solução.

Com este tipo de recurso o professor pode criar uma dinâmica de rapidez fazendo com os alunos este exercício com várias figuras diferentes.

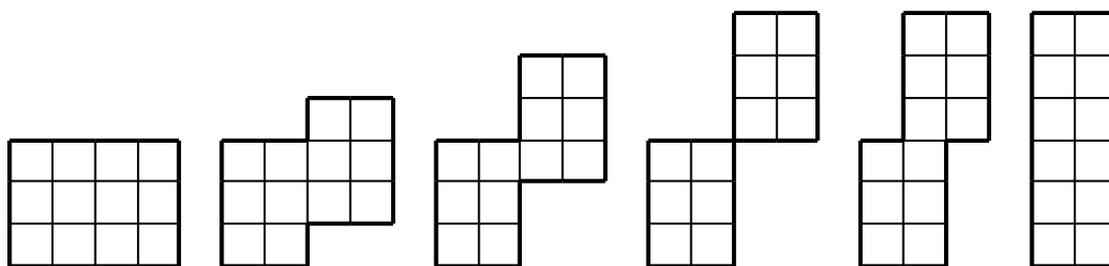
Depois de representadas as figuras os alunos podem descrever as suas características.

Pode também apresentar as figuras usando um retroprojector

<sup>2</sup> Ver documento sobre as capacidades de visualização em anexo.

### **OBSERVA E DESENHA 2**

Observe a sequência de 6 figuras durante 30 segundos. Esconda a sequência e desenhe-a em papel quadriculado.



Diga como passou de uma figura para a seguinte.

Explique como relaciona cada figura com a anterior.

### **Hipóteses possíveis**

Podemos considerar que a primeira figura é formada por dois retângulos de 3x2 e que o da direita se desloca para cima e depois para a esquerda, uma quadrícula de cada vez.

Podemos também considerar que as duas quadrículas do canto inferior direito são recortadas e deslocadas para cima e que este processo se repete mais duas vezes, até ao momento em que passam a ser as três quadrículas de cima à direita a passar para a esquerda.

Diferentes pessoas apresentam diferentes processos de memorizar a sequência e de relacionar as figuras entre si.

### **Notas e comentários**

O objectivo desta tarefa prende-se com o desenvolvimento de capacidades de visualização e com a percepção de relações espaciais.

### **Outras tarefas associadas**

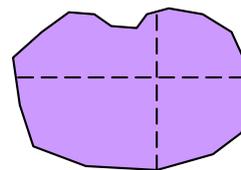
Descobrir um padrão numa sequência de imagens propondo-se descobrir a figura seguinte (*OBSERVA E DESENHA 1*) e perceber figuras dentro de outras (*FIGURAS COM TRIMINÓS*) são duas das tarefas que promovem o desenvolvimento das capacidades de visualização.

### **Proposta para os alunos**

Proponha oralmente esta tarefa aos seus alunos apresentando a sequência, durante um determinado tempo, usando um retroprojector, e pedindo de seguida a sua reprodução. Compare e discuta com os alunos as diferentes produções. Procure que eles explicitem o modo como memorizaram a sequência ou como relacionaram as figuras para as conseguirem reproduzir. Peça aos alunos que não conseguiram reproduzir a sequência que explicitem onde falharam e porquê. Volte a apresentar a mesma tarefa alguns dias depois com pequenas alterações nas figuras .

## EXPLORANDO ÂNGULOS

Como dobrar uma folha de papel de modo a obter dois vincos perpendiculares?



### Hipóteses possíveis

Na verdade basta seguir uma regra muito simples: a primeira dobragem (fig.1) é livre, a segunda tem de fazer coincidir o primeiro vinco sobre ele próprio (fig.2).

É de notar que qualquer outra dobragem (fig.3) que não siga esta regra possibilita a visualização de outros ângulos (fig.4).

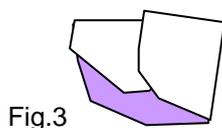


Fig.3

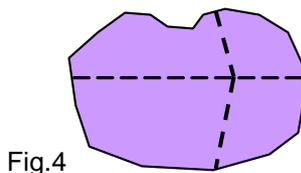


Fig.4

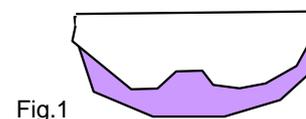


Fig.1

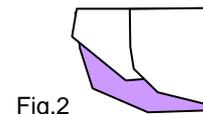


Fig.2

Não é imperioso que as dobragens sejam feitas uma sobre a outra. Pode fazer-se a primeira dobragem, desdobrar a folha e voltar a dobrar noutro sentido.

### Notas e comentários

Pode começar-se através da realização de dobragens ao acaso, procurando observar de seguida o efeito que se consegue. Isto até se verificar que há uma forma de dobrar, que deixa a folha dobrada em quatro ângulos iguais. Ao abrir a folha (fig.3) verifica-se a perpendicularidade das linhas formadas pelos vincos, uma vez que os 4 ângulos que definem são congruentes.

A ideia de trabalhar com folhas de papel com contornos irregulares sublinha a noção de amplitude como a “abertura entre as linhas”, evitando a confusão com a área, o que poderia surgir se a folha fosse um quadrado ou um retângulo e pedíssemos para a dobrar em 4 partes iguais.

A comparação de ângulos com a mesma amplitude mas cujos lados tenham diferentes comprimentos permite desfazer a ideia de que um possa ser maior que o outro por ter os lados mais compridos. A visualização de ângulos formados pelos ponteiros de um relógio ou pela abertura de uma porta proporciona o desenvolvimento de uma noção de ângulo mais dinâmica, isto é, como resultado de uma rotação.

### Outras tarefas associadas

TARTARUGA TONTA

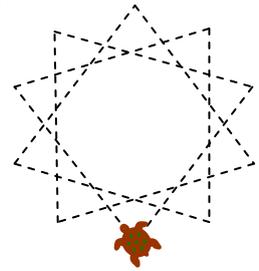
### Proposta para os alunos

A proposta deve ser colocada oralmente.

É de todo útil que os alunos possam experimentar várias dobragens e verificar que em mais nenhuma (a não ser na que faz coincidir o vinco sobre ele próprio) se verifica a igualdade das aberturas.

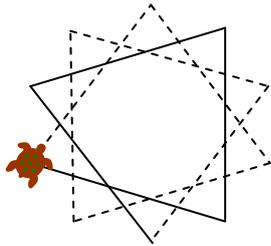
## TARTARUGA TONTA

Quantas voltas dá a tartaruga para desenhar a estrela e voltar à posição inicial?  
E de cada vez que vira, vira sempre o mesmo ou faz ângulos diferentes?  
Quanto é que vira de cada vez?

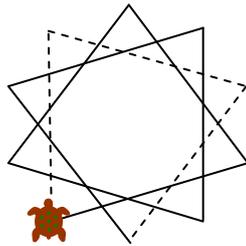


### Hipóteses possíveis

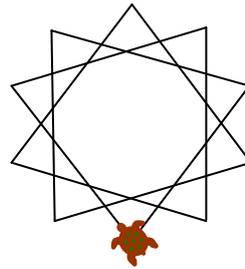
Só há, na verdade, uma resposta possível:



1ª volta



2ª volta



3ª volta

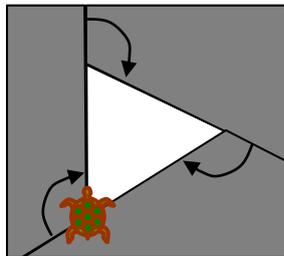
3 voltas são  $3 \times 360^\circ = 1080^\circ$

$1080^\circ : 10$  ângulos iguais =  $108^\circ$

O ângulo interno em cada vértice deste polígono estrelado é  $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

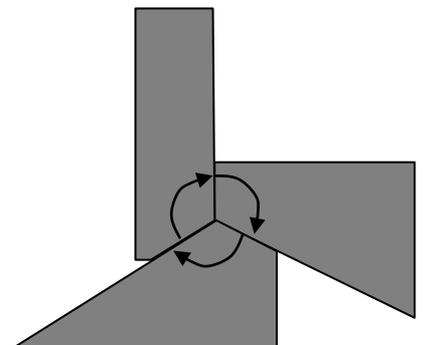
### Notas e comentários

O objectivo desta tarefa é abordar de uma forma mais dinâmica a noção de ângulo associando-o à rotação da tartaruga e descobrir a amplitude dos ângulos “desenhados” pela rotação da tartaruga ao traçar diferentes polígonos regulares. Quanto é que roda a tartaruga de cada vez que vira para desenhar um triângulo equilátero?



A soma das amplitudes dos ângulos descritos pela tartaruga ao desenhar polígonos regulares, ângulos externos do polígono, é sempre um ângulo giro ( $360^\circ$ ).

Depois de recortados, os ângulos podem justapor-se e podemos verificar que a



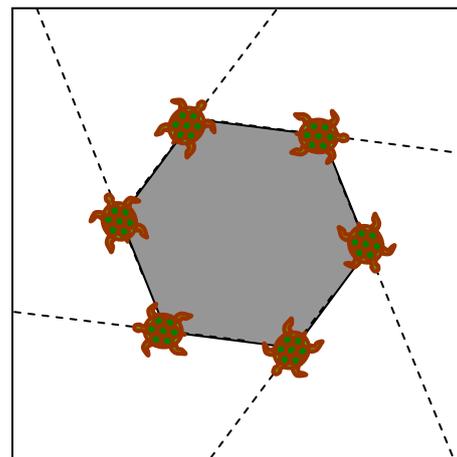
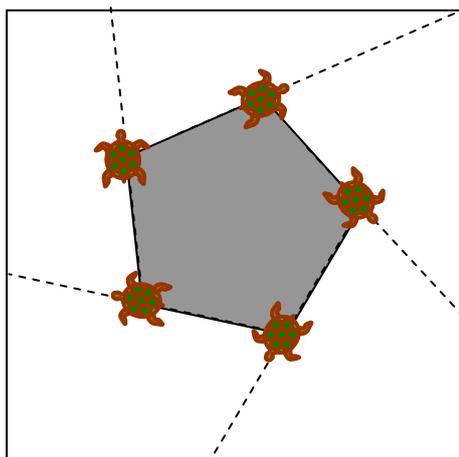
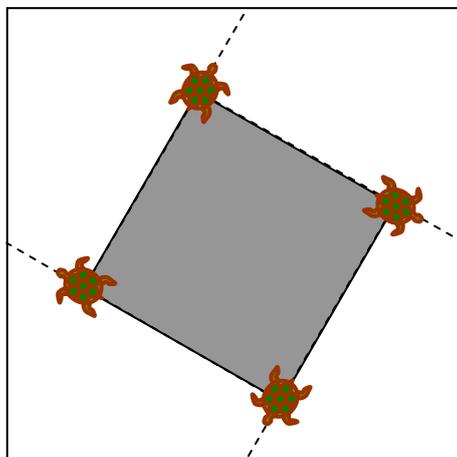
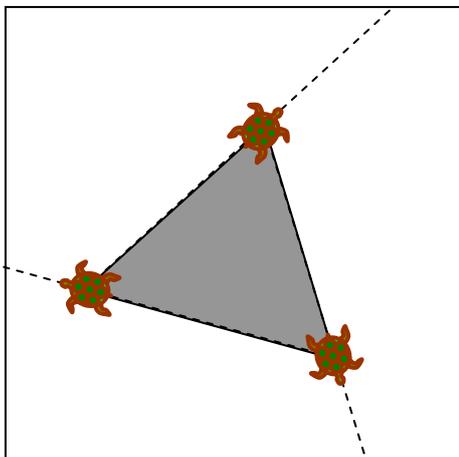
tartaruga fez uma volta completa. Pode também verificar-se, por sobreposição, que os ângulos são iguais. O facto de serem iguais decorre de se tratar de um polígono regular, o que permite o cálculo da amplitude do ângulo, dividindo  $360^\circ$  pelo número de ângulos. Sabendo o valor do ângulo que a tartaruga descreve, pode também calcular-se a amplitude do ângulo interno da figura, uma vez que são suplementares um do outro. Para o triângulo equilátero o ângulo suplementar do ângulo interno é  $360^\circ : 3 = 120^\circ$ . O ângulo interno é  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

### Outras tarefas associadas

Esta tarefa foi inspirada na linguagem LOGO, onde uma tartaruga desenha de acordo com ordens simples como, por exemplo, andar para a frente 40 passos, virar à direita 90. No caso de as repetirmos 4 vezes, a tartaruga desenha um quadrado. Com base neste tipo de ordens, podemos propor aos alunos que façam as vezes da tartaruga e se desloquem no espaço sob as ordens de outros.

**Proposta para os alunos**

Pode propor-se aos alunos que verifiquem que a soma das amplitudes dos ângulos descritos pela tartaruga ao desenhar polígonos regulares é sempre um ângulo giro ( $360^\circ$ ). Fornecendo-lhes as figuras desenhadas em papel os alunos podem recortar os ângulos descritos pela tartaruga e justapô-los.

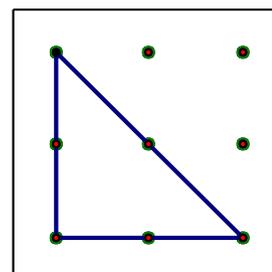


### **BANDEIRAS TRIANGULARES<sup>3</sup>**

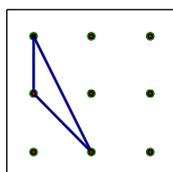
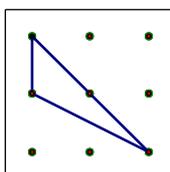
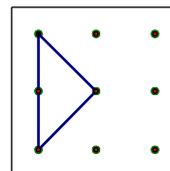
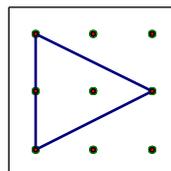
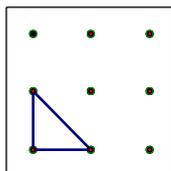
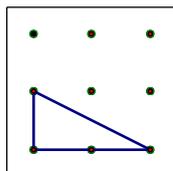
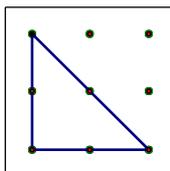
Ajude-me a desenhar uma bandeira triangular diferente.

Use o GEOPLANO (3 por 3) para descobrires triângulos diferentes.

Desenhe cada bandeira que construir no papel pontead.



#### **Hipóteses possíveis**



#### **Notas e comentários**

Dois dos aspectos fundamentais desta tarefa são a construção de figuras iguais em posições diferentes e a passagem da representação no geoplano para o papel pontead.

Problemas como este permitem aos alunos a exploração, a visualização, a observação e a discussão sobre diferentes conceitos. O objectivo desta actividade prende-se com a aferição de conceitos geométricos, nomeadamente de triângulo, ao mesmo tempo que o professor tem acesso às estratégias utilizadas pelos alunos para analisar figuras geométricas.

O professor pode colocar questões como: “Todas as figuras representam triângulos?” “O que faz com que todas sejam triângulos?” “O que têm em comum?” “Há alguma figura que não seja triângulo?” “O que a distingue dos triângulos?” “Os triângulos são diferentes?” “Como se distinguem?” “Haverá algum outro tipo de triângulo que não esteja representado?”

Esta discussão pode depois ser orientada para questões relacionadas com o número de lados e/ou de ângulos (provavelmente os triângulos escalenos terão sido rejeitados, porque com bastante frequência os triângulos apresentados aos alunos são equiláteros e isósceles e sempre posicionados com a mesma orientação).

É natural que os alunos considerem triângulos iguais como figuras diferentes apenas por se encontrarem com orientações diferentes. O tamanho é outro critério utilizado pelos alunos para diferenciar figuras.

A representação dos triângulos no geoplano permite levar os alunos a comparar, sem usar medidas, o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos, levando-os a concluir que alguns triângulos têm dois lados iguais. É importante notar que no geoplano não é possível construir um triângulo equilátero.

<sup>3</sup> Adaptado de Hartweg, K. (2005) – *Solutions to the Triangular Bicycle Flags Problem* – in Teaching Children Mathematics, May 2005, pp. 446 - 471.

Os ângulos também podem ajudar a distinguir triângulos retângulos, obtusângulos e acutângulos.

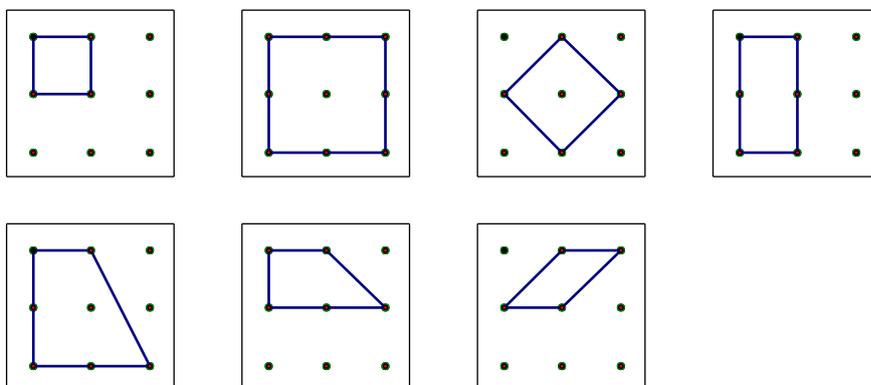
Ao limitar, os alunos, ao uso do geoplano e do papel pontado é natural que o triângulo isósceles 1-1- $\sqrt{2}$  seja confundido com o equilátero 1-1-1 uma vez que podem pensar que qualquer distância entre dois pregos é entendida como uma unidade, não se tornando evidente que na diagonal esta distância é maior.

A construção de um triângulo equilátero pode ser colocada como um desafio. Desafie-os também a justificar a impossibilidade dessa construção no geoplano de malha quadrangular. Se tiver acesso a geoplanos de malha triangular pode discutir a possibilidade de construir um triângulo equilátero e a impossibilidade de construir um triângulo retângulo.

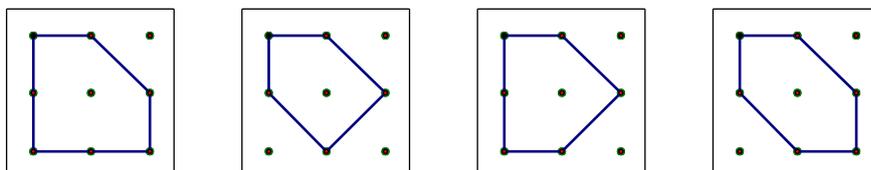
**Outras tarefas associadas**

Esta tarefa pode evoluir naturalmente para a construção livre de bandeiras com outras formas. Poderão assim surgir quadriláteros e outros polígonos, tanto côncavos como convexos.

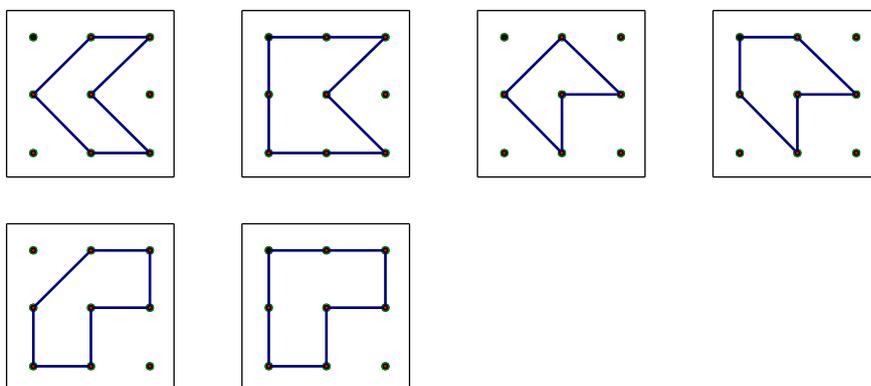
Bandeiras que são quadriláteros



Bandeiras que são polígonos convexos



Bandeiras que são polígonos côncavos



### **Proposta para os alunos**

Normalmente, os alunos manifestam grande entusiasmo em tarefas que envolvem a descoberta. Neste caso, é preferível ser o professor a orientar o processo, sobretudo a discussão em colectivo, em vez de trabalharem autonomamente, para evitar a dispersão. Os alunos poderão estar organizados em grupos, preferencialmente em pares. É importante que, nos momentos de discussão, todos os alunos tenham a oportunidade de visualizar o que os colegas descobriram. Para isso, o professor pode solicitar que os pares mostrem, à turma, através do próprio geoplano, dum acetato ou do registo em papel ponteadado (ampliado) afixado no quadro ou parede.

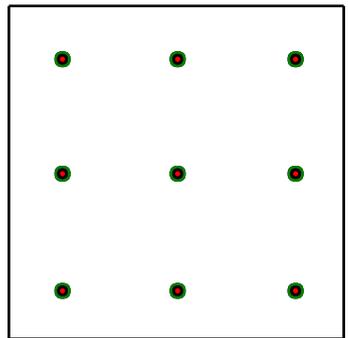
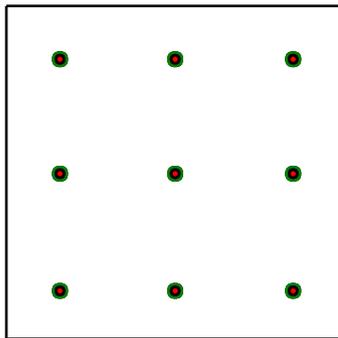
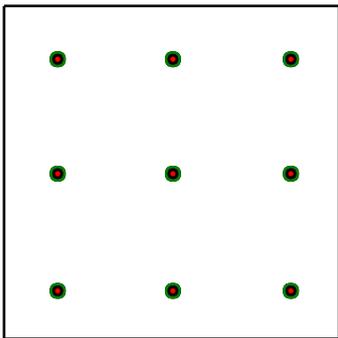
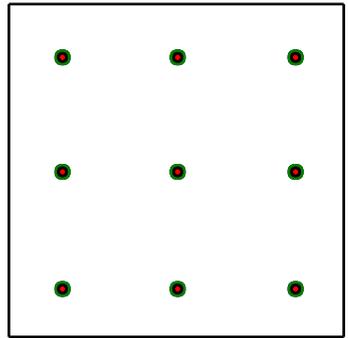
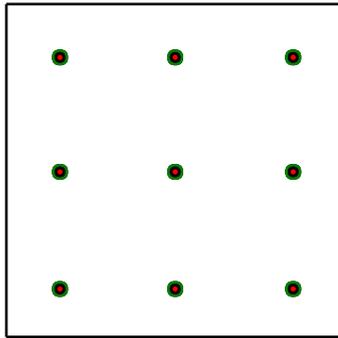
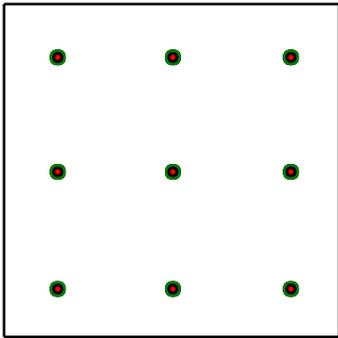
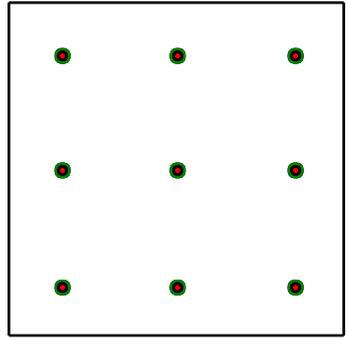
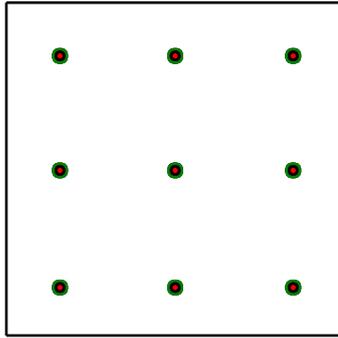
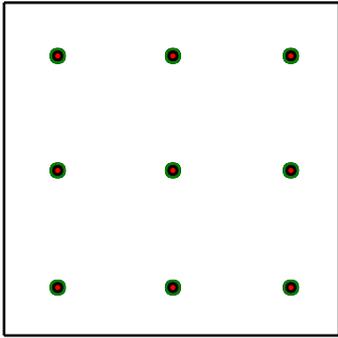
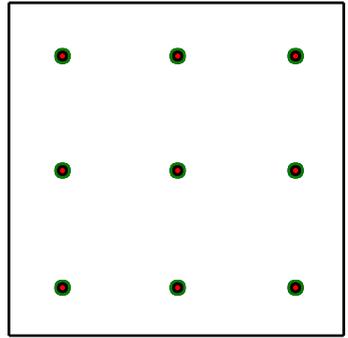
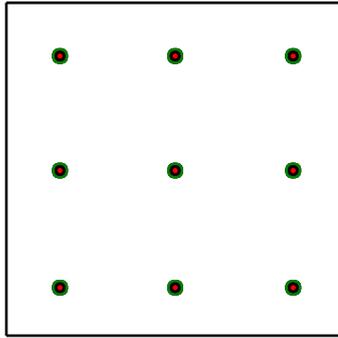
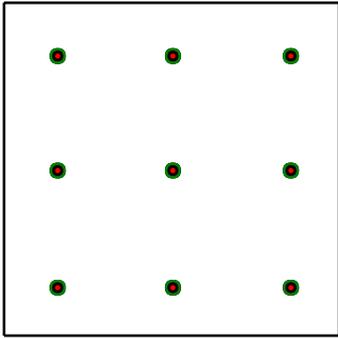
Esta tarefa poderá ser desenvolvida ao longo de um único momento ou faseada em vários, ou seja, em dias diferentes.

