Luciana Leroy

Aprendendo Geometria com Origami

Professor Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte
2010

Luciana Leroy

Aprendendo Geometria com Origami

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a orientação do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Professor Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte
2010

Índice

Introdução

A palavra japonesa origami quer dizer "dobrar papel" (**ori** = dobrar; **kami** = papel) e se refere a uma arte hoje disseminada pelo mundo inteiro. Apesar de ser um patrimônio da cultura japonesa, é provável que tenha começado na China, a qual é considerada "o berço do papel".

À medida que a confecção do papel foi se tornando mais simples e o papel mais acessível, o Origami tornou-se cada vez mais uma arte popular. Contudo, os japoneses sempre foram muito cuidadosos em não desperdiçar; guardavam sempre todas as pequenas réstias de papel, e usavam-nas nos seus modelos de Origami.

Durante séculos, não existiram instruções para criar os modelos Origami, pois eram transmitidas verbalmente de geração em geração. Em 1787, foi publicado um livro (Hiden Senbazuru Orikata) contendo o primeiro conjunto de instruções Origami para dobrar um pássaro sagrado do Japão. O Origami tornou-se uma forma de arte muito popular, conforme indica uma impressão em madeira de 1819 intitulada "Um mágico transforma folhas em pássaros", que mostra pássaros a serem criados a partir de folhas de papel.

Em 1845, foi publicado outro livro (Kan no mado) que incluía uma coleção de aproximadamente 150 modelos Origami. Este livro introduzia o modelo do sapo, muito conhecido hoje em dia. Com esta publicação, o Origami espalha-se como atividade recreativa no Japão.

Não seriam apenas os Japoneses a dobrar o papel, mas também os Mouros, no Norte da África, que trouxeram a dobragem do papel para Espanha na sequência da invasão árabe no século VIII. Os mouros usavam a dobragem de papel para criar figuras geométricas, uma vez que a religião proibia-os de criar formas animais. Da Espanha, espalhar-se-ia para a América do Sul. Com as rotas comerciais marítimas, o Origami entra na Europa e, mais tarde, nos Estados Unidos.

Hoje em dia, pode-se encontrar grandes mestres em dobraduras praticamente no mundo todo. Novas e melhores técnicas de dobradura desenvolvidas atualmente deixariam boquiabertos os mestres da antiguidade.

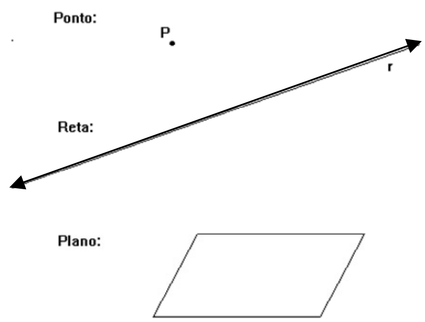
O presente trabalho propõe o uso do Origami para servir de material de apoio para aulas de Geometria do Ensino Fundamental e Médio. Para isso, foram elaboradas oficinas com duração média de 50 minutos que utilizam o Origami para reforçar a aprendizagem dos conceitos e proposições geométricas. Para as oficinas, é sugerido o uso de papel colorido com o objetivo de tornar a realização do trabalho mais atrativa; caso não seja possível, pode-se usar folhas brancas, o que não diminui a qualidade das oficinas. Inicialmente, esse material é destinado aos professores, mas nada impede que os alunos tenham acesso ao mesmo, desde que estejam sob orientação. Através do Origami, é possível estabelecer relações entre a confecção do material concreto e a abstração de conceitos estudados, propiciando aulas mais dinâmicas e possibilitando uma maior compreensão desses mesmos conceitos. Com as oficinas os alunos podem constatar através das dobraduras a veracidade dos conceitos geométricos estudados, sem adentrar na prova matemática dos mesmos.