Material: geoplanos, elásticos e papel ponteadado, correspondente à malha do geoplano, para cada par de alunos. Para a discussão: papel ponteadado em acetato, canetas de acetato para cada grupo (se possível); retroprojector; ou papel ponteadado ampliado (para afixar no quadro ou parede)

Existem diferentes tipos de geoplanos, no mercado, cujas malhas são também de diferentes tipos e/ou dimensões (circular, quadrangular, isométrica). Os mais indicados, para alunos destas idades são os que têm a distância de 5 cm entre pregos e no total 25 pregos (malha quadrangular 5 x 5). Optando pela sua construção, o contraplacado de pinho de 8 mm é uma boa hipótese. (ver matriz em *Recursos*) Se construirmos estes geoplanos de forma a que os bordos sejam metade da distância entre pregos, podemos unir vários geoplanos, estendendo assim a capacidade de investigação.

A quantidade e a disposição dos pontos do papel ponteadado devem corresponder às dos pregos no geoplano. A distância entre os pontos não deverá ser inferior a 1 cm.

A malha do papel ponteadado em acetato deverá ser igual ao papel de registo.



## **POLIMINÓS**

Poliminós são figuras construídas por justaposição de quadrados congruentes.

Obtenha todas os poliminós diferentes que é possível construir com 2, 3, 4 e 5 quadrados. Represente cada um destas figuras em papel quadriculado.



Procure também obter todos os hexaminós, poliminós de 6 quadrados, e que são 35 no total.

### **Hipóteses possíveis**

Estas composições de quadrados são feitas com a condição de que, em cada figura, qualquer quadrado tenha sempre um lado totalmente justaposto ao de outro quadrado. Assim, não são aceites figuras como estas:

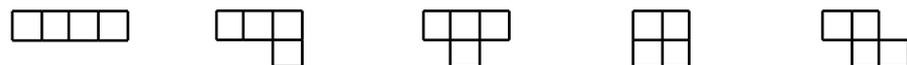


Com 2 quadrados apenas se pode obter um dominó. Figura que dá nome ao jogo tradicional cujas peças são precisamente formadas por 2 quadrados. A designação das peças das famílias seguintes é feita com a composição do prefixo tri, tetra, penta, hexa, seguido de *minó*. Temos assim dominós, triminós, tetraminós, pentaminós, hexaminós, heptaminós, etc.

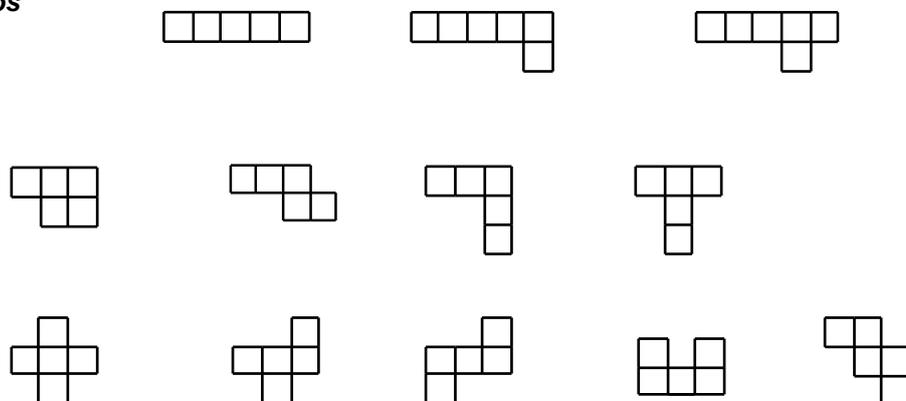
### **Triminós**



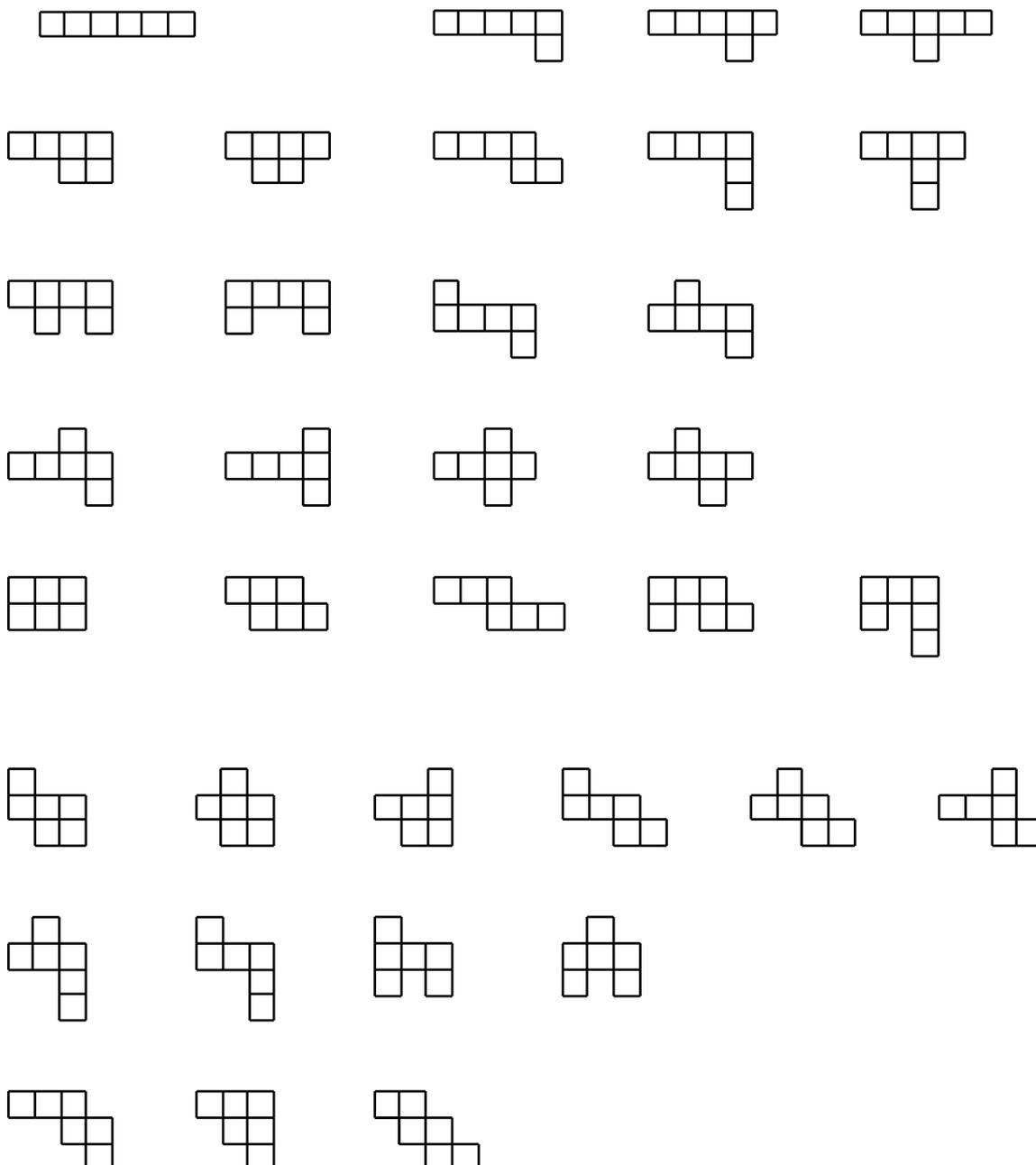
### **Tetraminós**



### **Pentaminós**



## Hexaminós



### Notas e Comentários

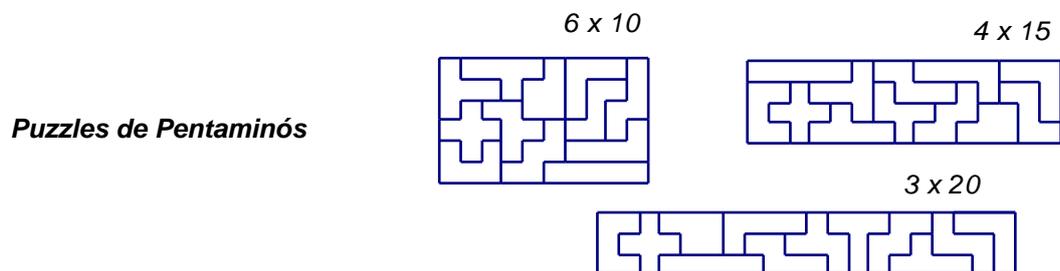
O reconhecimento de que dois poliminós são ou não congruentes é um dos aspectos geométricos mais importantes nesta actividade. Sobre este assunto ver as notas da actividade *POLICUBOS 1*, onde se discute a congruência de figuras no plano e no espaço.

Um outro aspecto importante é o reconhecimento de que se obtiveram todas as composições com um dado número de quadrados. Para isso é importante fazer uma pesquisa organizada, começando pelos quadrados todos em fila, movendo depois apenas alguns deles e fazendo-os ocupar posições rotativamente, analisando para cada caso se se obteve ou não uma figura congruente com outra já obtida. As soluções que apresentamos para cada tipo de poliminós foram dispostas com esta preocupação.

Os poliminós são composições de quadrados. Podem ser obtidas composições análogas com triângulos equiláteros e com hexágonos regulares, bem como com outros tipos de triângulos e de quadriláteros.

As composições de figuras podem ser feitas com recurso a material manipulável (figuras planas em espuma ou cartolina). Para o registo e representação destas composições podem ser utilizados papéis diversos, adequados à figura base: triangulado, ponteadado isométrico, quadriculado simples, quadriculado com diagonais, hexagonal.

Com alguns poliminós da mesma família é possível construir puzzles interessantes.



Também é interessante analisar quais são, em cada família de poliminós, aqueles que pavimentam e aqueles que não pavimentam o plano.

Para conhecer mais sobre os poliminós há uma publicação muito interessante da autoria de Martin, George. E., 1996, *Polyominoes*, The Mathematical Association of America, MAA, USA.

Para além da possibilidade de discutir aspectos geométricos importantes, este tipo de actividades promove o desenvolvimento de capacidades de visualização.

### **Outras tarefas associadas**

Como já referimos, todas as actividades de composição de figuras com estas regras estão ligadas. *FIGURAS COM TRIMINÓS* e *POLIDIAMANTES* são duas actividades com o mesmo tipo de objectivos.

Há uma ligação muito forte também às actividades de planificação do cubo visto que todas as planificações do cubo são hexaminós. A actividade *CUBOS CRESCENTES*, explora este aspecto das planificações do cubo. Nesta linha de trabalho sobre planificações, é interessante pensar quais são os pentaminós que são planificação de uma caixa cúbica aberta, isto é, os que dão para montar um cubo com uma face em falta. É uma tarefa que pode ser feita com planificações de cartolina.

Para o desenvolvimento da memória visual, uma actividade interessante pode ser o professor mostrar um poliminó no retroprojector e depois esconder. Os alunos terão então que reproduzir a figura escondida, com quadrados ou em papel quadriculado. É uma tarefa adequada a ser realizada individualmente ou a pares. Neste caso cada aluno deve ter material para construir a sua figura que depois será comparada com a do colega.

### **Proposta para os alunos**

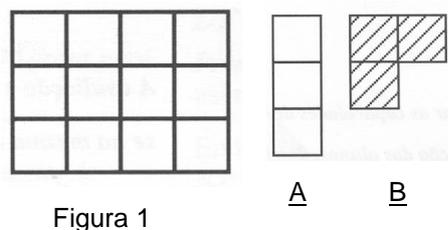
Esta proposta deve ser apresentada aos alunos oralmente. De acordo com o nível de desenvolvimento dos alunos o professor decidirá com que número de peças base vão trabalhar.

A tarefa deve ser realizada com o recurso a quadrados soltos, de espuma ou de cartolina, e folhas quadriculadas para representar os poliminós.

A discussão desta actividade em grande grupo pode ser auxiliada com o suporte do retroprojector onde é possível usar as peças elementares. Podem ser feitos também cartazes em papel de cenário com os quadrados colados ou presos com *bostik*.

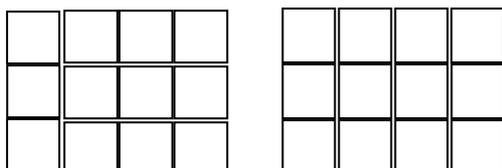
## FIGURAS COM TRIMINÓS<sup>4</sup>

A Figura 1 poderá ser construída pelos módulos A e B?

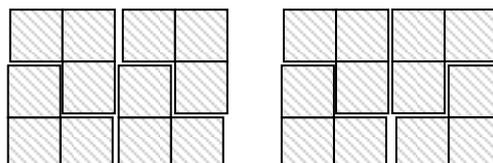


### Hipóteses possíveis

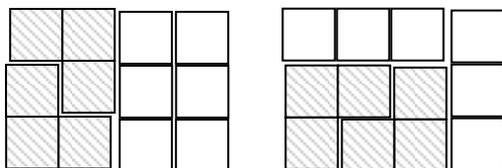
Só com o módulo A



Só com o módulo B



Com os módulos A e B



### Notas e comentários

O objectivo desta actividade é reconhecer figuras geométricas de vários tamanhos e em diferentes posições, assim como descobrir duas ou mais figuras relacionadas entre si ou com outras. Esta capacidade é designada por "percepção das relações no espaço".

Ao apreenderem a noção das relações espaciais e da profundidade, os alunos poderão calcular e avaliar objectos no seu contexto, e ao imaginarem inicialmente um objecto no espaço, adquirem uma ideia mais precisa do objecto que observam, do que tocando-lhe, apenas, com as mãos. Esta actividade exige que eles manipulem (façam deslizar, invertam e rodem) mentalmente as figuras geométricas.

Os alunos devem ser encorajados a visualizar as soluções. Contudo, a maioria precisará de fazer e usar muitas cópias dos módulos azuis e vermelhos.

### Outras tarefas associadas

POLIMINÓS e POLIDIAMANTES

### Proposta para os alunos

Necessitará de cópias da ficha de trabalho *CONSTRUIR FIGURAS COM TRIMINÓS*, canetas ou lápis azuis e vermelhos, um acetato da ficha de trabalho e várias cópias das figuras azuis e vermelhas para passar no retroprojector.

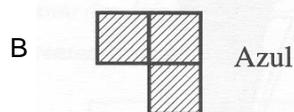
Distribua as cópias da ficha *CONSTRUIR FIGURAS COM TRIMINÓS* e dê as seguintes instruções: *Existem dois módulos desenhados no interior da moldura quadrada, apresentada na vossa ficha de trabalho. Pintem um de vermelho e o outro de azul (ilustre o procedimento no retroprojector). Como poderiam construir a primeira figura, usando os módulos que pintaram de vermelho e azul?* Faça a demonstração, resolvendo o

<sup>4</sup> (adaptado de *Colecção de Aendas do NCTM / Anos de escolaridade K-6, APM*)

problema no retroprojector. Instrua os alunos a "preencherem" a primeira figura usando os dois módulos, o vermelho e o azul. Chame a atenção para o facto de que eles poderão usar mais do que um módulo vermelho ou azul em cada figura. Quando tiverem terminado, peça-lhes para mostrarem as suas soluções no retroprojector. Repita a actividade para as restantes figuras.

### CONSTRUIR FIGURAS COM TRIMINÓS

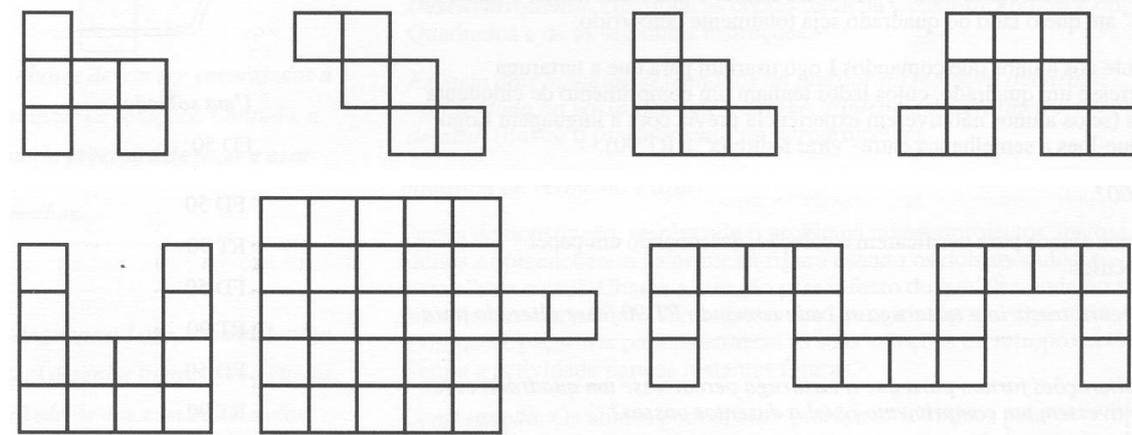
Vais precisar de lápis de cor azul e vermelho, papel quadriculado e tesoura.



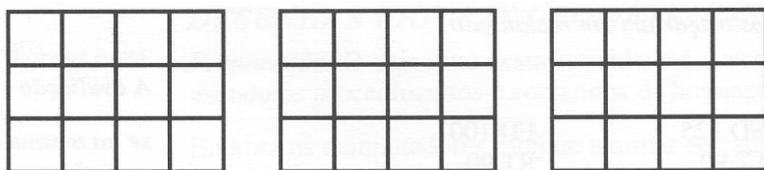
- Faz várias cópias dos módulos A e B e pinta-os de vermelho e azul.

- Cada uma das figuras a seguir apresentadas pode ser construída com módulos vermelhos, azuis, ou vermelhos e azuis.

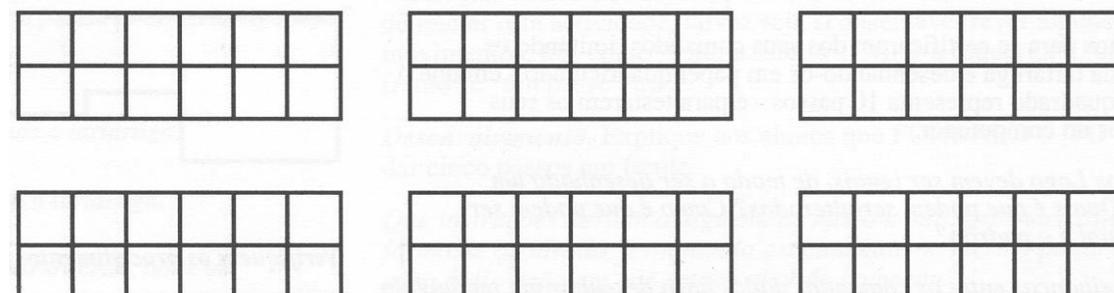
- Usa os módulos vermelhos e azuis para mostrar como é que as figuras abaixo podem ser construídas.



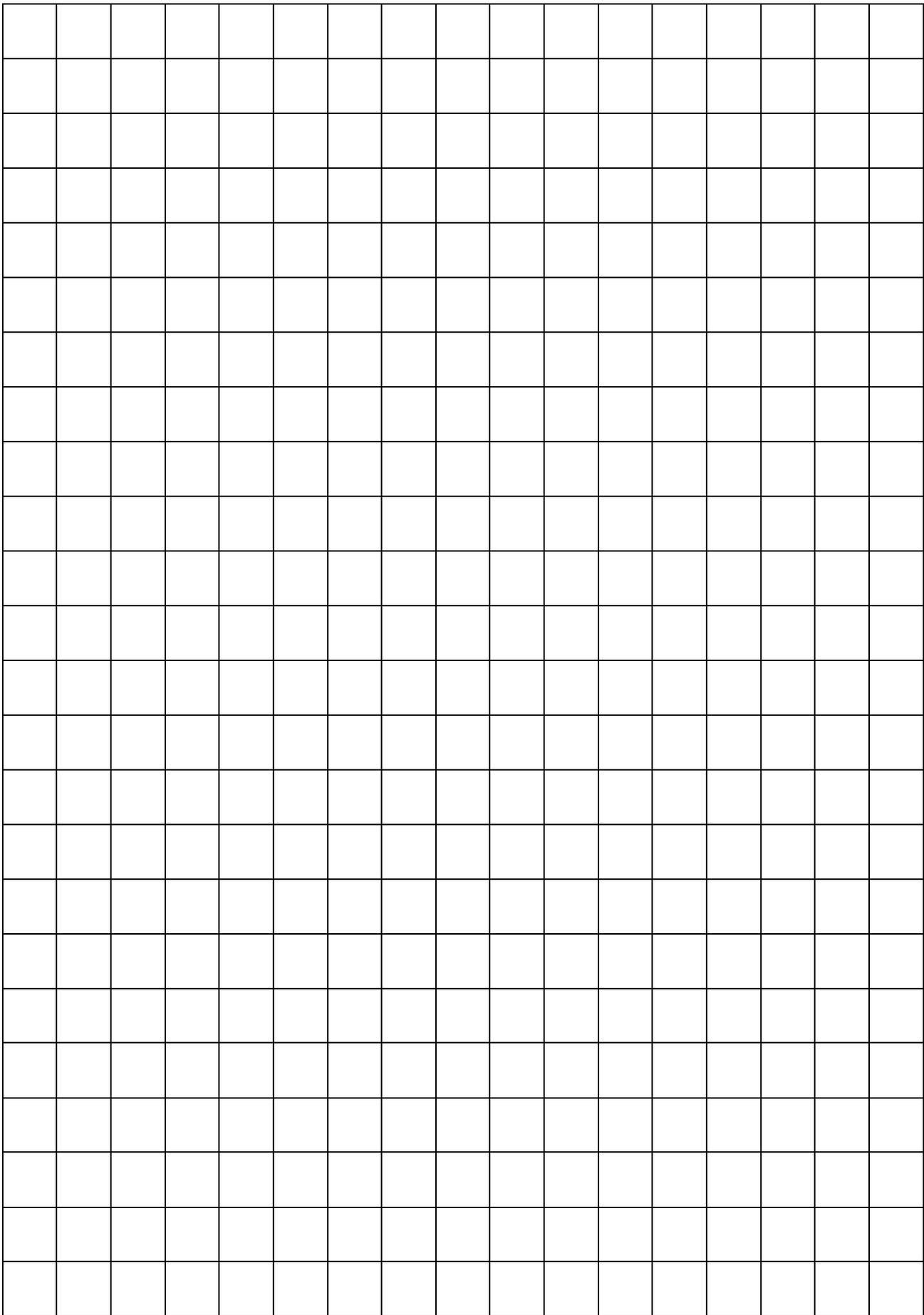
Preenche, com os módulos, os três rectângulos de maneiras diferentes.



Usa os módulos vermelhos e azuis para preencher estes rectângulos de tantas maneiras diferentes quantas conseguires descobrir.







## **POLIDIAMANTES**

Polidiamantes são composições obtidas por justaposição de triângulos equiláteros todos congruentes entre si.

Obtenha todos os polidiamantes que é possível construir com 2, 3, 4 e 5 triângulos equiláteros.



### **Hipóteses possíveis**

Nesta justaposição, dois lados de triângulos justapõem-se totalmente e não pode haver buracos. As seguintes composições não são aceites como polidiamantes.



De acordo com o número de triângulos usados, os polidiamantes são designados por: diamantes (2); tridiamantes (3); tetradiamantes (4); pentadiamantes (5); hexadiamantes (6); heptadiamantes (7); etc. Mais correctamente as designações a partir da ordem 3 não deveriam conter a sílaba “di”, pois isso interpretado à letra dá uma duplicação de contagem de elementos. Tridi deveria significar 6 elementos, tetradi 8, e assim por diante. Porém, do ponto de vista da oralidade soa melhor com essa sílaba, por isso vamos mantê-la.

### **Tetradiamantes**



### **Pentadiamantes**



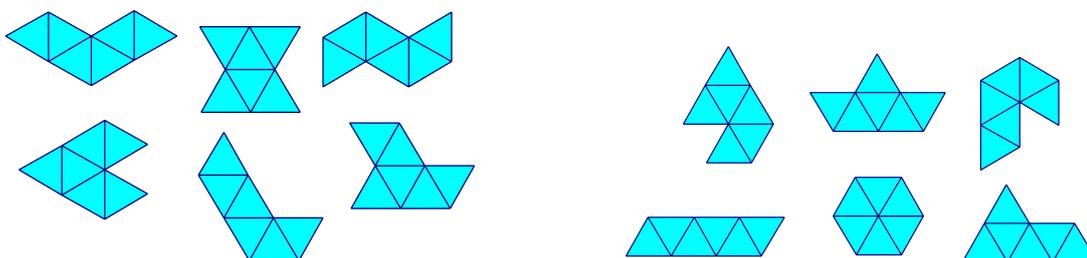
### **Notas e Comentários**

O reconhecimento da congruência entre dois polidiamantes exige mais segurança na visualização. É muito comum serem representados polidiamantes congruentes em posições diferentes sem se dar pelo erro de repetição.

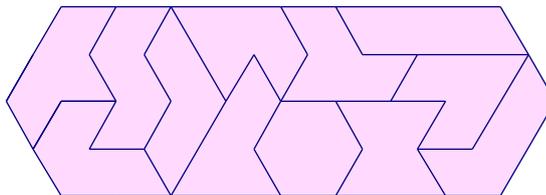
A tabela apresenta o número de polidiamantes que é possível construir com os números de triângulos dados.

Nº triângulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº figuras	1	1	1	3	4	12	24	66	160	448

Os 12 hexadiamantes podem ser olhados como figuras temáticas.



Às seis figuras da esquerda podemos associar nomes de animais: gaivota, borboleta, cobra, peixe, cisne, pato. Às seis da direita podemos associar nomes de objectos: barco, chapéu, gancho, faca, vela, berço. Estas 12 figuras permitem fazer uma composição perfeita que é um puzzle.



Os polidiamantes podem ser construídos com recurso a triângulos equiláteros de espuma ou de cartolina. Para o registo pode ser utilizado papel triangulado equilátero ou ponteadado isométrico. Para além da possibilidade de discutir aspectos geométricos importantes, este tipo de actividades promove o desenvolvimento de capacidades de visualização.

### ***Outras tarefas associadas***

Como já referimos, todas as actividades de composição de figuras com estas regras estão ligadas. *POLIMINÓS*, *POLIDIAMANTES* e *FIGURAS COM TRIMINÓS* são duas actividades com o mesmo tipo de objectivos.

Analogamente ao que foi dito para os hexaminós, há também uma ligação entre os tetradiamantes e as planificações do tetraedro. Embora neste caso a situação não ofereça a mesma riqueza que a outra.

### ***Proposta para os alunos***

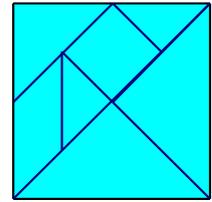
Esta proposta deve ser apresentada aos alunos oralmente. De acordo com o nível de desenvolvimento dos alunos, o professor decidirá com que número de peças base vão trabalhar.

A tarefa deve ser realizada com o recurso a triângulos soltos, de espuma ou de cartolina, e folhas de papel adequado para representar os polidiamantes.

A discussão desta actividade em grande grupo pode ser auxiliada com o suporte do retroprojector onde é possível usar as peças elementares. Podem ser feitos também cartazes em papel de cenário com os quadrados colados ou presos com *bostik*.

## CONSTRUINDO O TANGRAM

Esta tarefa pode ser realizada oralmente com os alunos, explorando os conceitos geométricos que vão aparecendo a cada passo.

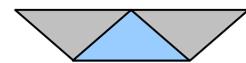


1. Pegue num quadrado de papel
2. Dobre-o ao meio.
  - 2.1. Que figuras encontrou?
3. Divida-o em 2 partes iguais, pela diagonal.
  - 3.1. Que figuras encontrou?
4. Pegue numa das metades, dobre-a ao meio e corte-a pelo vinco. Obteve 2 peças do TANGRAM.
5. Identifique-as (por nome, por número, por cor, como quiser).
6. Pegue na outra metade do quadrado original e dobre-a de maneira que o vértice que fica em frente ao lado maior encoste ao meio deste lado. Corte-a pelo vinco.
7. Que figuras obteve? O pedaço menor será a 3ª peça do TANGRAM. Identifique esta peça.
8. Pegue na parte maior e dobre-a ao meio. Corte-a pelo vinco.
  - 8.1. Que figuras obteve?
9. Pegue numa delas e dobre-a de modo a obter um quadrado e um triângulo. Separe-os. Obteve mais 2 peças do TANGRAM. Identifique-as.
10. Finalmente, a outra peça dobre-a de modo a obter um paralelogramo e um triângulo. Separe-os. Obteve mais 2 peças do TANGRAM. Identifique-as.

2 retângulos? 2 triângulos?

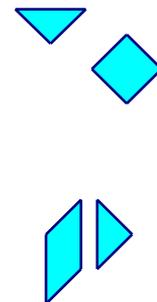
2 triângulos retângulos isósceles

Obtêm-se novamente 2 triângulos retângulos isósceles.



1 trapézio e 1 triângulo...

2 trapézios



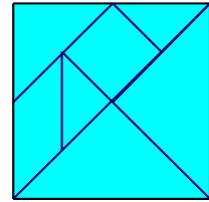
## CONSTRUIR FIGURAS COM O TANGRAM

Com as peças do TANGRAM constrói todos os quadrados possíveis.

E todos os triângulos.

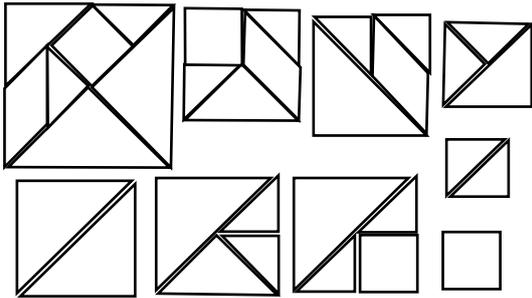
E todos os rectângulos.

E todos os paralelogramos.

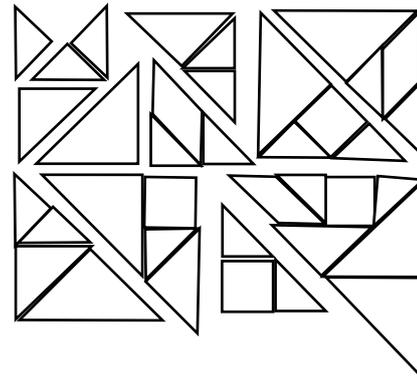


### Hipóteses possíveis

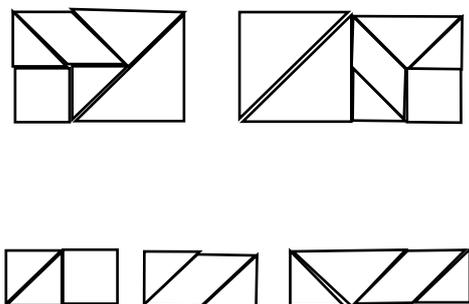
Quadrados:



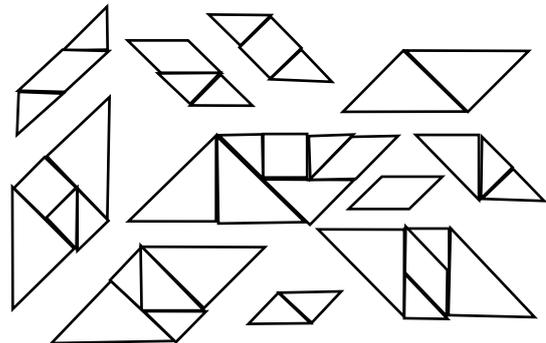
Triângulos:



Rectângulos (não quadrados):



Paralelogramos:



### Notas e comentários

Esta tarefa possibilita o estabelecimento de relações entre figuras e o desenvolvimento da visualização de figuras dentro de outras. Estes aspectos são importantes no conhecimento das propriedades geométricas das figuras. Ao manusear as peças do TANGRAM os alunos trabalham também, de uma forma implícita, com transformações geométricas, quando precisam de rodar uma peça ou de a voltar.

### Outras tarefas associadas

A tarefa *TRANSFORMAR*, exige o domínio das mesmas competências, num nível mais abstracto.

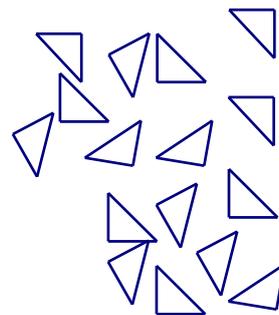
### Proposta para os alunos

Proponha, numa fase a descoberta de todos os rectângulos, noutra fase a descoberta de todos os quadrados, isto é, não proponha a descoberta de todas as figuras ao mesmo tempo. Esta é uma tarefa que exige tempo e persistência, mas é muito motivadora.

### **TRANGRAM REVISITADO**

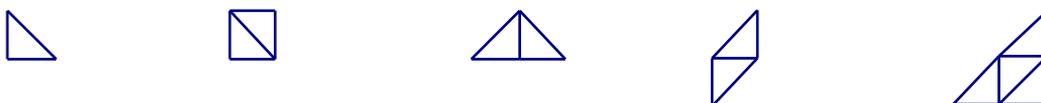
Utilize triângulos rectângulos isósceles, todos congruentes entre si, para obter cada um das peças do TANGRAM.

Quantos triângulos destes são necessários para obter todas as peças do TANGRAM?



### **Hipóteses possíveis**

A peça menor do TANGRAM é um triângulo rectângulo isósceles. Com esta peça é possível obter todas as outras.



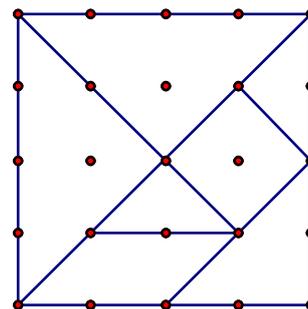
### **Notas e Comentários**

Um dos desafios desta actividade é a sua resolução sem recorrer a qualquer material. Para quem conhece muito bem o TANGRAM é um exercício interessante de memória visual.

Uma estratégia poderosa para realizar esta actividade é desenhar o TANGRAM num geoplano. Facilmente se vê a relação entre cada peça e a peça menor, o triângulo rectângulo isósceles mais pequeno.

Observando agora com atenção obtém-se também, mentalmente o número de triângulos necessários para formar cada uma das outras peças.

Esta actividade promove o desenvolvimento de capacidades de visualização e faz a ponte para o conceitos de figuras equivalentes e de medição de áreas.



### **Outras tarefas associadas**

Esta actividade está naturalmente ligada a todas as actividades que recorrem ao TANGRAM.

### **Proposta para os alunos**

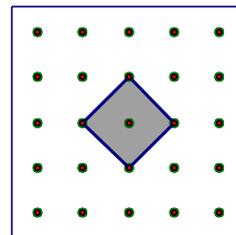
Esta proposta deve ser apresentada aos alunos oralmente, orientando-os para que desenhem por contorno, em papel branco, cada uma das peças do TANGRAM, e que depois preencham cada peça com a peça mais pequena, desenhando sempre o contorno.

## TRANSFORMAR

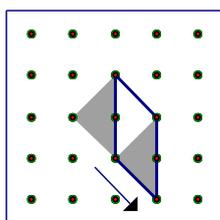
Em que figuras se pode transformar o quadrado?

Trata-se de cortar a figura de modo a poder compor uma nova figura com as diferentes partes obtidas.

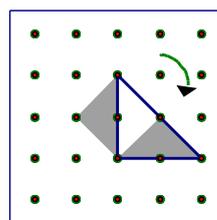
Para cada possibilidade descreva as transformações realizadas.



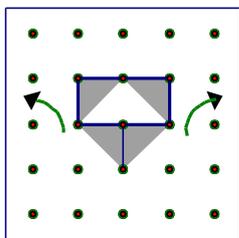
### Hipóteses possíveis



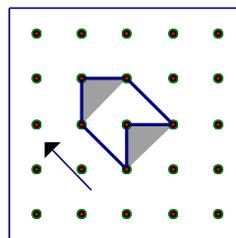
Seccionar pela diagonal e fazer a translação do triângulo obtido, de modo a obter um paralelogramo.



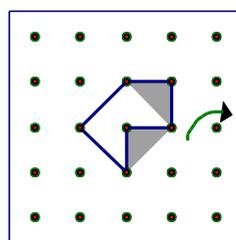
Seccionar pela diagonal e fazer a rotação do triângulo obtido, para conseguir um triângulo rectângulo isósceles.



Seccionar por uma diagonal e por outra até ao centro, obtendo dois triângulos que por rotação vão fazer um rectângulo.



Seccionar pelas diagonais até ao centro, obtendo um triângulo que por translação dará um hexágono côncavo.



Seccionar pelas diagonais até ao centro, obtendo um triângulo que por rotação dará um hexágono côncavo diferente do anterior.

### Notas e comentários

Estas actividades de seccionar uma figura para compor uma nova figura designam-se por dissecções. Envolvem em grande medida capacidades de visualização. Os processos de seccionar e recompor envolvem transformações geométricas.

### Outras tarefas associadas

Como introdução aos conceitos de translação, rotação e reflexão sugere-se a tarefa *DESLIZAR, VOLTAR E RODAR*.

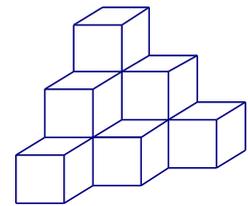
### Proposta para os alunos

Esta tarefa pode ser proposta oralmente tanto no GEOPLANO como em papel, fornecendo aos alunos quadrados de papel como os que se adquirem nas papelarias como recargas de blocos de notas.

A incidência fundamental deste bloco de tarefas é sobre capacidades de visualização e conhecimentos de geometria no espaço. Procuram contemplar a articulação espaço/plano pois em quase todas as tarefas há ligações entre o espaço e o plano. As tarefas escolhidas são um bom exemplo de maneiras de explorar objectos tridimensionais.

### **POLICUBOS 1**

Com vários cubos, colocados de modo a que dois deles tenham sempre uma face sobreposta, obtêm-se novas figuras, habitualmente designadas por policubos. A designação dos policubos varia de acordo com o número de cubos utilizados: dicubos (2); tricubos (3); tetracubos (4); ...

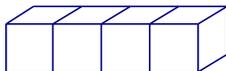


Obtenha todos os tetracubos diferentes.

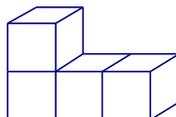
Construa outros policubos.

### **Hipóteses possíveis**

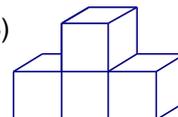
(1)



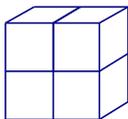
(2)



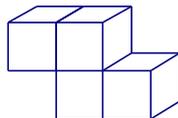
(3)



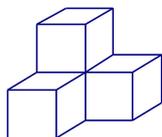
(4)



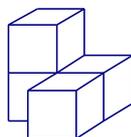
(5)



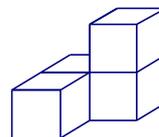
(6)



(7)



(8)

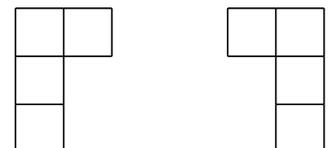


### **Notas e Comentários**

Esta tarefa deve ser realizada com o recurso a cubos de encaixe. Na construção e comparação das diversas hipóteses está presente o desenvolvimento de capacidades de visualização.

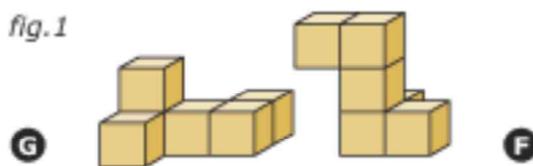
É uma tarefa que envolve o conceito de figuras congruentes, conceito este que levanta algumas questões interessantes. Formalmente em português a designação congruente é equivalente a geometricamente igual e há uma tendência crescente para preferir “congruente” a “geometricamente igual”. Ao nível elementar e por uma questão de simplificação usa-se apenas a designação “igual”. O reconhecimento de figuras congruentes no plano e no espaço oferece dificuldades diferentes.

Segundo Eduardo Veloso, “duas figuras planas são iguais quando é possível sobrepor — em imaginação — uma à outra, fazendo-a deslizar ou rodar sobre o plano, ou tirando a figura do plano, voltando-a sobre si mesma e tornando-a a colocar no plano.”

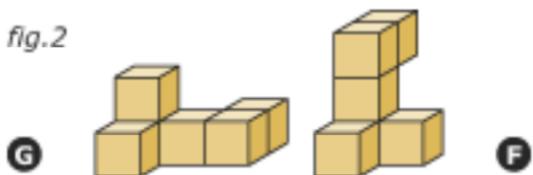


Um exemplo de duas figuras congruentes são estes dois tetraminós. É possível concluir que são congruentes imaginando uma reflexão que transforma um no outro.

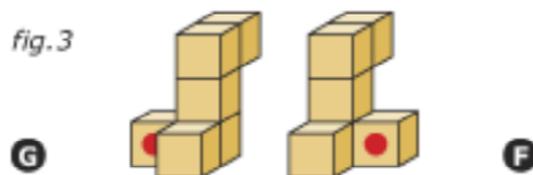
Seguindo ainda a definição de Eduardo Veloso, “Duas figuras no espaço são iguais quando é possível sobrepor — em imaginação — uma a outra, fazendo-a deslizar ou rodar no espaço.”



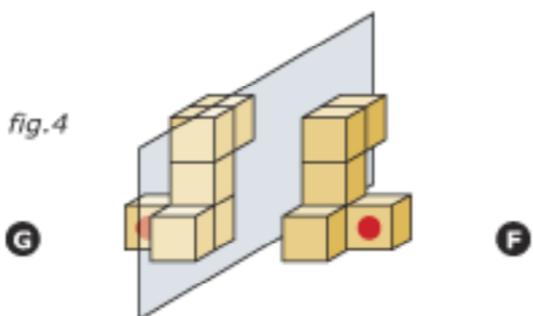
Os sólidos (G) e (F), figura 1, podem parecer iguais de acordo com a definição que demos, mas não são, vejamos porquê. Podemos começar por pegar em (F) e rodá-lo 90°, no sentido do ponteiro dos relógios, em torno de um eixo vertical, obtendo a figura 2.



Depois, colocar (G) e levantá-lo numa posição comparável, figura 3.



Percebemos então que são “irremediavelmente diferentes”, por causa dos cubos com a pinta vermelha, em posições opostas em relação à parte comum. Apenas com uma reflexão num plano o sólido (F) se transforma no sólido (G). Mas isso não é arrastar ou rodar! Portanto não são igualmente iguais segundo a nossa definição (figura 4).



Esta explicação foi apresentada por Eduardo Veloso no *ClicMat*. Neste Cd interativo, editado pelo Ministério da Educação, há algumas actividades para classificação de figuras congruentes no plano e no espaço.

A exploração de todos os tetracubos mostra que a tarefa é rica e interessante, nomeadamente se houver a orientação de garantir que se obtiveram todas as figuras diferentes. A apresentação que fazemos dos tetracubos foi feita no sentido de ilustrar esse raciocínio.

Aspectos interessantes da exploração:

- desenvolvimento de capacidades de visualização
- organização do raciocínio para ter a certeza de que se obtiveram todos os tetracubos
- comunicação do raciocínio
- com dois tetracubos iguais ao nº 4 obtém-se um cubo, haverá mais algum tetracubo com esta possibilidade?

### **Outras tarefas associadas**

Esta tarefa pode ser ampliada ou continuada a partir de uma orientação diferente, por exemplo:

- construir poliminós (quadrados de espuma)
- fazer construções com cubos a partir das 3 vistas dadas (*VISTAS DAQUI E DALI*)
- desenhar as 3 vistas de uma construção feita com cubos (*VISTAS DAQUI E DALI*)
- *CUBOS CRESCENTES*
- *CUBOS PINTADOS*
- *POLICUBOS 2*
- Com 6 tetracubos (todos excepto o nº 1 e o nº 4) e um tricubo (um canto) obtém-se um puzzle muito conhecido, o soma cubo. O objectivo deste puzzle é construir um cubo com essas 7 peças.

### **Proposta para os alunos**

Esta tarefa deve ser proposta aos alunos oralmente e de forma simplificada.

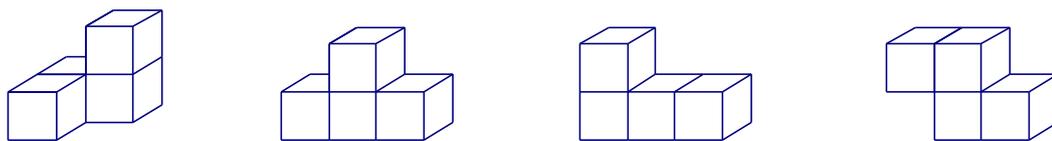
Os alunos podem receber alguns tetracubos construídos com cubos de encaixe, sendo-lhes pedido que construam tetracubos maiores usando quadrados de *polydrons*.

Pode também ser-lhes pedido que obtenham outros policubos, por exemplo pentacubos. Neste caso para serem construídos com cubos de encaixe.