A monografia está organizada em três capítulos: o primeiro trata de noções e construções geométricas básicas, sendo apresentadas em uma única oficina. O segundo capítulo está dividido em três oficinas, as quais abordam os pontos notáveis de um triângulo, soma dos ângulos internos de um triângulo e a construção de triângulos equilátero e isósceles. No terceiro capítulo, são apresentadas quatro oficinas as quais desenvolvem a divisão de um segmento em **n** partes iguais, o Teorema de Pitágoras, a trissecção de um ângulo, a construção do hexágono regular e a construção do pentágono regular. É recomendado que as oficinas I, II, III e IV sejam, preferencialmente, realizadas no Ensino Fundamental; enquanto que as oficinas V, VI, VII e VIII sejam realizadas no Ensino Médio.

Capítulo I

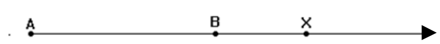
Noções e Construções Básicas de Geometria

Os elementos fundamentais da geometria (ponto, reta e plano) não possuem definição, sendo modelados pelos axiomas da Geometria Euclidiana. Dessa forma, podemos aceitar a modelagem natural para esses elementos.

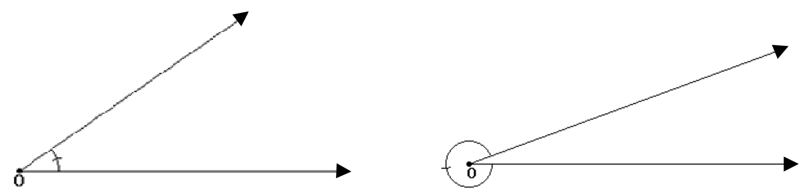


- **Segmento**: Dados os pontos A e B sobre a reta r, chamamos de segmento $\overline{AB}$ o conjunto constituído por todos os pontos de r que se encontram entre A e B. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.

- **Semirreta**: Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta $\overrightarrow{AB}$; neste caso A é chamado de origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$.

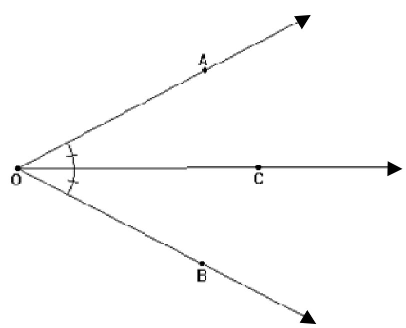


- **Ângulo**: Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com origem comum. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e, a origem comum, de vértice do ângulo. Essas semirretas determinam dois ângulos, o qual ficará bem determinado quando assinalarmos por um pequeno arco de circunferência.



- **Congruência**: Duas figuras geométricas (segmentos, ângulos, triângulos, etc.) são congruentes, se através de movimentos rígidos[1] podemos sobrepor exatamente um em cima do outro.

- **Bissetriz de um ângulo**: Chama-se bissetriz a semirreta interior ao ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

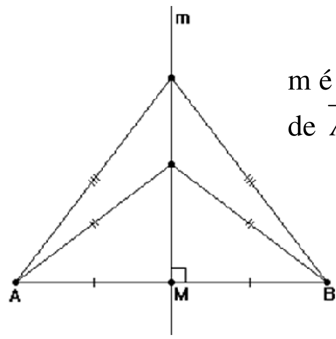


$\overrightarrow{AB}$ é bissetriz do ângulo AÔB

---

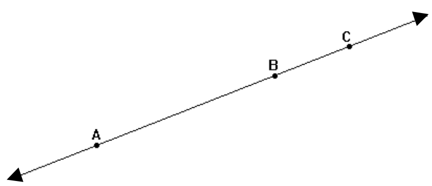
[1] Movimentos que preservam a forma e o tamanho dos objetos; movimentos rígidos dão origem a figuras ou objetos congruentes.

- **Mediatriz de um segmento**: A mediatriz de um segmento é conjunto de pontos do plano que equidistam das extremidades desse segmento.