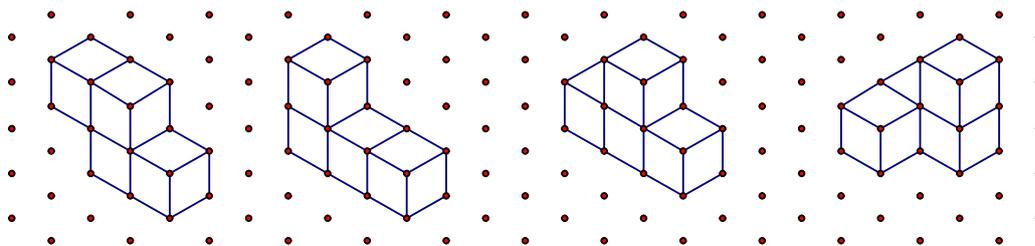
Esta tarefa exige uma grande quantidade de peças de *polydrons*. É uma tarefa que pode ser realizada em pequeno grupo, num momento de actividades diferenciadas.

## **POLICUBOS 2**

Desenhe estes tetracubos em perspectiva utilizando papel ponteadado isométrico.



### **Hipóteses possíveis**



### **Notas e Comentários**

A representação de objectos em perspectiva é uma actividade matemática muito rica e com grande ligação com a arte e a arquitectura. Há diversos tipos de perspectiva que servem interesses diferentes. As preocupações de representação em perspectiva de um arquitecto ou de um pintor são com certeza mais exigentes do que as de um cidadão comum. Cada tipo de perspectiva obedece a regras diferentes, é importante saber que pode haver elementos da figura que são representados em verdadeira grandeza e outros que não são. Sobre este assunto achamos interessante a leitura do capítulo “*Visualização e representação*”, do livro “*Geometria — Temas actuais*”, de Eduardo Veloso, edição Ministério de Educação, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

A perspectiva que o papel ponteadado isométrico permite representar não faz parte das que são utilizadas pelos especialistas. Porém, consideramos que é um suporte muito acessível de utilizar para representar alguns sólidos geométricos em perspectiva, nomeadamente os que são construídos com cubos. Os pontos são guias facilitadores e, por isso, esta tarefa pode ser proposta a crianças. O efeito da representação no plano de figuras no espaço é muito desafiante para as crianças. Conforme o nível de desenvolvimento da destreza manual dos alunos, pode ser usado papel de malha menor ou maior.

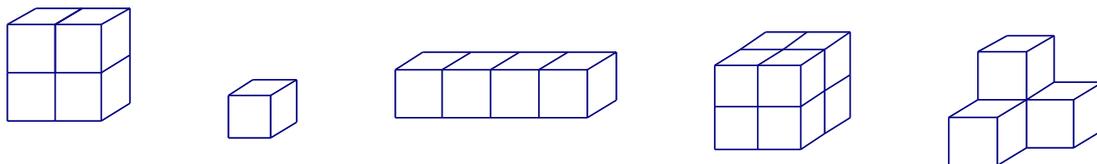
O objectivo desta tarefa é o desenvolvimento de capacidades de visualização e de destreza manual.

### **Outras tarefas associadas**

Esta tarefa está muito ligada às outras tarefas de visualização e representação. Este tipo de representação de sólidos pode ser muito usado quando os alunos fazem construções com cubos: *POLICUBOS 1 e VISTAS DAQUI E DALI*

### **Proposta para os alunos**

Esta tarefa deve ser proposta aos alunos oralmente e com sólidos mais fáceis de visualizar e representar.

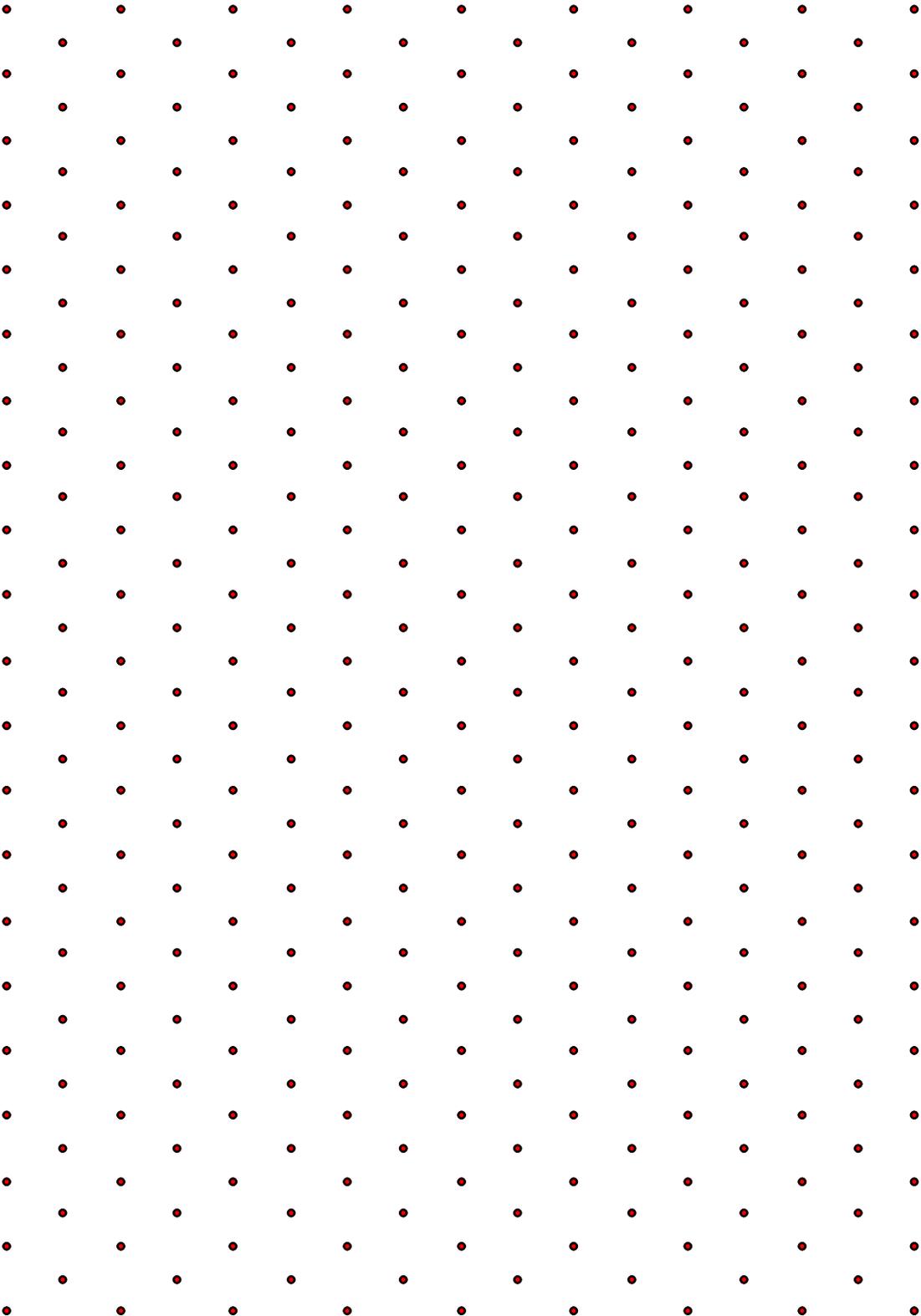


Para a realização da tarefa os alunos precisam de cubos, soltos ou de encaixe, e de papel pontado isométrico.

Os alunos devem receber os cubos e começar por construir cada um dos sólidos, passando depois à sua representação. Os alunos poderão começar por desenhar, primeiro o cubo isolado, depois o cubo de 8, em seguida os dois prismas quadrangulares e só depois o outro tetracubo da direita. Este tipo de dinâmica facilita a atenção a diferentes ritmos de trabalho dos alunos.

Analogamente ao que acontece com as outras tarefas que envolvem visualização e representação, também neste caso a actividade inversa também ser realizada. Aos alunos podem ser dadas imagens com sólidos representados em perspectiva, pedindo-lhes para eles os construírem com cubos.

Papel pontado isométrico



## VISTAS DAQUI E DALI

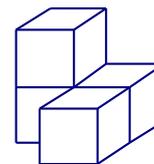
Construa a figura feita com 4 cubos.

Represente em papel quadriculado as suas três vistas: vista de cima, vista de lado e vista de frente.

Mude a posição de um dos cubos e represente as vistas do novo sólido.

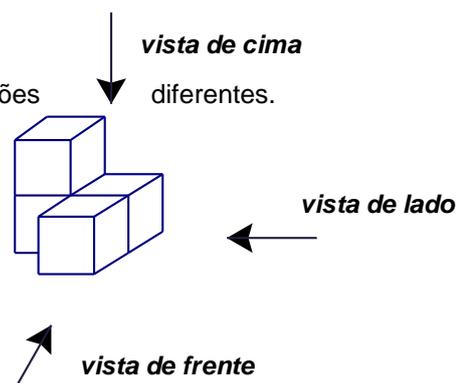
Construa outros sólidos com os mesmos cubos e represente as suas vistas.

Desenhe as vistas de um sólido feito com 6 cubos e construa o sólido.



### Hipóteses possíveis

Um objecto pode ser olhado segundo três orientações



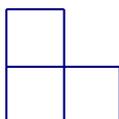
vista de cima

diferentes.

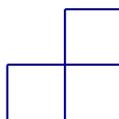
vista de lado

vista de frente

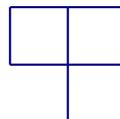
Neste caso as representações no plano serão:



vista de frente



vista de lado



vista de cima

### Notas e Comentários

A representação por vistas é uma das formas de representação bidimensional de objectos a três dimensões. Segundo Eduardo Veloso, “*neste tipo de representação o objecto é visto segundo várias direcções e é assim representado por vários desenhos que correspondem às diversas vistas que se tomam do objecto. Embora em teoria se possam considerar seis vistas, na prática utilizam-se apenas as suficientes para se poder compreender e construir o objecto em questão*”. (p. 135)

Segundo este autor, “*o melhor processo de entender em que consistem as vistas de um objecto é imaginá-lo colocado no interior de um cubo e considerar as suas projecções ortogonais sobre as seis faces do cubo (daí as seis vistas). Posteriormente o cubo é planificado, aparecendo assim as seis vistas no mesmo plano*”. (p. 137)

Este tipo de tarefa insere-se na temática de visualização e representação. Sobre este assunto recomenda-se a leitura do capítulo com esse nome do livro “*Geometria — Temas actuais*”, de Eduardo Veloso, edição Ministério de Educação, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Para fazer este tipo de actividade com as crianças pode recorrer-se a acetatos para desenhar cada uma das vistas. O acetato simula a projecção do objecto num plano e permite desenhar essa representação “por cima”. Como interessa que o objecto esteja imóvel e que seja o observador a deslocar o olhar, o acetato

deve ser colocado ao alto. Neste caso os traços não ficarão muito bem, mas depois de obtidas e referenciadas as três vistas em três acetatos diferentes, o aluno terá que as passar para o papel quadriculado.

Um dos objectivos de tarefas como esta é confrontar cada um com o que vê e com a forma de representar o que vê. Não estão em jogo várias formas de resolver uma situação, por isso este tipo de tarefas é muito favorável para a realização individual ou a par. O par aqui pode ter um papel importante na discussão, pelo facto de ajudar o outro a ver. São por isso tarefas muito adequadas para momentos de trabalho autónomo.

No Cd-rom interactivo *ClicMat* há várias tarefas destas muito ricas. O facto de serem realizadas no computador facilita o trabalho de controle sobre a correcção das respostas.

### **Outras tarefas associadas**

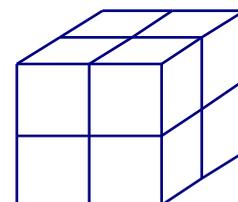
- CUBOS PINTADOS
- CUBOS CRESCENTES
- POLICUBOS 1
- POLICUBOS 2

### **Proposta para os alunos**

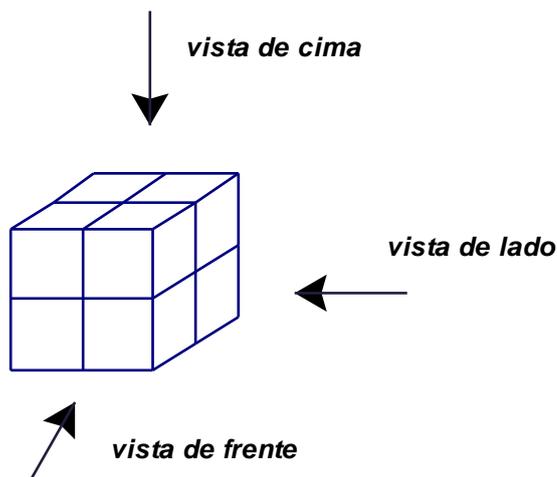
Para a realização desta actividade os alunos precisam de cubos soltos e de papel quadriculado. O papel quadriculado de 1cm é mais adequado para alunos pequenos. Como referimos pode ser útil numa fase inicial usar também acetatos.

1. Faz uma construção igual à da figura.

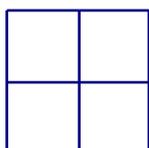
Quantos cubos usaste?



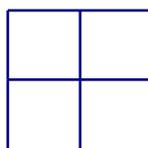
2. Repara que a construção que fizeste pode ser vista de frente, de lado e de cima e representada em papel quadriculado.



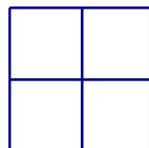
No desenho em baixo estão as 3 vistas da construção.



**vista de frente**

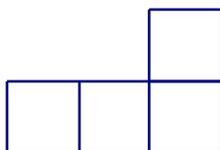


**vista de lado**

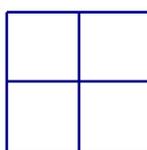


**vista de cima**

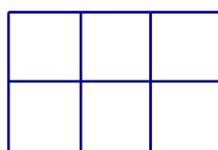
Faz agora uma nova construção, com 8 cubos, que tenha as seguintes vistas:



**vista de frente**



**vista de lado**



**vista de cima**

4. Faz outra construção a teu gosto com os 8 cubos. Desenha as 3 vistas em papel quadriculado e dá a outro colega para ele reproduzir a tua construção.
5. Faz várias construções diferentes com 6 cubos. Para cada construção desenha as 3 vistas em papel quadriculado.

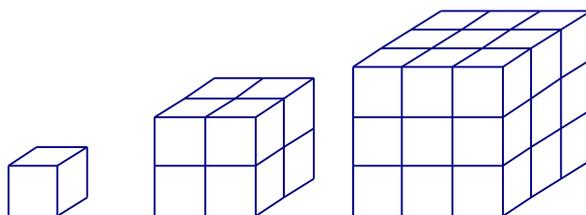
### CUBOS CRESCENTES

1. Construa um cubo com 6 polydrons.

Abra-o e obtenha as várias planificações possíveis.

Represente em papel quadriculado todas as planificações do cubo.

Em cada planificação assinale com a mesma cor as faces que ficam opostas na montagem do cubo.



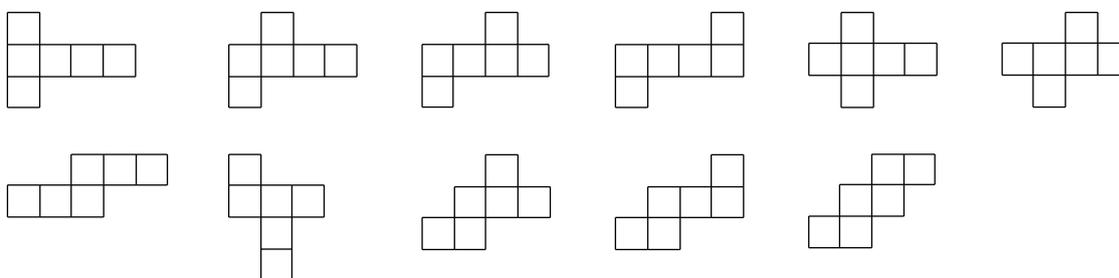
2. Junte mais polydrons e construa um cubo maior do que o anterior. Isto é, cada face pode ser formada por vários quadrados.

Antes de fazer a construção preveja quantos quadrados vão ser necessários.

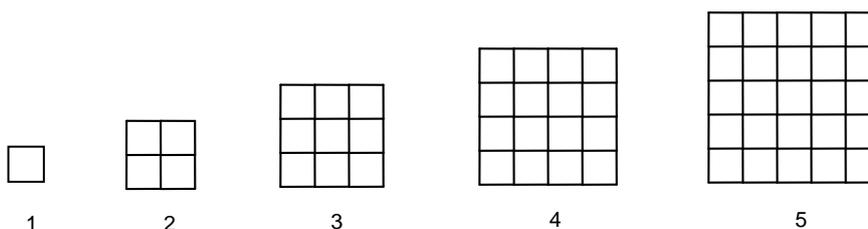
Faça um estudo de quantos quadrados seriam necessários para construir cubos cada vez maiores.

### Hipóteses possíveis

Há 11 planificações diferentes do cubo. São 11 dos 35 hexaminós.



O número de quadrados necessários para construir um cubo vai ser igual a 6 vezes o número de quadrados necessários para construir uma face. Este número é um quadrado perfeito. A expressão geral que dá o número de quadrados necessários é  $6n^2$ , sendo  $n$  o número de quadrados por aresta do cubo.



nº quadrados por aresta	1	2	3	4	5	...	$n$
nº quadrados por face	1	4	9	16	25	...	$n^2$
nº total de quadrados	6	24	54	96	150	...	$6n^2$

### Notas e Comentários

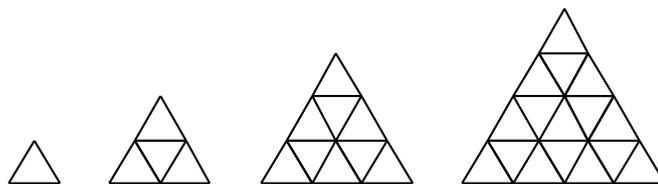
Esta proposta está construída para ser uma actividade de investigação. Ela pretende levar os alunos a realizarem conjecturas cuja validade depois poderão provar. Deste modo está a contribuir para o desenvolvimento da capacidade de generalização. Está relacionada com o desenvolvimento da pré-disposição para procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica.

Sobre a primeira parte, o professor pode fazer uma exposição com as várias planificações obtidas pelos alunos. No caso de não terem sido obtidas todas, o professor pode propor aos alunos o desafio de descobrirem mais em outros momentos (trabalho autónomo, em casa, ...). Para a exposição das planificações pode ser usado o papel quadriculado gigante. Os alunos podem pintar as planificações e devem recortá-las.

Um alternativa muito interessante para a primeira actividade, é a utilização de 3 cores diferentes de quadrados, dois de cada cor, para a construção do cubo, seguida da pintura da planificação com as mesmas cores. Este tipo de proposta ajuda a desenvolver capacidades de visualização.

Esta tarefa é uma actividade com uma grande riqueza de conexões matemáticas. Na sua exploração ligam-se conceitos e conhecimentos sobre figuras geométricas planas e no espaço (quadrados, cubos e paralelepípedos), sobre números e operações e sobre áreas. Além disso está presente a generalização matemática e a sua utilização para prever características de uma determinada construção geométrica.

Um critério interessante e muito prático para avaliar a riqueza educativa de uma actividade matemática é o número de conexões matemáticas que ela nos sugere e as ideias de novas actividades que nos surgem para continuar o trabalho. Quando as questões para colocar aos alunos parecem que “nascem como cogumelos” podemos ter a certeza que estamos perante uma actividade muito rica. Depois dos cubos podem pensar em fazer paralelepípedos. Se esta proposta for adaptada a triângulos equiláteros vão obter tetraedros (pirâmides triangulares), neste caso a generalização para o número de peças por face é também o quadrado do número de peças por aresta. Resultado pouco intuitivo, embora muito interessante do ponto de vista matemático.



#### **Outras tarefas associadas**

- POLIMINÓS
- Construção de paralelepípedos com quadrados de polydrons (análoga a esta fazendo a alteração para paralelepípedos)
- Construção de tetraedros com triângulos equiláteros de polydrons (análoga a esta fazendo a alteração para tetraedros)

#### **Proposta para os alunos**

A tarefa deve ser apresentada aos alunos de modo a favorecer o trabalho em grupo. Cada aluno começa com 6 quadrados de polydrons para construir o cubo inicial. Depois os alunos de um grupo juntam os seus quadrados para fazer um cubo maior. Se forem 4 alunos no grupo terão o número de cubos exacto para construir o cubo seguinte, com 2 unidades de lado. Para além dos quadrados de polydron os alunos precisam de papel quadriculado para representar as planificações do cubo.

Em anexo encontra-se um relato que mostra a riqueza matemática desta tarefa, bem como as suas potencialidades didácticas. Teria sido interessante os alunos terem construído um cubo bastante grande, embora isso exija um grande número de peças. Para um cubo com 5 de aresta seriam necessários 150 quadrados de *polydrons*.

Para levar os alunos a compreenderem melhor a generalização a que chegaram, poderiam ser colocadas questões do tipo:

- Quantos quadrados são precisos para fazer um cubo com 20 de aresta?
- Consegue-se construir um cubo com 1000 quadrados?
- Se cada aluno da escola tivesse um quadrado conseguiríamos construir um cubo gigante?
- Se cada português tivesse um quadrado conseguiríamos construir um cubo gigante?

Uma forma de obter estas respostas é continuar a tabela e analisar os números que se obtêm. Embora possa parecer uma tarefa repetitiva de cálculo, tem duas facetas, a prática de cálculo com a observação e análise de números e a identificação de regularidades. Os números da primeira coluna são quadrados perfeitos e os alunos podem observar o seu crescimento muito rápido relativamente ao crescimento da aresta. Este tipo de confronto é um bom contributo para a compreensão da relação entre unidades de medida linear e unidades de medida de área. Para este desenvolvimento é útil ter uma tabela com mais uma coluna à esquerda, como a que se apresenta:

nº quadrados por aresta	nº de quadrados por face	nº total de quadrados

Ao construírem e completarem uma tabela como esta, os alunos estão a trabalhar o conceito de área e estão a calcular áreas de quadrados.

Para a realização destes cálculos o recurso a uma calculadora faz todo o sentido. É uma situação em que o importante são os números e por isso a sua obtenção não deve ser perturbada pelas dificuldades de cálculo. Uma tabela destas, construída pelos alunos, e exposta na sala de aula pode ser um excelente instrumento de consulta na sala de aula que pode vir a ser usada na resolução de outras tarefas matemáticas. Os quadrados perfeitos são números muito importantes, que são úteis em muitas situações ricas e interessantes e que aparecem em muitas situações matemáticas acessíveis a alunos deste nível.

Uma sugestão útil para o preenchimento de uma tabela deste tipo, com muitas linhas, é utilizar, alternadamente por linha, duas cores para escrever os números. Esta estratégia de escrita facilita muito a leitura da tabela.

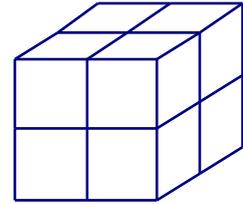
## CUBOS PINTADOS

1. Um cubo de madeira foi pintado de azul.

Depois de pintado foi cortado em 8 cubos iguais.

Como são estes 8 cubos? Têm todos o mesmo número de faces pintadas?

Registe em papel quadriculado uma planificação possível destes cubos usando cor para as faces pintadas de azul.



2. Pense agora que o cubo pintado de azul foi cortado em 27 cubos iguais.

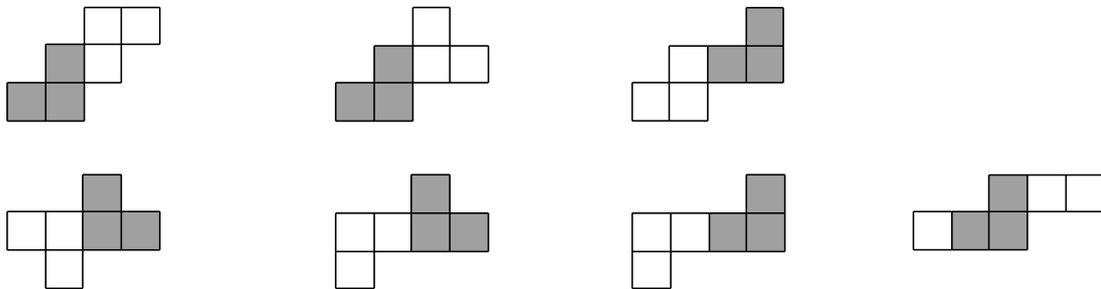
Como são os novos cubos no que respeita às faces pintadas? Quantos há com 3 faces pintadas? 2 faces pintadas? 1 face pintada? Nenhuma face pintada?

3. Faça uma generalização do problema estabelecendo relações entre o número de cubos iguais obtidos e o número de faces com cada tipo de situação de pintura. Use uma tabela.

### Hipóteses possíveis

Os 8 cubos que se obtêm são todos iguais, cada um deles corresponde a um vértice do cubo original. Cada um destes cubos têm três faces pintadas de azul e três faces por pintar.

Registamos algumas planificações interessantes de analisar do ponto de vista da posição das faces pintadas. Vale a pena fazer essa análise para as onze planificações do cubo (ver *CUBOS CRESCENTES*).



A observação destas planificações do cubo pintadas dá uma ideia mais forte ao modo como da planificação se vê a montagem do cubo. Estas planificações em que não se via tão bem se eram ou não planificações do cubo, agora são evidentes.

Para o cubo cortado em 27 cubinhos, a visualização com 3 cores ajuda a distinguir três das quatro hipóteses possíveis.

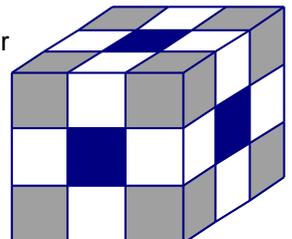
Os cubos que ficam nos vértices ficam com 3 faces pintadas.

Os cubos das arestas, a branco, ficam com 2 faces pintadas.

Os cubos das faces, mais escuros, ficam com uma face pintada.

E importa não esquecer que ficou um cubo escondido dentro do cubo sem nenhuma face pintada.

O registo organizado numa tabela ajudaria a controlar a situação e dar pela falta deste cubo se não nos tivéssemos lembrado dele.



nº de cubos que ficam na aresta do cubo original	3 faces pintadas	2 faces pintadas	1 face pintada	sem faces pintadas	total de cubos
2	8	—	—	—	8
3	8	12	6	1	27
4	8	24	24	8	64
5	8	36	54	27	125
...	...	...	...	...	...
n	8	12 (n-2)	6 (n-2) <sup>2</sup>	(n-2) <sup>3</sup>	n <sup>3</sup>

### **Notas e Comentários**

Para o cubo dividido em 8 cubos é interessante verificar que ele pode ser “virado do avesso”, isto é, pode ficar com as faces pintadas todas viradas para dentro.

Esta tarefa desenvolve capacidades de visualização e promove o conhecimento do cubo e dos seus elementos principais, 8 vértices, 12 arestas e 6 faces.

A generalização liga esta tarefa com a álgebra de uma forma muito simples e significativa. É uma actividade de conexão bastante rica.

Mesmo sem recorrer à linguagem simbólica usada na tabela é possível descrever a generalização: — *Com 3 faces pintadas são sempre 8 cubos, os que ficam nos vértices;* — *Com 2 faces pintadas ficam sempre, em cada aresta, um número de cubos que é menos 2 que o total de cubos da aresta, como são 12 arestas multiplica-se por 12 esse número;* — *Dos cubos com uma face pintada ficam em cada face um conjunto em quadrado, .... como são 6 faces este número multiplica-se por 6;* — *Sem faces pintadas fica sempre lá dentro um cubo cujo aresta tem menos 2 que o original.*

### **Outras tarefas associadas**

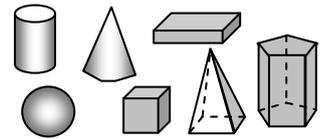
- POLIMINÓS
- CUBOS CRESCENTES
- VISTAS DAQUI E DALI

### **Proposta para os alunos**

Esta proposta deve ser apresentada aos alunos oralmente apenas para a decomposição do cubo em 8 e em 27 cubos. Pode ser dada uma folha auxiliar com o desenho do cubo dividido em 8 cubos e em 27 cubos. A tarefa deve ser realizada com o recurso a cubos de encaixe ou a cubos soltos que os alunos poderão usar para montar o cubo original. Nestes cubos podem ser colocadas etiquetas autocolantes para indicar as faces pintadas.

## PROPRIEDADES DAS FIGURAS

Que características é possível observar nos sólidos geométricos?  
Como os podemos arrumar de acordo com essas características?



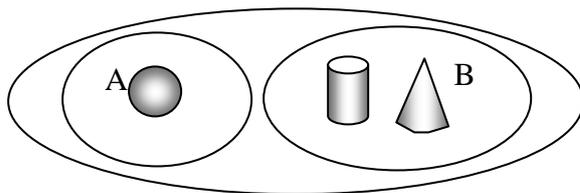
### Hipóteses possíveis

Para cada propriedade observada é sempre possível proceder a uma arrumação diferente. Por exemplo:

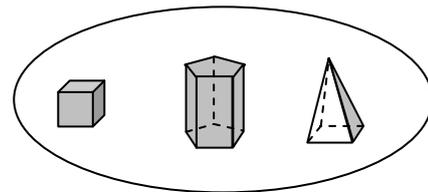
Os que rolam (têm superfícies curvas)

A - só tem superfície curva

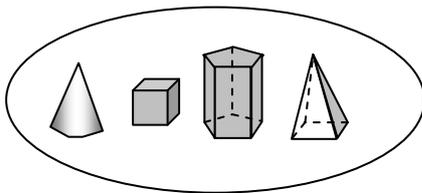
B - têm superfícies curvas e planas



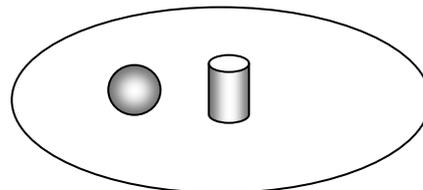
Os que não rolam (só têm superfícies planas)



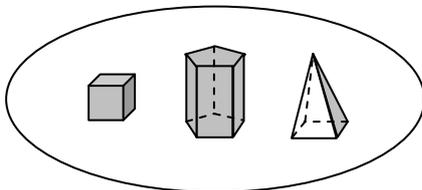
Com vértices



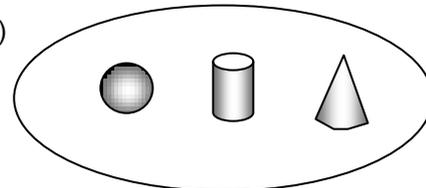
Sem vértices



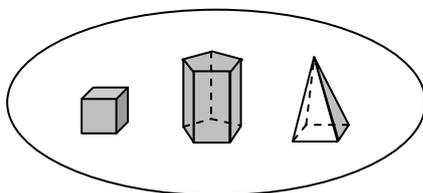
Com arestas



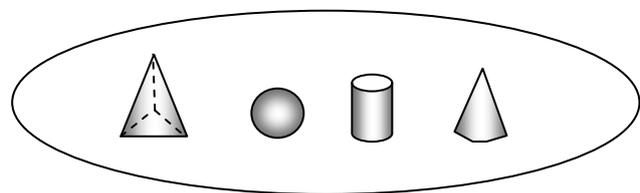
Sem arestas (a aresta é o segmento de recta resultante da intersecção de duas superfícies planas)



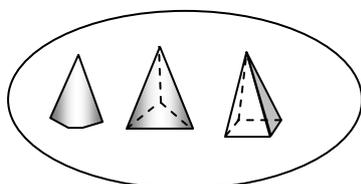
Com faces rectangulares



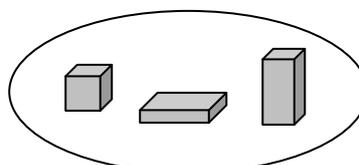
Sem faces rectangulares



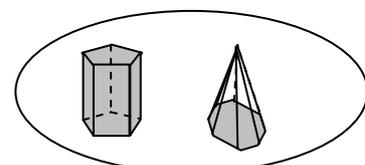
Com menos de 8 vértices



Com 8 vértices



Com mais de 8 vértices



### **Notas e comentários**

O objectivo desta actividade é explorar as propriedades de determinados sólidos. Os alunos poderão observar diversas propriedades como por exemplo: uns sólidos rolam enquanto que outros não; uns têm bicos (vértices) enquanto outros não; uns têm mais vértices que outros; uns têm faces só de uma determinada forma, enquanto outros têm faces de diferentes formas. Proceder a classificações seguindo um determinado critério é uma actividade fundamental para a apropriação do conhecimento. A observação de uma propriedade nos objectos e a classificação segundo essa propriedade promove o desenvolvimento de conceitos. É importante que sejam os alunos a definir os seus critérios de classificação. Esta actividade possibilita a introdução aos conceitos de superfície plana e curva, face, vértice e aresta.

### **Outras tarefas associadas**

Pode realizar uma actividade semelhante usando figuras planas. Arranje uma diversidade bastante alargada de figuras. Inclua mesmo aquelas que não indicadas no programa, porque o que interessa não é o nome das figuras mas observar propriedades. Pode incluir até figuras côncavas.

### **Proposta para os alunos**

Pode começar por mostrar à turma dois sólidos, por exemplo, um prisma quadrangular e um prisma triangular. *Em que é que estes dois sólidos se assemelham?* (Respostas típicas: são ambos de madeira ou plástico; são da mesma cor; ambos têm vértices ou faces planas; e por aí fora).

*Em que é que estes dois sólidos são diferentes?* (Respostas típicas: um tem uma face quadrada, o outro tem uma face triangular; um tem 6 vértices, o outro tem 8 vértices; têm cores diferentes).

Repita estas perguntas relativamente a outros dois sólidos, por exemplo, uma pirâmide quadrangular e uma pirâmide triangular.

Vá registando as propriedades observadas pelos alunos. Posteriormente peça-lhes para agruparem os sólidos de acordo com essas propriedades. Comece por usar apenas uma propriedade de cada vez. Experimente depois usar uma segunda propriedade para formar subgrupos dentro de uma primeira classificação. A ideia é seguir um percurso do mais simples para o mais complexo.

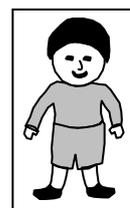
Pode ir tirando fotografias das classificações obtidas para montar depois com os seus alunos um cartaz com os conceitos ilustrados.

## ***TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA***

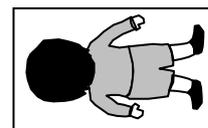
A simetria e as transformações geométricas são dois assuntos inseparáveis e muito pouco conhecidos pelos professores, tanto do ponto de vista matemático como didáctico. Ao considerá-lo como um bloco separado pensamos contribuir para valorizar este assunto e ajudar a dar-lhe a dimensão que deveria ter na aprendizagem. Naturalmente que a simetria e as transformações geométricas incidem sobre figuras no plano e no espaço, embora os aspectos ligados ao espaço sejam aqui bastante mais difíceis. Por isso as tarefas deste bloco estão muito associadas às do bloco de figuras no plano

## DESLIZAR, VOLTAR E RODAR<sup>5</sup>

Que movimentos terá de realizar o boneco na posição **A** para se colocar em **B**?

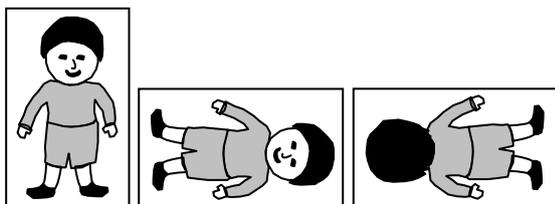


**A**

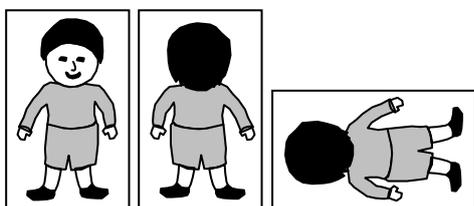


**B**

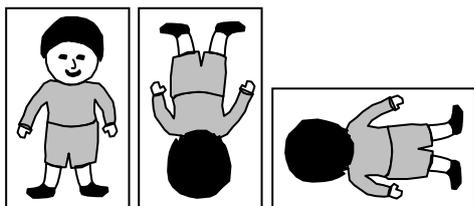
### Hipóteses possíveis (algumas)



Rodar para a esquerda um quarto de uma rotação completa e voltar-se sobre a cabeça.



Voltar-se sobre a esquerda e rodar para a esquerda um quarto de uma rotação completa.



Voltar-se sobre os pés e rodar para a direita um quarto de uma rotação completa.

### Notas e comentários

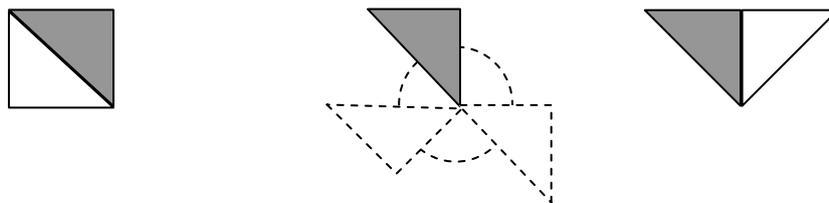
Esta tarefa tem como objectivo desenvolver o sentido espacial, experimentando acções sobre objectos tais como deslizar, voltar e rodar. Estas acções serão importantes como uma forma de abordar três transformações básicas em geometria: translação, reflexão e rotação. Estas três transformações estão associadas à simetria. No 1ºCiclo do Ensino Básico só se trabalha a simetria de reflexão, vulgarmente reconhecida apenas por simetria. No entanto, tanto a translação como a rotação são imprescindíveis para trabalhar actividades incluídas no programa como a transformação de sólidos e figuras planas com recurso a material moldável, a papel, geoplano... Deslizar, voltar, rodar ou translação, reflexão e rotação são noções fundamentais para descrever, em termos geométricos, a acção que se exerce sobre uma figura (ou parte dela) para se obter outra.

### Outras tarefas associadas

— TRANSFORMAR

<sup>5</sup> Adaptado de Colecção de Adendas, anos de escolaridade k-6, APM, 1998

- Descrever o processo pelo qual, partindo de um quadrado formado pelos triângulos pequenos do TANGRAM, se obtém um triângulo.



Rotação

### Proposta para os alunos

**Material** - O próprio corpo ou 1 cartão (7x12 cm por ex.) por criança.

Peça a cada criança para desenhar num lado de um cartão uma figura que a represente vista de frente e do outro lado, vista de trás. Peça-lhes que repitam os desenhos no segundo cartão e escrevam o nome.

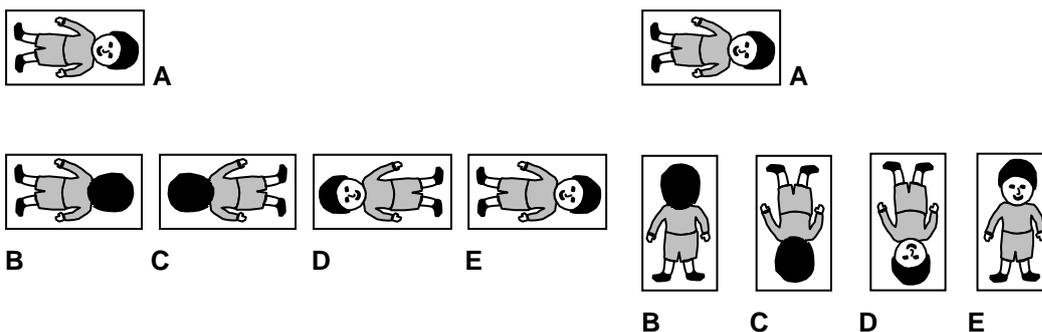
**Desenvolvimento** - Com as crianças deitadas no chão, de barriga ou de costas: exemplificar o **deslizar**. Algumas crianças podem deslizar para a frente, outras para trás, ou até mesmo para os lados. “Se a tua cabeça está virada para mim no início, para onde é que fica virada depois de deslizares?”

Experimentar o **voltar**. Numa volta os alunos movem-se “de costas” para “de barriga” ou “de barriga” para “de costas”. Dar a volta pelo lado esquerdo. E pelo lado direito. Dar a volta sobre os pés. Agora sobre a cabeça. “Quando fazes uma volta o que acontece sempre?” “Se a tua cabeça está a apontar para mim no início, para onde é que aponta depois de uma volta?” Se for uma volta para a esquerda ou para a direita a cabeça aponta para o mesmo sítio. Se for uma volta sobre a cabeça ou uma volta sobre os pés, a cabeça aponta para o sentido oposto.

Experimentar o **rodar**. “Se estiveres deitado de costas e deres uma volta ficas deitado de barriga. Então como será rodar?” “O corpo fica a apontar na mesma direcção antes e depois de rodar?” Nesta altura o ângulo de rotação é irrelevante. Exceptuando a rotação completa, o corpo aponta sempre numa direcção diferente.

Sentados em roda os alunos experimentam as diferentes possibilidades de deslizar, de voltar e de rodar, utilizando os cartões. Discuta como o deslizar é diferente (aponta na mesma direcção quer se esteja de costas ou de barriga). Discuta como o voltar é diferente (mudas sempre de posição mas não apontas sempre na mesma direcção). Discuta como todas as rotações são semelhantes (de costas ou de barriga, quase sempre se fica virado numa direcção diferente).

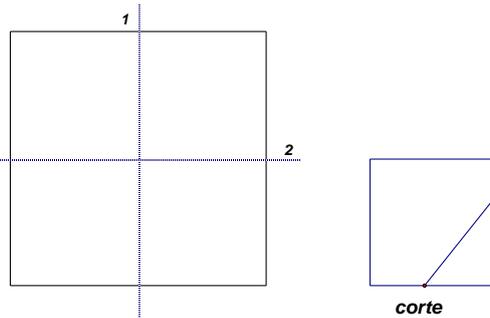
**Continuação** - Peça às crianças que descrevam o movimento que os leva de uma posição de partida (**A**) a uma posição de chegada (**B, C, D, E**). Use os cartões para ilustrar as várias situações que requerem um, dois ou três movimentos:



### **DOBRA E CORTA**

1. Dobre um quadrado de papel duas vezes e corte-o como está indicado na figura.

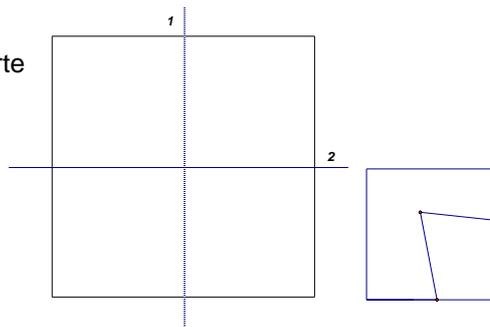
Preveja as características e desenhe o polígono que se vai obter.



Experimente fazer variações no corte, prevendo sempre o que vai acontecer.

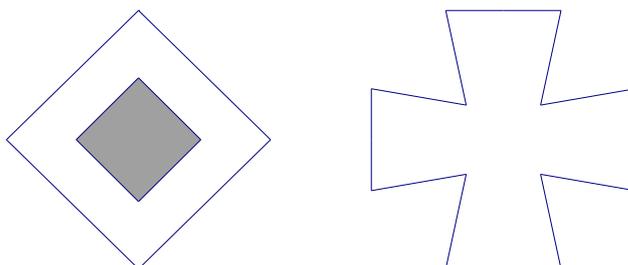
2. Experimente agora a mesma exploração mas com um corte duplo como mostra a figura.

Preveja sempre o que vai acontecer desenhando a figura esperada.



3. Experimente agora a situação inversa. Faça o desenho de uma figura

que acha possível obter fazendo um ou dois cortes no quadrado dobrado em quatro, como por exemplo as duas figuras apresentadas. Depois dobre, corte e confirme a sua previsão.



Faça várias experiências. Que propriedade têm todas as figuras que se podem obter por este processo?

### **Hipóteses possíveis**

As figuras obtidas por este processo terão sempre pelo menos dois eixos de simetria. Poderão ter mais eixos se o corte for feito com alguns cuidados.

### **Notas e Comentários**

Esta tarefa deve ser realizada com o recurso a quadrados de papel e tesoura.

Na realização da tarefa estão em jogo capacidades de visualização e conhecimentos de simetria, neste caso da reflexão. Um aspecto muito importante da exploração da tarefa pode ser a comunicação da posição dos cortes.

### **Outras tarefas associadas**

Esta tarefa pode ser ampliada ou continuada com outras tarefas que envolvem o mesmo tipo de capacidades e conhecimentos: *DOBRA E FURA 1 e 2*, *DOBRA E CORTA* e *PERDER SIMETRIA*.

### **Proposta para os alunos**

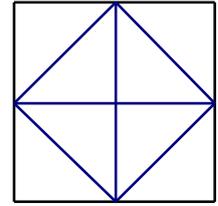
Esta tarefa deve ser proposta aos alunos exactamente da mesma maneira.

**PERDER SIMETRIA**

A figura tem 4 eixos de simetria.

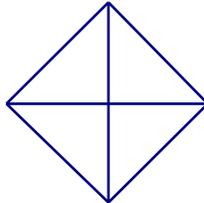
Corte-a, respeitando as linhas marcadas, de modo a obter figuras com menor número de eixos de simetria.

Para cada caso identifique o número de eixos.