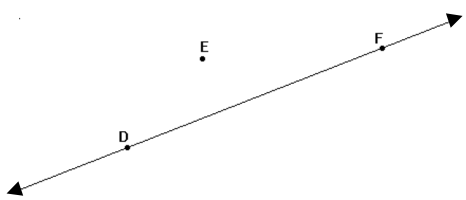


m é mediatriz de $\overline{AB}$.

- **Pontos colineares e não-colineares**: Dados três pontos distintos, diz-se que eles são:
  a) colineares, se pertencerem a mesma reta;
  b) não-colineares, se não pertencerem a mesma reta.

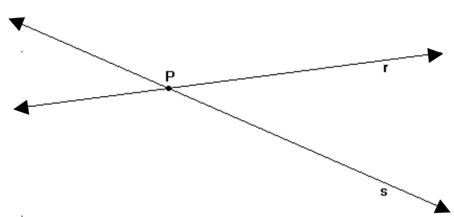


Os pontos A, B e C são colineares.

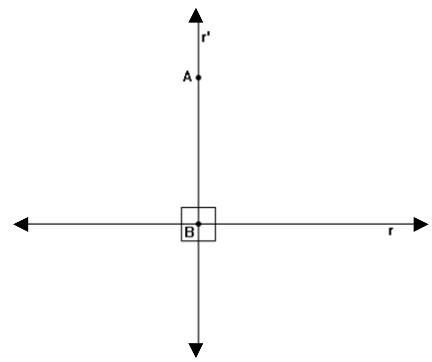


Os pontos D, E e F não são colineares.

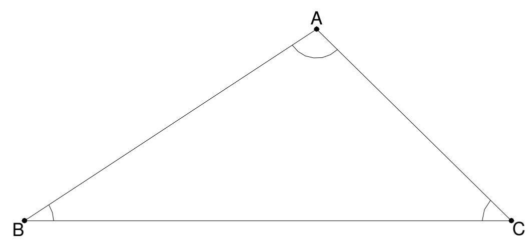
- **Retas concorrentes**: Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.



- **Retas perpendiculares**: Duas retas concorrentes, r e r', são perpendiculares se os quatro ângulos formados na interseção de r e r' são congruentes. Cada um desses ângulos é chamado de ângulo reto.

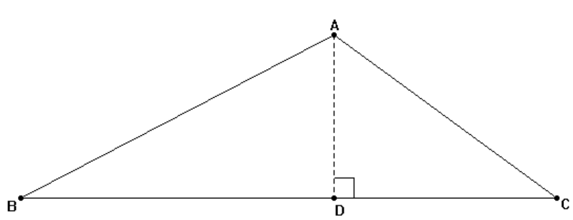


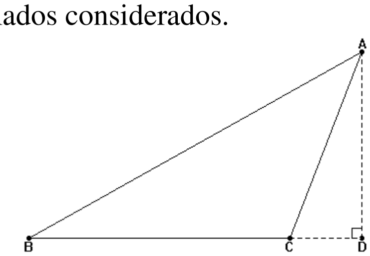
- **Triângulo**: Dados três pontos A, B e C, não-colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se **triângulo** ABC.



- **Elementos**:
    - <u>Vértices</u>: Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo ABC.
    - <u>Lados</u>: Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do triângulo ABC.
    - <u>Ângulos</u>: Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos (internos) do triângulo ABC.

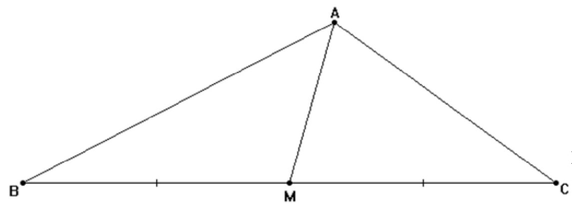
- **Alturas de um Triângulo**: Definem-se alturas de um triângulo cada um dos segmentos de reta perpendiculares às retas suportes[2] dos lados do triângulo com extremidades nestas retas e nos vértices opostos aos lados considerados.