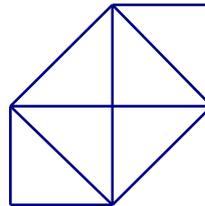
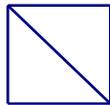


**Hipóteses possíveis**

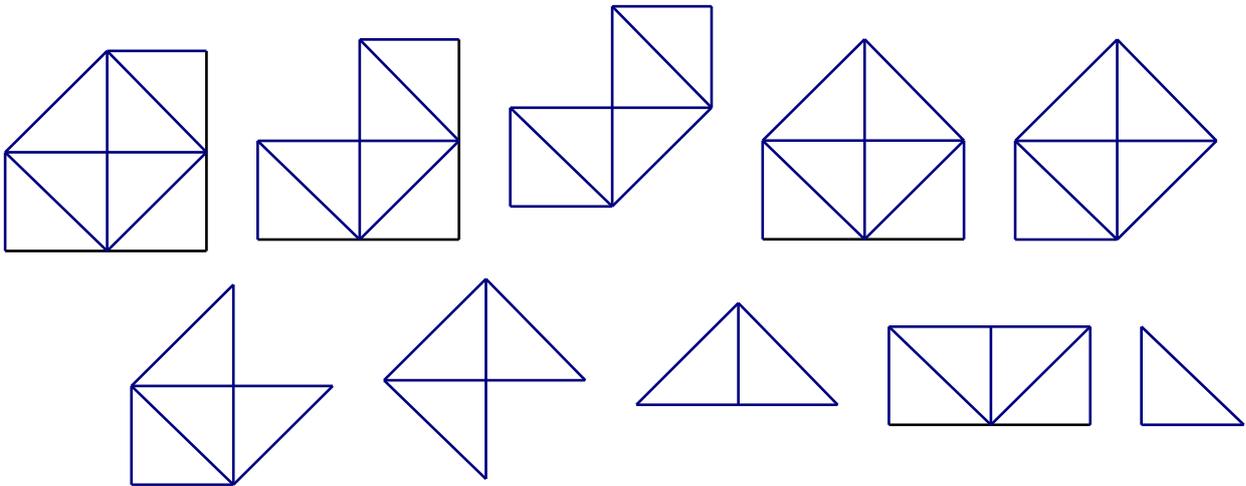
- manter 4 eixos



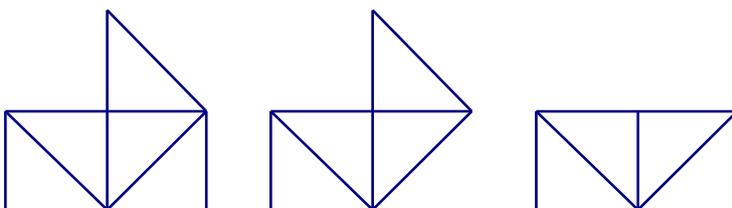
- ficar com 2 eixos



- ficar apenas com 1 eixo



- ficar sem nenhum eixo



### **Notas e Comentários**

Esta tarefa envolve o conceito de eixo de simetria de uma figura. Este conceito é entendido numa perspectiva ampla de simetria, como uma recta que é eixo de simetria de reflexão dessa figura. Para saber mais sobre este assunto ver *Simetria* (revista E&M 88)

A exploração das várias hipóteses mostra que a tarefa é rica e interessante, nomeadamente se houver a orientação de descobrir todas as figuras diferentes que vão ser obtidas fazendo cortes respeitando os segmentos marcados originalmente.

Aspectos interessantes da exploração:

- diversidade de figuras que surgem com a possibilidade de fazer um estudo que garanta que se descobriam todas;
- necessidade de identificar repetições de figuras, isto é, figuras que são congruentes embora sejam obtidas fazendo cortes por ordens diferentes, a confirmação da congruência é muito fácil visto que se podem sobrepor duas figuras cortadas;
- facilidade de identificar ou confirmar os eixos de simetria fazendo dobragens, esta discussão deve fazer apelo à visualização prévia para identificar eixos, depois podem ser marcados com traços de outra cor e as dobragens podem confirmar a sua existência;
- possibilidade de identificar e caracterizar cada eixo posicionando-o relativamente a outros elementos da figura dada;
- discussão de impossibilidade de obter uma figura com 3 eixos de simetria (esta discussão é complexa);

### **Outras tarefas associadas**

Esta tarefa pode ser ampliada ou continuada a partir de uma orientação diferente. Por exemplo:

- construir figuras com simetria recorrendo a composições de triângulos rectângulos isósceles (peças de espuma)

Neste caso podem ser construídas todas estas figuras, mas podem também ser construídas figuras com simetria de rotação e, quem sabe, talvez com 3 eixos. Fica o desafio.

### **Proposta para os alunos**

Esta tarefa deve ser proposta aos alunos oralmente, dando-lhes a folha anexa com várias figuras repetidas para cortar.

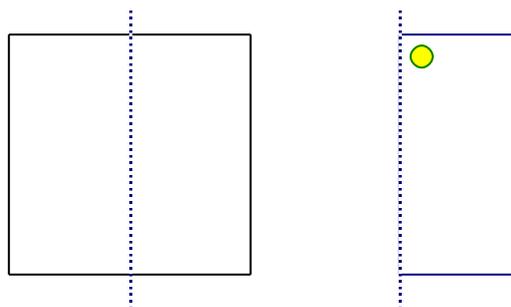


### DOBRA E FURA 1

1. Dobre um quadrado uma vez, como está indicado na figura. A seguir faça um buraco de acordo com a imagem ao lado.

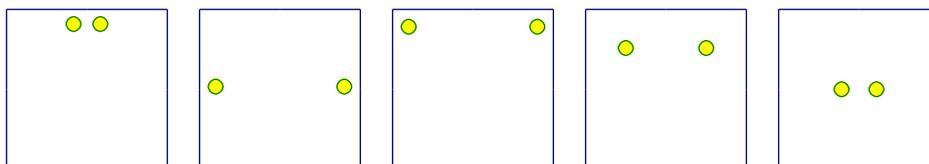
Desenhe o que acha que vai ver quando abrir o quadrado.

Abra e verifique.

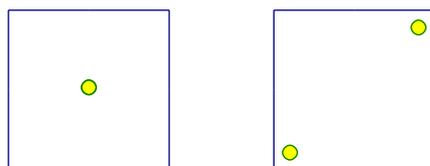


2. Para produzir cada uma das figuras dobrou-se um quadrado um vez e depois foi feito um buraco

Desenhe as linhas de dobragem e marque onde terá que ser feito o buraco para obter cada uma das figuras apresentadas.



3. Pense agora na possibilidade de obter por um processo análogo ao anterior cada uma das figuras. No caso de achar que é possível mostre como, no caso de achar que é impossível explique porquê.



### Hipóteses possíveis

A colocação do buraco relativamente à dobragem é o aspecto fundamental da primeira e segunda questões.

Na terceira questão, a posição da dobragem pode ser diferente da dobragem apresentada como exemplo.

### Notas e Comentários

Esta tarefa deve ser realizada com o recurso a quadrados de papel e a um furador.

Na realização da tarefa estão em jogo capacidades de visualização e conhecimentos de simetria, neste caso da reflexão. Um aspecto muito importante da exploração da tarefa pode ser a comunicação da posição do buraco relativamente a outros elementos do quadrado dado. Por exemplo: “*como o buraco está perto da dobragem, eixo de simetria do quadrado, vou obter outro buraco exactamente à mesma distância e na mesma posição, do outro lado do eixo*”.

### Outras tarefas associadas

Esta tarefa pode ser ampliada ou continuada com outras tarefas que envolvem o mesmo tipo de capacidades e conhecimentos: *DOBRA E FURA 2* e *DOBRA E CORTA*

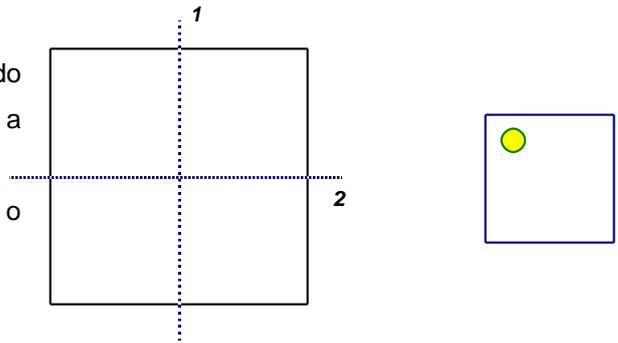
### Proposta para os alunos

Esta tarefa deve ser proposta aos alunos exactamente da mesma maneira.

## DOBRA E FURA 2

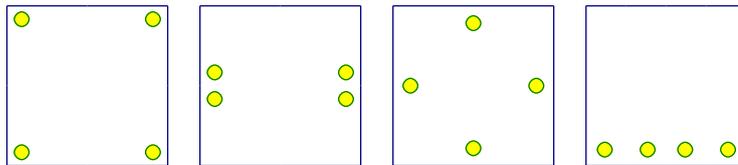
1. Dobre um quadrado duas vezes como está indicado na figura e a seguir faça um buraco de acordo com a imagem ao lado.

Desenhe o que acha que vai ver quando abrir o quadrado. Abra e verifique.



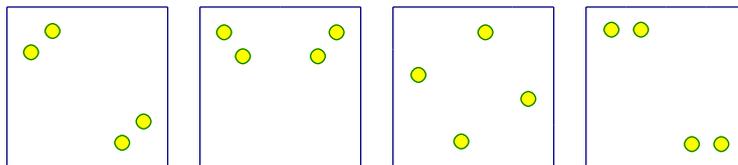
2. Para produzir cada uma das figuras

dobrou-se um quadrado duas vezes e depois foi feito um buraco.



Desenhe as linhas de dobragem e marque onde terá que ser feito o buraco para se obter cada uma das figuras ao desdobrar.

3. Pense agora na possibilidade de obter por um processo análogo ao anterior cada uma das figuras. No caso de achar que é possível mostre como, no caso de achar que é impossível explique porquê.



### Hipóteses possíveis

Na primeira questão a resposta não é única visto que na figura com o buraco marcado não estão marcados os eixos que representam a dobragem.

Na segunda questão, a posição das dobragens pode ser feita com base nos eixos de simetria do quadrado ou em duas dobragens paralelas.

Na terceira questão, todas as possibilidades são possíveis embora na última sejam necessárias três dobragens.

### Notas e Comentários<sup>6</sup>

Esta tarefa deve ser realizada recorrendo a quadrados de papel e a um furador.

Na realização da tarefa estão em jogo capacidades de visualização e conhecimentos de simetria, neste caso de reflexão. Um aspecto muito importante da exploração da tarefa pode ser a comunicação da posição do buraco relativamente a outros elementos do quadrado dado.

<sup>6</sup> (Esta tarefa foi retirada de Musser, Burger, Peterson: *Mathematics For Elementary Teachers: A Contemporary Approach*, Sixth Edition

Subjacente a esta tarefa está a ideia de composição de duas reflexões com eixos concorrentes ou paralelos. É importante ter em conta que a composição de duas reflexões com eixos perpendiculares é uma rotação de  $180^\circ$ , cujo centro é o ponto de intersecção dos eixos.

### ***Outras tarefas associadas***

Esta tarefa pode ser ampliada ou continuada com outras tarefas que envolvem o mesmo tipo de capacidades e conhecimentos:

- *DOBRA E FURA 1*
- *DOBRA E CORTA*

### ***Proposta para os alunos***

Esta tarefa deve ser proposta aos alunos exactamente da mesma maneira.

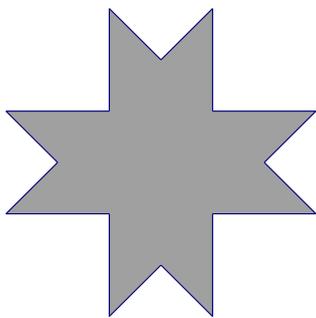
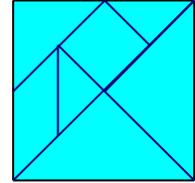
### TANGRAM AO ESPELHO

1. Das imagens que se apresentam, quais as que se podem obter com o livro de espelhos, utilizando peças do *TANGRAM*?

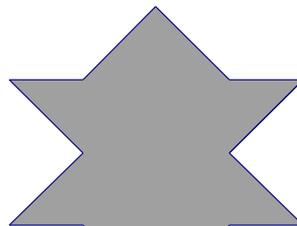
Tente primeiro visualizar e depois experimente.

No caso de ser possível, qual é o número mínimo de peças necessárias para reproduzir cada figura com um livro de espelhos? Tente primeiro visualizar e depois experimente.

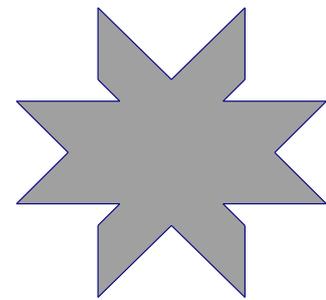
No caso de não ser possível, tente explicar porquê.



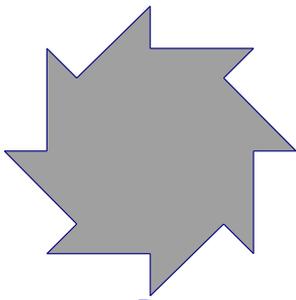
A



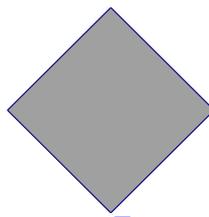
B



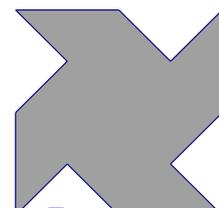
C



D



E



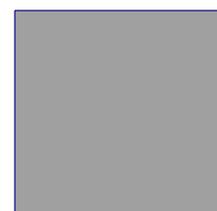
F



G



H



I

### **Hipóteses possíveis**

Todas as figuras são possíveis de construir utilizando o livro de espelhos<sup>7</sup>, à excepção das figuras D e F porque não apresentam uma simetria de reflexão.

### **Notas e comentários**

Os objectivos da primeira tarefa prendem-se com a observação e identificação dos diferentes eixos de simetria que podem compor uma figura, descoberta do número de peças necessário à reprodução de cada uma das figuras apresentadas e reconhecimento de composições de duas peças que podem ser substituídas por uma única peça congruente com as anteriores. Por último, pede-se para justificar a razão pela qual não é possível reproduzir, utilizando o livro de espelhos, algumas das figuras apresentadas. Terá a ver com o número de peças utilizado? Terá a ver com o tipo de simetria?

Na segunda proposta, pretende-se que seja capaz de criar imagens mentais utilizando as regras implicadas na simetria de reflexão e que a partir daí utilizando, várias peças iguais do TANGRAM, a reproduza.

### **Outras tarefas associadas**

— *CONSTRUIR FIGURAS COM O TANGRAM*

#### **Proposta para os alunos**

Os alunos escolhem uma peça do TANGRAM e colocam-na entre um livro de espelhos para ver o que observam. Em seguida, escolhem uma segunda peça para juntar à primeira e tentam perceber que alteração sofreu a primeira reflexão. Os alunos podem ainda experimentar fazer este exercício, utilizando peças diferentes.

Para efectuarem outro tipo de observações, os alunos escolhem uma peça, encostam um dos seus lados ao espelho e descrevem o que observam. Também devem ser incentivados a movimentar a peça escolhida para se aperceberem que a posição da peça pode dar origem a composições diferentes.

Uma outra sugestão, prende-se com a descoberta dos possíveis eixos de simetria de reflexão das peças que compõem o TANGRAM. Os alunos ao deslocar o espelho sobre uma figura devem tentar visualizar a peça escolhida na sua totalidade.

Os alunos poderão ainda escolher uma peça do TANGRAM e criar uma figura no livro de espelhos. Em seguida, tentam reproduzi-la usando o número de peças iguais que julgam necessárias.

---

<sup>7</sup> Um livro de espelhos consiste em dois espelhos unidos por um lado, formando uma lombada, como num livro. Como a utilização de espelhos de vidro pode tornar-se perigosa, propomos a construção de espelhos artesanais utilizando cartão grosso e papel autocolante espelhado.



## **INFORMAÇÃO SOBRE SITES COM ACTIVIDADES INTERACTIVAS DE DIVERSOS TIPOS**

<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/>

Este site holandês disponibiliza actividades interactivas em português e outras línguas. Vale a pena consultar as actividades em inglês e as actividades em holandês, apesar do desconhecimento da língua algumas delas são facilmente compreensíveis. Este site pertence ao Freudenthal Institute, uma das instituições mais importantes no desenvolvimento da Educação Matemática.

<http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx>

Este site americano disponibiliza actividades interactivas em inglês. O site é da responsabilidade do NCTM, National Council of Teachers of Mathematics, associação esta responsável por um vasto leque de publicações sobre Educação Matemática, algumas delas existentes em português traduzidas pela Associação de Professores de Matemática.

<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

Site da Utah State University, disponibiliza actividades interactivas em inglês organizadas por níveis, desde o K (Jardim de infância) ao 12º ano, e por temas matemáticos.

<http://www.nrich.maths.org.uk/public/index.php>

Estas páginas disponibilizam outro tipo de informações sobre Educação Matemática para além de actividades interactivas. Mensalmente são colocados novos problemas e actividades, estes estão organizados por níveis. Vale a pena consultar propostas antigas, organizadas por ano e mês. Um problema especialmente interessante, o problema das rãs, foi proposto em Dezembro 2000. Este site pertence à Universidade de Cambridge.

<http://www.apm.pt/portal/index.php?id=26373>

Site da Associação de Professores de Matemática onde estão acessíveis várias actividades interactivas, algumas delas adaptadas de outros sites estrangeiros já indicados.

<http://www.atractor.pt/>

Site da Associação Atractor onde pode ser conhecida a exposição Simetria – Jogos de espelhos. Neste site também é disponibilizada muita informação importante sobre matemática, nomeadamente sobre poliedros. Este site contém ainda simulações interessantes de problemas matemáticos.

<http://www.plastelina.net/>

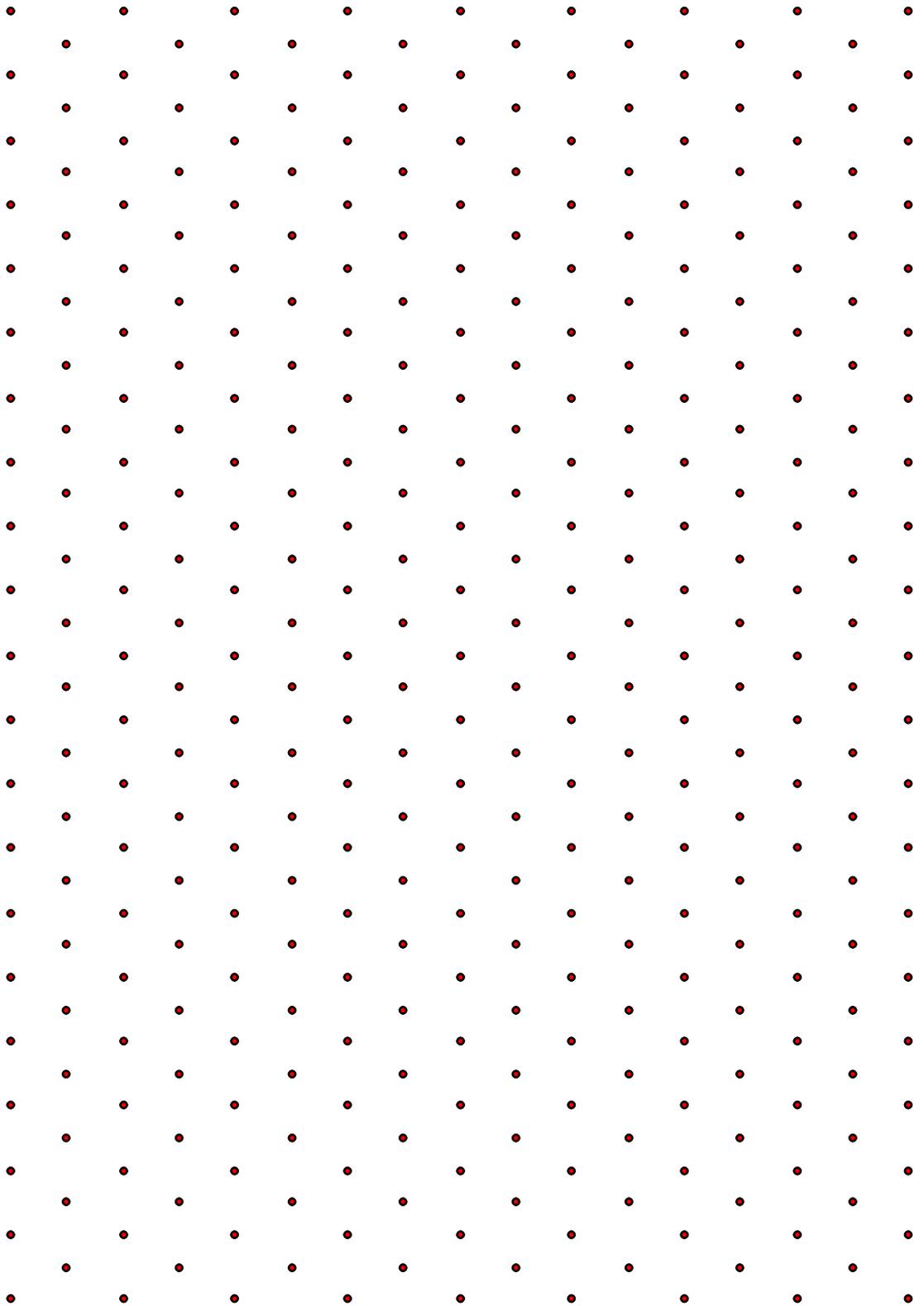
Site comercial que disponibiliza gratuitamente alguns problemas interactivos muito interessantes.

### **• CD-ROMS**

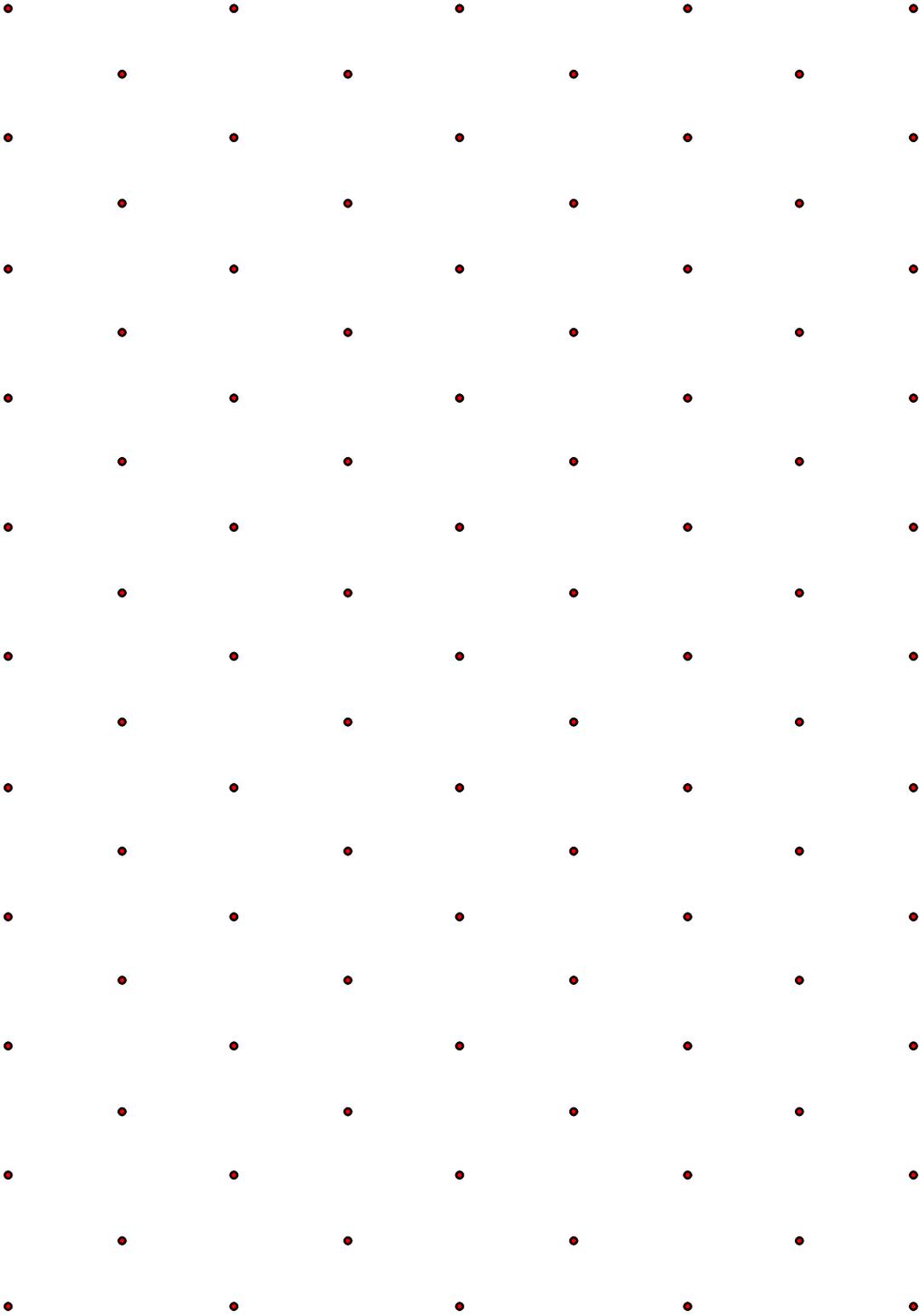
**ClicMat**, este Cd-rom contém um conjunto de actividades interactivas sendo algumas delas sobre visualização e geometria. Este recurso é uma edição do Ministério da Educação sendo a sua obtenção gratuita através de:

[http://www.dgicd.min-edu.pt/recursos\\_multimedia/recursos\\_cd.asp](http://www.dgicd.min-edu.pt/recursos_multimedia/recursos_cd.asp)

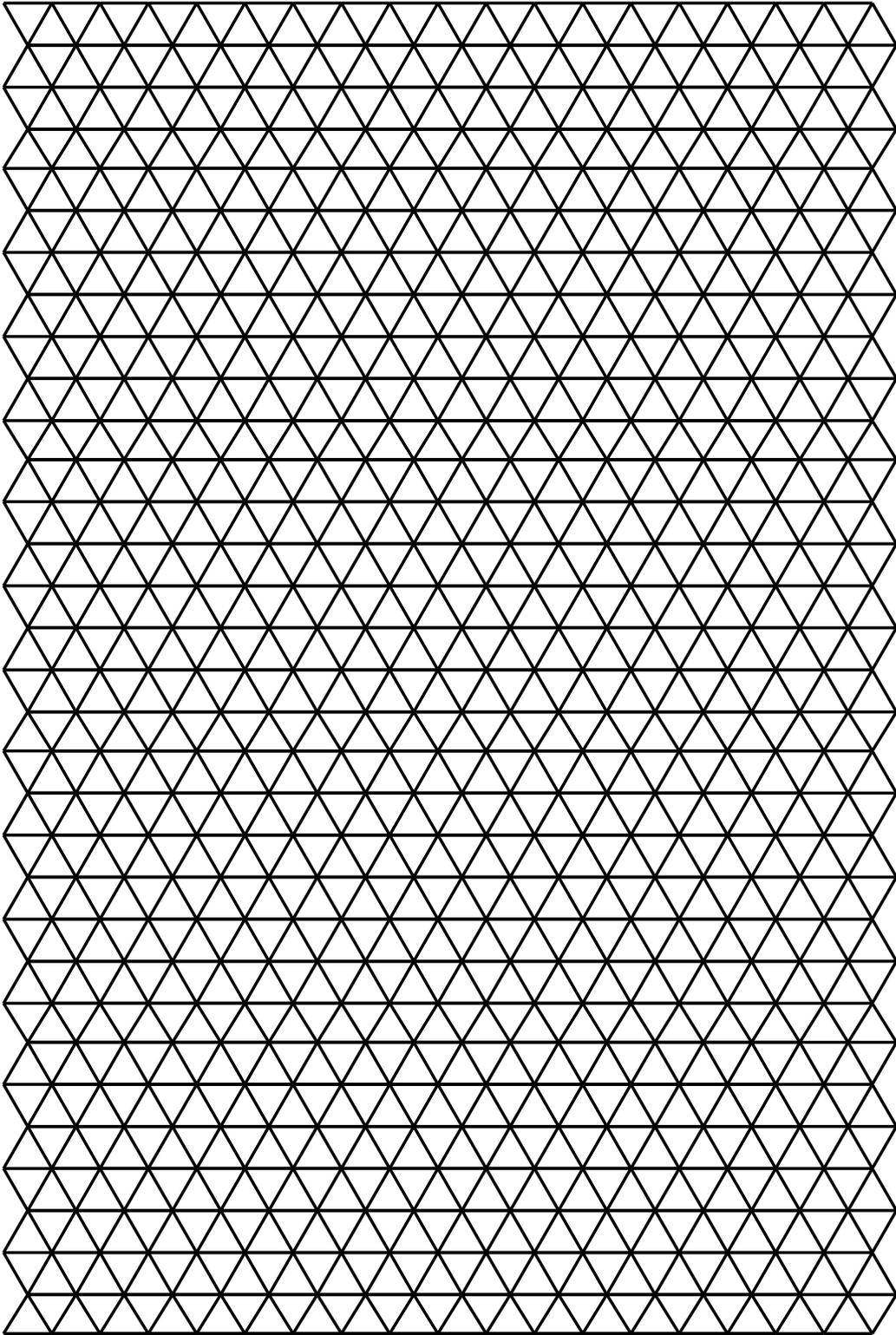
*Papel pontado isométrico*



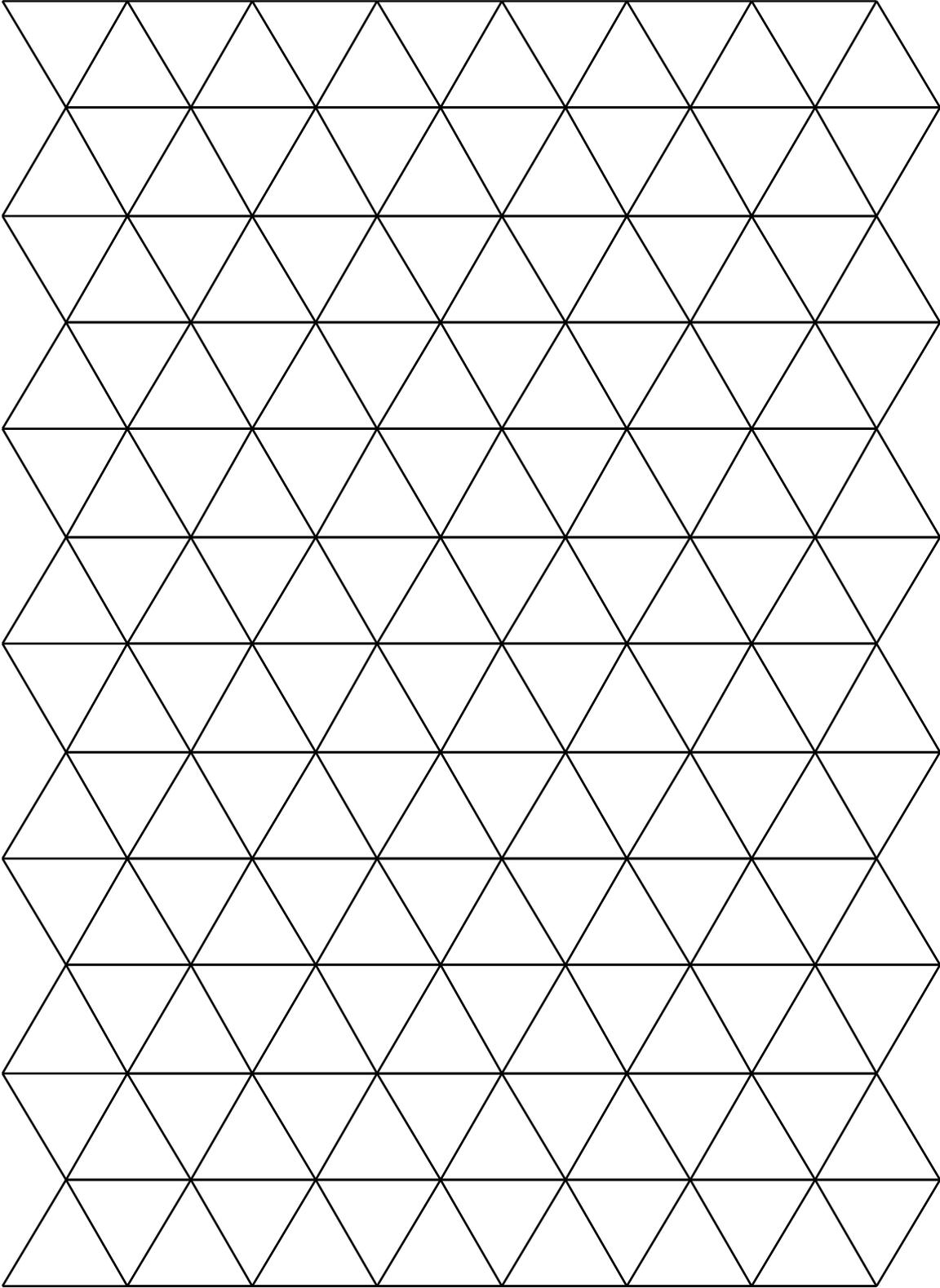
*Papel pontado isométrico (2 cm)*



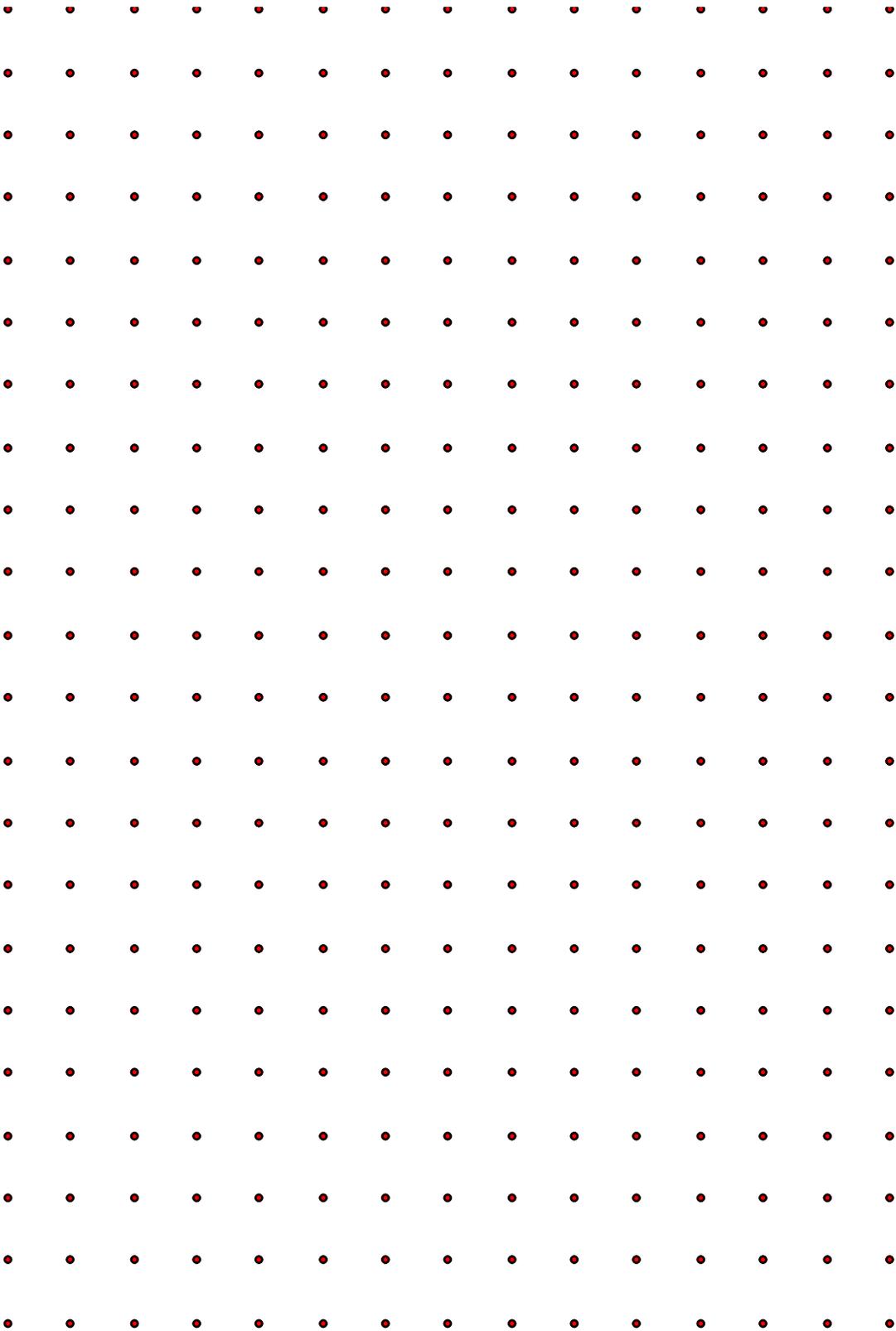
*Papel triangulado isométrico*



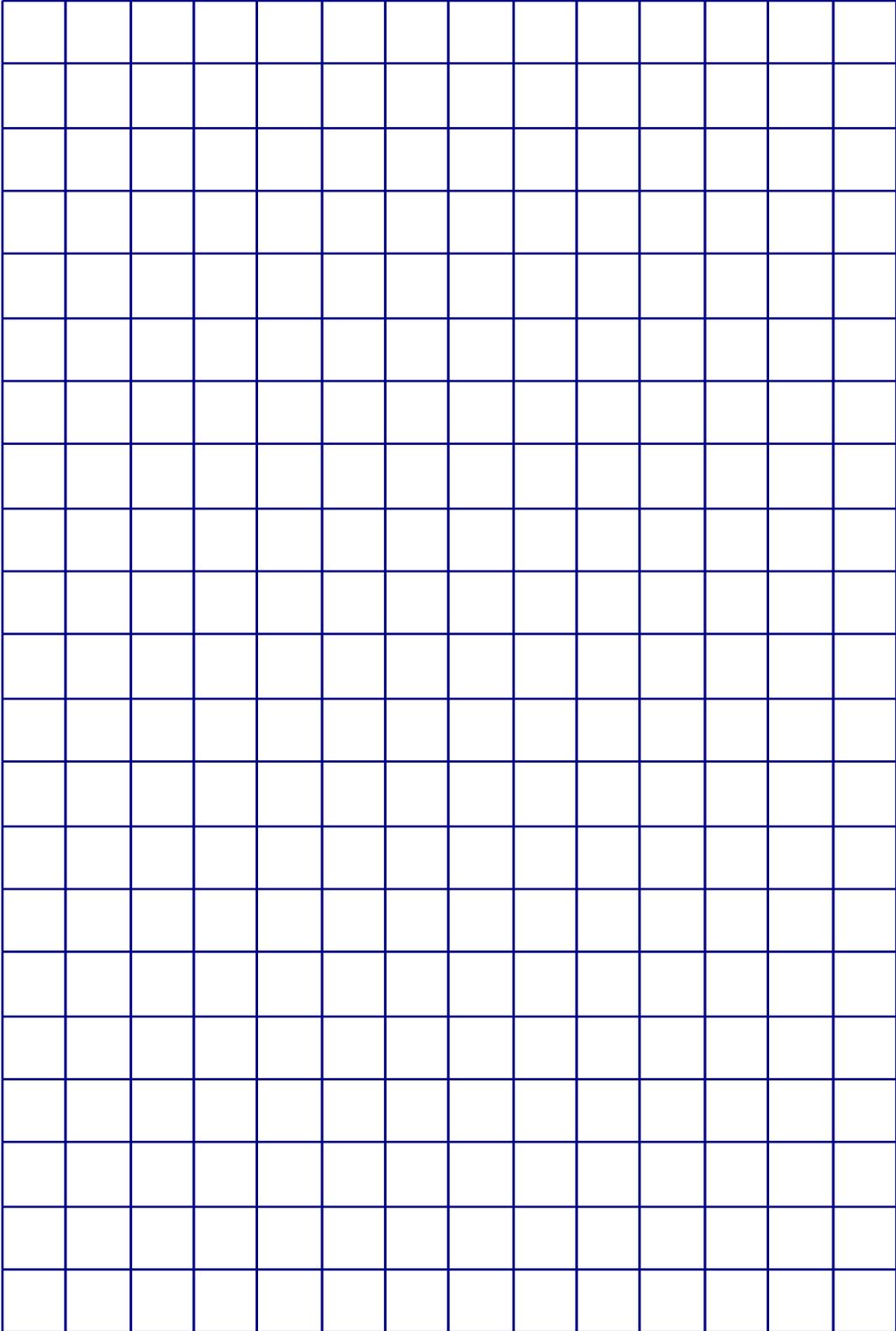
**Papel triangulado isométrico (2 cm)**



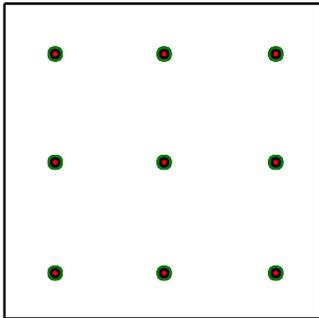
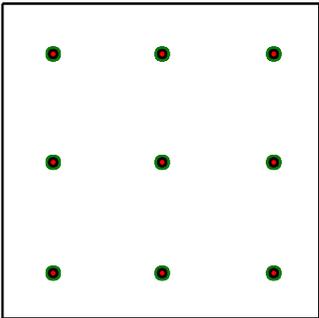
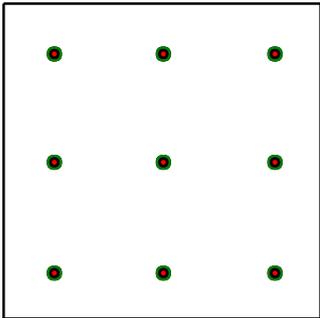
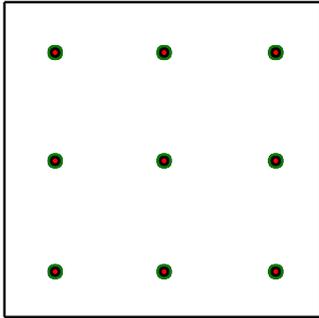
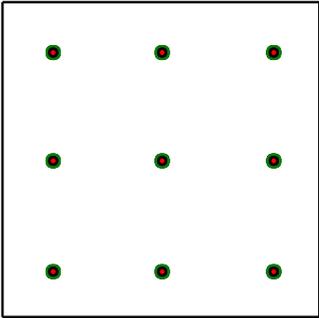
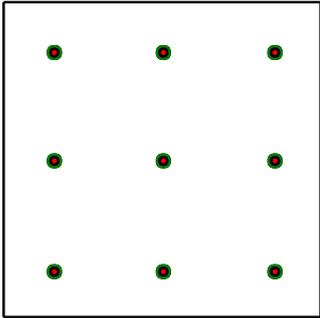
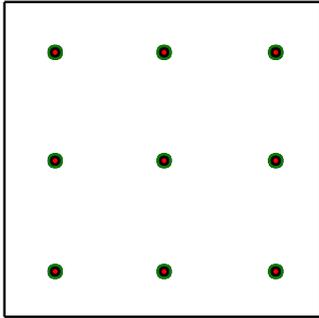
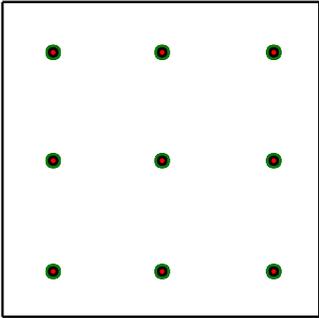
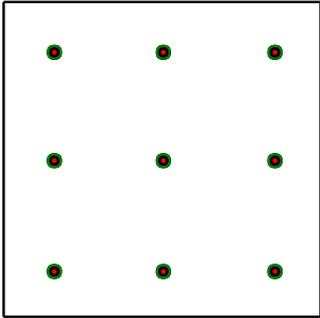
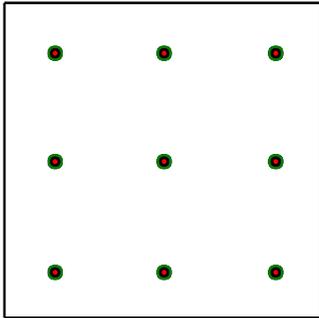
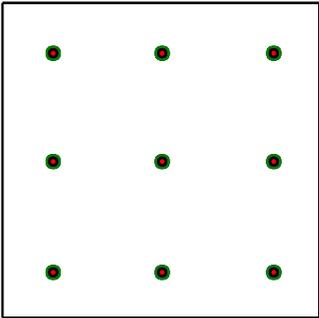
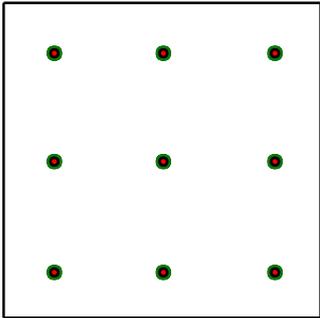
*Papel pontado quadriculado (1 cm)*



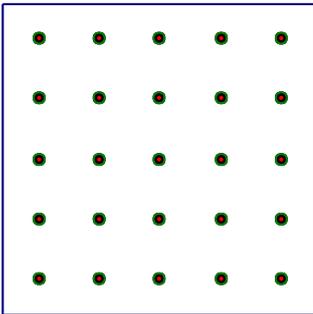
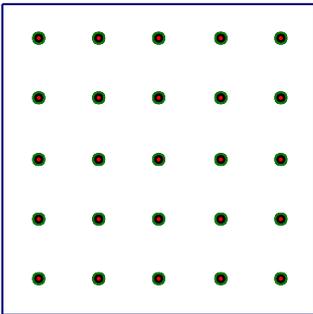
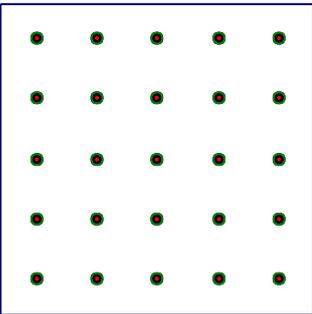
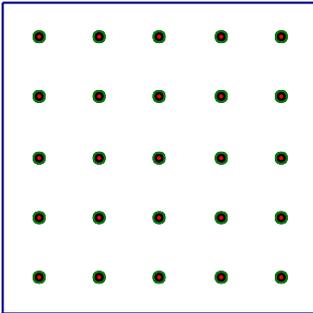
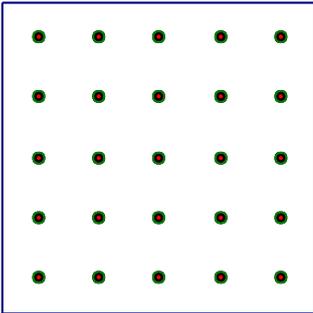
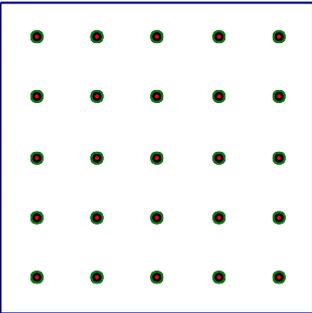
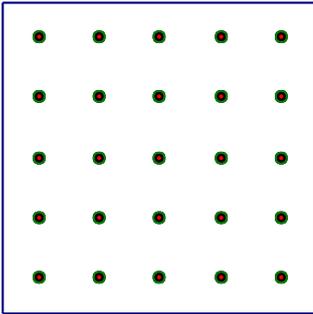
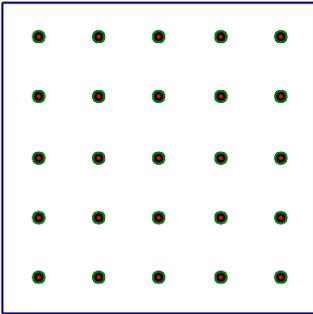
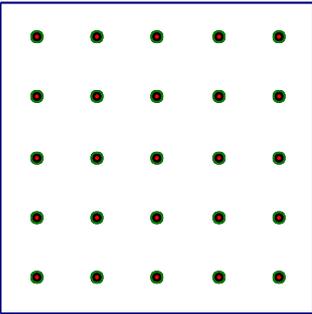
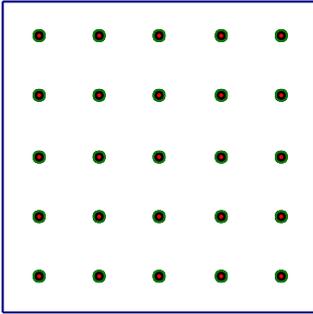
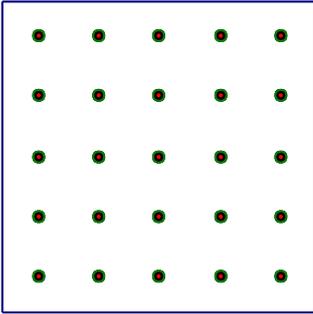
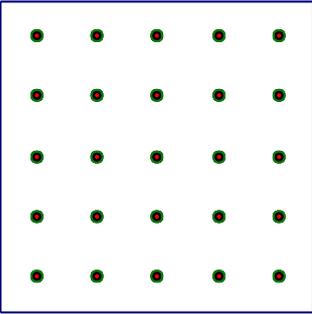
**Papel quadriculado (1 cm)**



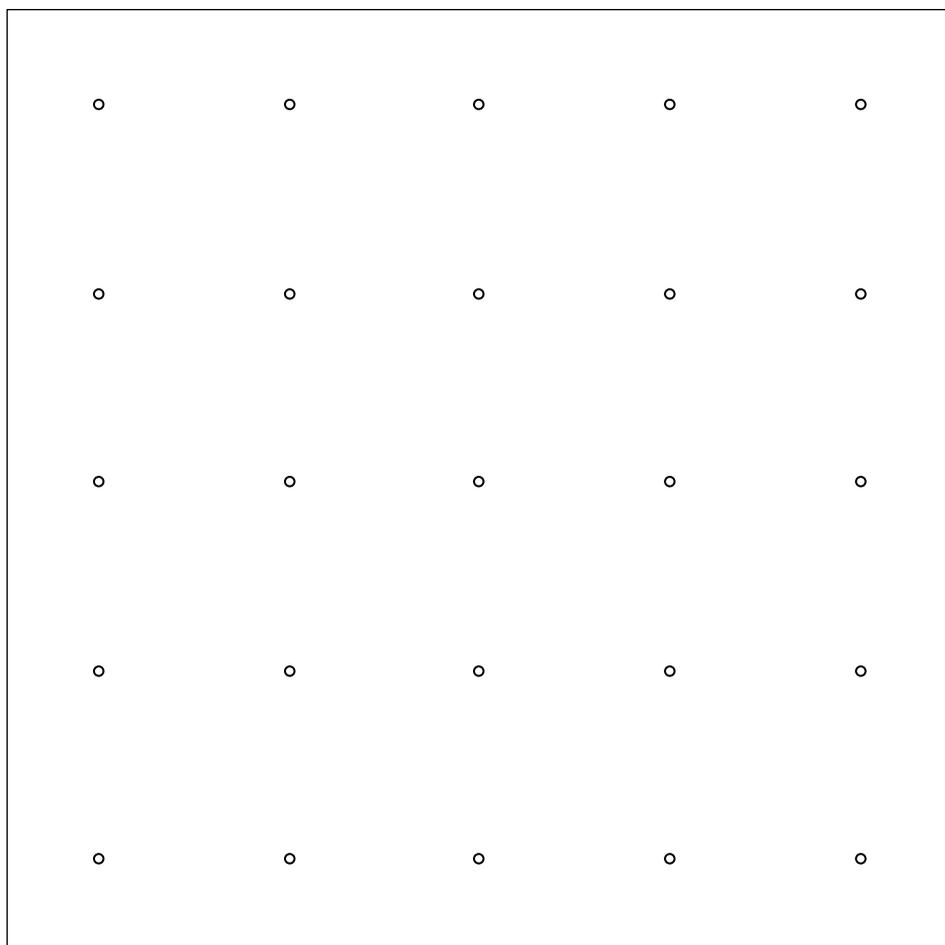
*geoplano 3x3*



geoplano 5x5



**matriz para construção do geoplano - ampliar 200%**



1. Colocar esta matriz sobre a tábua de contraplacado com as mesmas dimensões.
2. Pregar os pregos nos pontos marcados com o cuidado de não atravessarem o contraplacado.
3. Retirar a matriz.



## RELATO DA TAREFA CUBOS CRESCENTES

Sobre a segunda parte da actividade *CUBOS CRESCENTES* apresenta-se um relato da sua realização, com alunos do 4º ano de escolaridade.

Os alunos entusiasmaram-se bastante com esta proposta e realizaram um trabalho cooperativo muito interessante, discutindo a construção.

Perceberam que iam precisar de mais quadrados do que os que tinham no grupo. Na construção que fizeram seguiram algumas orientações que decorreram da tarefa de planificação realizada na primeira parte, isto é, não fizeram faces isoladas para depois ligar. Foram juntando quadrados e ligando faces fazendo a construção do cubo. Em alguns casos fecharam os cubos mesmo antes de terem todos os quadrados necessários. Foram construídos 3 cubos destes na sala.

A professora colocou a questão: — quantos quadrados tem cada cubo?

— 24 — responderam.

—  $6 \times 4$ .

A professora pediu-lhes então que com os cubos que tinham, obtivessem um cubo maior. E perguntou-lhes quantos quadrados iriam ser necessários para construir esse cubo. Vários alunos responderam 48. Um deles pegou nos dois cubos e ilustrou o raciocínio que estava a fazer, juntou os quadrados dos dois cubos para obter um cubo maior.

Formaram-se dois grupos na sala para tentar obter os cubos maiores.

Foi um trabalho colectivo, em que dois alunos fizeram a construção e os outros foram dando palpites.

— Assim dá paralelepípedo.

— Vão ser 9 na face.

O novo cubo maior ficou então construído.

A professora perguntou:

— Quantos quadrados foram necessários?

—  $6 \times 9$ , 54.

Nesta altura estavam construídos na sala 2 cubos destes.

A professora pediu aos alunos que previssem o número de quadrados necessários para construir cubos destes mas ainda maiores.

Os alunos ficaram muito motivados com esta questão. Ficaram muito inquietos e começaram a discutir entre si. Houve alunos que foram dizendo alto vários números associados a esta pesquisa: 16, 25, 100. O 100 é dito por um aluno que observou o  $1\text{m}^2$  que existe exposto na parede, feito com  $100\text{dm}^2$  decorados.

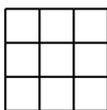
A professora interveio construindo uma tabela no quadro que pediu aos alunos para completarem. A professora apenas construiu a tabela, os valores foram sendo registados pelos alunos. Os valores registados na primeira coluna da tabela suscitaram dúvidas aos outros colegas que não estavam a ver como foram obtidos.

A professora fez, em colectivo, a exploração dos quadrados perfeitos consecutivos, no sentido dos alunos visualizarem o número de quadrados necessários para construir um quadrado maior que será a face de cada cubo pedido. Esta visualização vai permitir a compreensão da obtenção dos números da tabela.

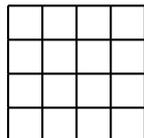
nº quadrados por face	total
4	
9	
16	
25	
36	
49	
64	
81	
100	



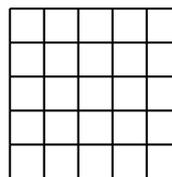
2



3



4



5

Esta exploração foi acompanhada pela contagem de linhas e colunas e pelo cálculo do produto para obtenção do número total de quadrados (peças) que formam cada quadrado.

Esta exploração em colectivo permitiu aos alunos chegarem à generalização do número de quadrados necessários para construir cubos maiores. São precisos 6 vezes o número de quadrados para cada face que é sempre o número de quadrados do lado a multiplicar por ele próprio.

## **VISUALIZAÇÃO E GEOMETRIA**

### **O VER E O OLHAR**

*Quando se fala de ver não se fala apenas da capacidade de olhar – essa capacidade espantosa que nos permite registar as sensações e percepções visuais. Ver é mais do que isso. Ver é ir ao encontro das coisas, é a coordenação consciente dos diferentes olhares, das diferentes sensações, das diferentes percepções, das próprias memórias que nos informam os actos e as escolhas. Ver é escolher e é julgar. Ver é compreender.*

*De facto, duas pessoas, observando atentamente o mesmo objecto, têm dele uma visão diferente. Isto quer dizer que, embora o mecanismo da vista seja praticamente o mesmo em todas as pessoas, o juízo que elas fazem do mundo em redor difere de caso para caso. E mais: em certos casos e em certas condições, uma mesma pessoa retira da realidade conclusões visuais diversas, consoante a alteração da sua atitude psicológica ou cultural, consoante os meios de apoio de que possa dispor, consoante o tempo que decorre entre duas análises.*

*Ver é portanto uma forma de compreender. É um processo de formular juízos, mais ou menos completos, sobre as coisas. E parece reduzível que a visão é tanto mais profunda e fecunda quanto maior for o nosso conhecimento e experiência do mundo, das coisas e seres que o constituem. Em princípio, se tivermos um passado rico de experiências, rico de memórias, tanto mais alargada será a nossa consciência do meio envolvente – e portanto, em princípio também, a nossa capacidade de agir e comunicar.*

(Adaptado de Rocha de Sousa – Coleção Textos Pré-Universitários. M.E.)

### **A VISUALIZAÇÃO ESPACIAL<sup>8</sup>**

*A visualização espacial, em particular, é simultaneamente facilitadora de uma aprendizagem da geometria e desenvolvida pelas experiências geométricas. Engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia, e com a capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos.*

---

<sup>8</sup> *Visualização espacial: algumas actividades*, José Manuel Matos e M<sup>a</sup> de Fátima Gordo - *Educação e Matemática*, nº 26, 1993

**Materiais manipuláveis e de registo a que os alunos devem ter acesso:**

<ul style="list-style-type: none"><li>• Barras articuladas (cartão com ataches)</li><li>• Embalagens de cartão com diferentes formas</li><li>• Cordel e fita-cola</li><li>• Elásticos compridos (3m)</li><li>• Paus de fósforo</li><li>• Plasticina</li><li>• Palhinhas</li><li>• Figuras geométricas de diferentes formas (para pavimentar)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Geoplano e Elásticos</li><li>• Tangram</li><li>• Blocos Lógicos</li><li>• Polydrons</li><li>• Quadrados de “espuma”</li><li>• Triângulos de “espuma”</li><li>• Régua, esquadros, transferidor, compasso</li><li>• Espelhos</li><li>• Mira</li><li>• Cartolina</li><li>• Tesoura</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Papel com diferentes malhas:<ul style="list-style-type: none"><li>- Ponteadado (quadriculado, isométrico...)</li><li>- Quadriculado</li><li>- Triangulado</li><li>- Milimétrico</li><li>- Vegetal</li><li>- Acetato</li></ul></li><li>• Cubos de encaixe</li><li>• Cubos de madeira</li><li>• Puzzles</li><li>• ...</li></ul>
--	---	---

<b>CAPACIDADES DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL</b>	<b>EXEMPLOS DE ACTIVIDADES QUE AS DESENVOLVEM</b>
---	---

### **1. Coordenação visual-motora**

Capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo.

- Jogos com bolas;
- Desenho livre;
- Colagens;
- Descoberta de um caminho;
- Resolver e fazer labirintos (com cordas no chão, em papel);
- Pintar desenhos;
- Reproduzir figuras dadas;
- Pintar espaços marcados com pontinhos.

### **2. Memória visual**

Capacidade de recordar objectos que já não estão visíveis.

- Observar 7 objectos numa mesa e, depois de removidos, recordá-los e reconstituir a posições em que estavam;
- Observar figuras e copiá-las, mas sem as voltar a observar;
- Observar figuras em papel ponteadado e desenhá-las no geoplano sem as voltar a ver.

### **3. Percepção figura – fundo**

Capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos.

- Isolar elementos geométricos de um fundo;
- Fazer pavimentações (com figuras iguais e diferentes);
- Completar figuras de forma a se assemelharem a outras dadas;
- Procurar figuras imersas noutras;
- Usar o Tangram;

### **4. Constância perceptual**

Capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas.

- Procurar todos os quadrados num geoplano 5x5;
- Reconhecer figuras geométricas em várias posições;
- Construir uma figura geométrica utilizando diversos materiais;
- Procurar na sala de aula ou noutra contexto, uma determinada figura geométrica.

### **5. Percepção da posição no espaço**

Capacidade para distinguir figuras iguais, mas colocadas com orientações diferentes.

- Desenhar uma figura simétrica de uma dada;
- Descobrir figuras com eixos de simetria utilizando o Mira ou um espelho;
- Encontrar figuras iguais a uma dada, mas com orientações diferentes.

### **6. Percepção de relações espaciais**

Capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco.

- Construção da aldeia dos cubos;
- Fazer uma construção com cubos a partir do desenho da mesma;
- Construir casas com vários cubos e descobrir quantos cubos foram usados em cada uma sem desfazer as casas;
- Descobrir qual o cubo que corresponde a uma planificação.

### **7. Discriminação visual**

Capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos.

- Identificar características de triângulos;
- Descobrir as diferenças entre dois desenhos;
- Descobrir critérios que conduzem a determinadas classificações ou ordenações.

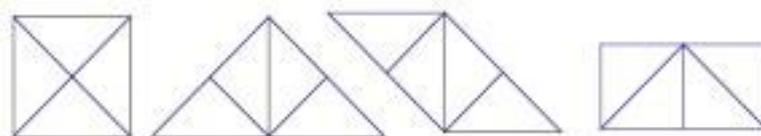
(Adaptado de *Visualização Espacial: algumas actividades*, José Manuel Matos e M<sup>a</sup> de Fátima Gordo - Educação Matemática, nº 26, 1993)

## DISSECÇÕES GEOMÉTRICAS

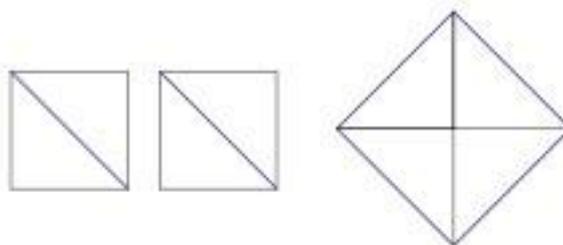
Um dissecção geométrica é um corte de uma ou mais figuras geométricas em várias peças que depois podem ser rearrumadas para formar outra ou outras figuras.

Segundo Frederickson uma dissecção pode ser apreciada de várias maneiras. A mais elementar é como um puzzle em que um dado número de peças podem se podem juntar para formar uma figura desejada. Este tipo de experiência é acessível a qualquer criança e pode ser sempre desafiante, se a forma das peças se complicar e o seu número aumentar, ou se, para as mesmas peças, for possível juntá-las para formar figuras diferentes.

Outra maneira de encarar as dissecções é ser o próprio a criá-las. Para construir uma nova dissecção é importante ter como objectivo usar o menor número possível de peças e fazê-las com o máximo de simetria. Um exemplo muito simples é cortar um quadrado a partir das suas diagonais. Obtêm-se 4 peças iguais - triângulos rectângulos isósceles. Com estas 4 peças pode reconstituir-se o quadrado, pode fazer-se um triângulo isósceles maior, um paralelogramo e um rectângulo.



O gosto por criar e estudar dissecções é antiquíssimo. Desde os tempos de Platão que é conhecida uma dissecção de dois quadrados iguais, em quatro peças para obter um quadrado maior.



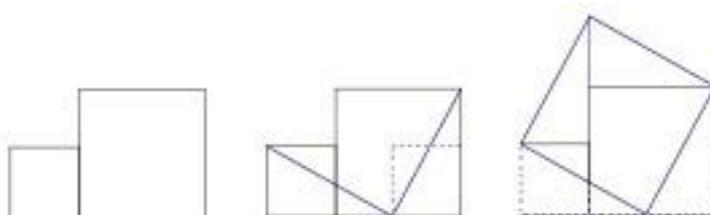
São conhecidas também dissecções muito interessantes criadas pelos matemáticos árabes no século X. A história das dissecções percorre o tempo, tanto do ponto de vista matemático, como do ponto de vista estético e lúdico. Há muitos puzzles comerciais de figuras, a duas e a três dimensões. Alguns deles muito simples e muito bonitos. O mais famoso é conhecido como *Tangran chinês*.

Do ponto de vista matemático, as dissecções tiveram sempre um papel importante. Entre as situações mais conhecidas estão a determinação do valor de  $\pi$  e as demonstrações do Teorema de Pitágoras.

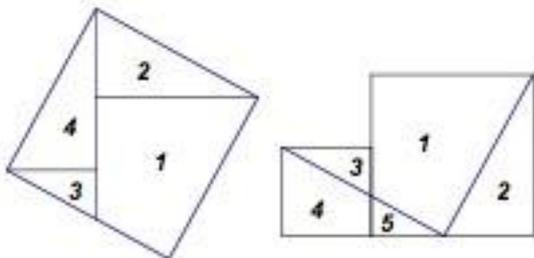
*Decompor os dois quadrados da esquerda para formar o quadrado da direita.*



Uma das soluções possíveis para este problema é a dissecção que apresentamos e que é usada como uma demonstração do teorema de Pitágoras. Há outras dissecções para demonstrar este teorema.



As medidas dos lados dos 3 quadrados dados, verificam a relação estabelecida no teorema de Pitágoras. Isto significa que pegando em dois quadrados quaisquer e decompondo-os de acordo com as figuras apresentadas é sempre possível construir um quadrado maior. Este conhecimento pode ser usado para construir um puzzle muito simples com 4 peças, que formam um quadrado. Se quisermos que o puzzle dê também para construir dois quadrados mais pequenos separados, é preciso cortar a peça nº 4 em duas, obtendo assim 5 peças.



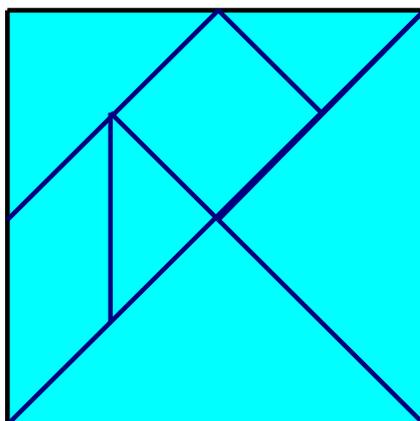
O estudo das dissecções tem sido muito rico e importante para figuras planas, figuras 2D, mas também há estudos desenvolvidos de figuras 3D, nomeadamente de poliedros. Aliás o estudo de dissecções e das analogias em situações 2D e 3D é muito interessante, do ponto de vista do desenvolvimento do conhecimento matemático. O teorema de Bolyai-Gerweine, demonstrado no início do século XIX afirma o seguinte: dados dois polígonos com a mesma área, é sempre possível decompor um deles em peças poligonais de tal modo, que juntas reconstituem o outro, (os dois polígonos dizem-se então equidecomponíveis). Em 1900, numa famosa conferência, Hilbert levantou a questão relativa ao mesmo resultado para poliedros, o qual ainda não estava provado e que, segundo Hilbert, provavelmente não seria verdadeira. Ainda em 1900, um seu discípulo, Max Dehn, confirmou a intuição de Hilbert, apresentando um contra-exemplo: um tetraedro e um cubo tendo o mesmo volume mas não equidecomponíveis.

As dissecções devem ser encaradas como muito importantes para aprender matemática e não apenas pelo seu carácter lúdico. A construção e estudo de dissecções geométricas têm uma ligação forte a outro importante assunto matemático que também pode ser abordado de uma perspectiva elementar, as pavimentações.

Além do riquíssimo valor matemático, as dissecções têm grande valor didático. Entre as capacidades que ajudam a desenvolver estão as capacidades de visualização.

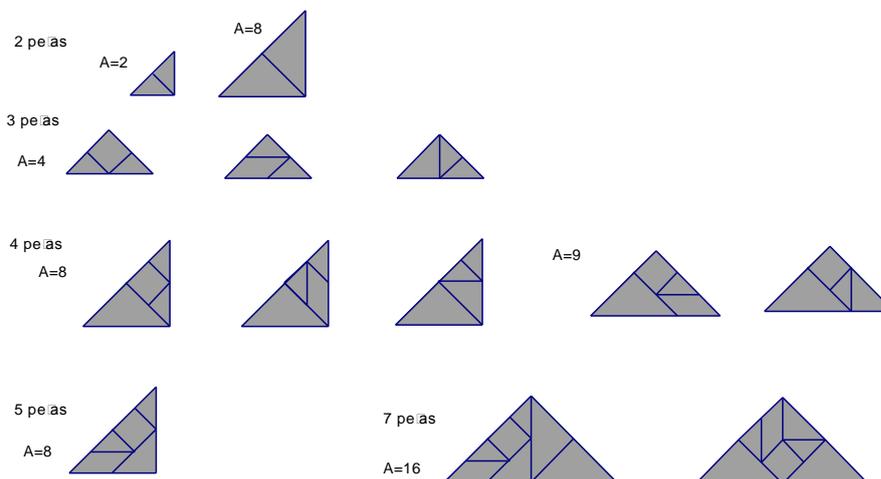
### **Tangran chinês**

Um dos instrumentos mais acessíveis para trabalhar dissecções é o Tangran Chinês, um puzzle muito conhecido e divulgado. Este puzzle é constituído por 7 peças que se obtém a partir de um quadrado.



Com as 7 peças podem ser construídas muitas figuras. Habitualmente são valorizadas na escola as figuras temáticas como pessoas, animais, objectos, etc. É muito importante a utilização do Tangran para a construção de figuras equivalentes e para a obtenção de figuras geométricas básicas (triângulos e quadriláteros) com número de peças variáveis. A obtenção de todos os triângulos e quadrados diferentes que se podem construir com peças do Tangran deveria ser uma das actividades obrigatórias com o recurso a este material.

Apresentam-se os triângulos construídos com um número variável de peças. Para cada caso está indicada a medida da área usando como unidade de medida a peça mais pequena do Tangran, o triângulo menor.



O Tangram pode ser usado de forma dinâmica com o recurso ao computador para a realização de actividades muito interessantes. Indicam-se alguns endereços onde estão disponíveis essas propostas.

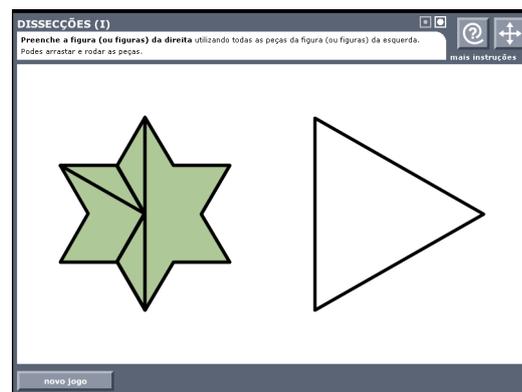
<http://mathforum.org/trscavo/tangrams/contents.html>

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.4/index.htm>

<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/welcome.xml>

### Dissecções dinâmicas

O computador trouxe potencialidades educativas muito ricas e facilitadoras à utilização de dissecções. Para além do acesso interactivo ao Tangran, existem disponíveis em suporte informático muitos outros tipos de dissecções. No cd-rom Clicmat, edição do Ministério da Educação há vários exemplos de dissecções dinâmicas. O download deste cd pode ser feito a partir de:



[http://www.dgidc.min-edu.pt/recursos\\_multimedia/recursos\\_cd.asp](http://www.dgidc.min-edu.pt/recursos_multimedia/recursos_cd.asp),

### Referências

- Alsina, Claudi, Burguès, Carme e Fotrny, J. M. 1989. *Invitacion a la Didactica de la Geometria*. Sintesis, Madrid
- Frederikson, Greg N. 1997. *Dissections: Plane & Fancy*. Cambridge University Press, UK.