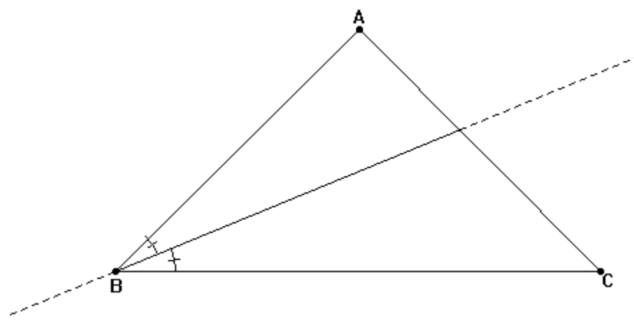
[2] Reta suporte de um segmento é a reta que contém tal segmento.

- **Mediana de um triângulo**: Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.

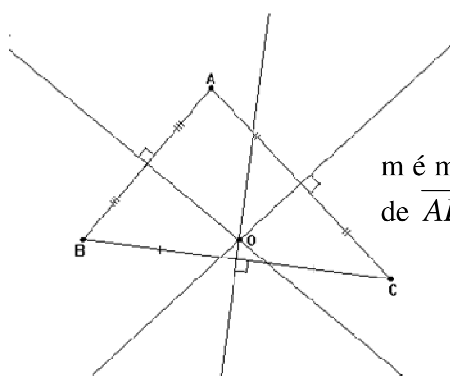


$\overline{AM}$ é mediana do ΔABC em relação ao lado $\overline{BC}$.

- **Bissetrizes de um triângulo**: são as bissetrizes dos ângulos (internos) de um triângulo.



- **Mediatrizes de um triângulo**: São as mediatrizes dos lados de um triângulo.



m é mediatriz de $\overline{AB}$.

Oficina I - Dobraduras Básicas

Material: folhas de papel colorido.

Objetivos: através de dobraduras, verificar e fixar conceitos elementares da Geometria Plana, como:

A) Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém estes pontos;
B) Ponto médio de um segmento;
C) Construção de retas perpendiculares;
D) Construção da bissetriz;
E) Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes;
F) Construção da mediatriz.

Pré-requisitos: noções de ponto, reta, plano, segmento, semirreta, ângulo.

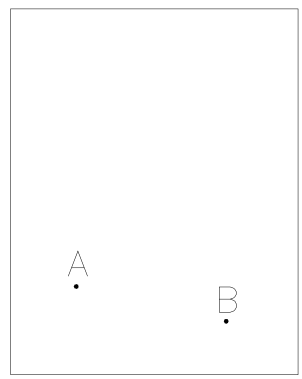
Procedimentos:

1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

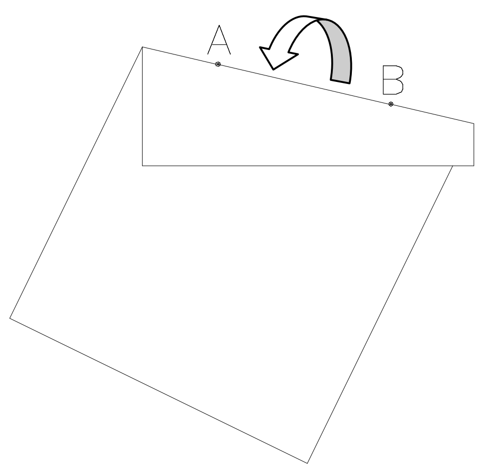
Conceitos geométricos a serem desenvolvidos nesta oficina

A. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém estes pontos.

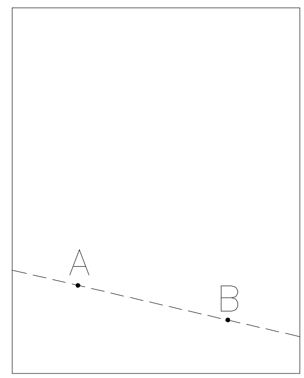
1. Marque dois pontos A e B (distintos) quaisquer.



2. Faça uma dobradura no papel que passe por A e B ao mesmo tempo.



3. Desdobre.

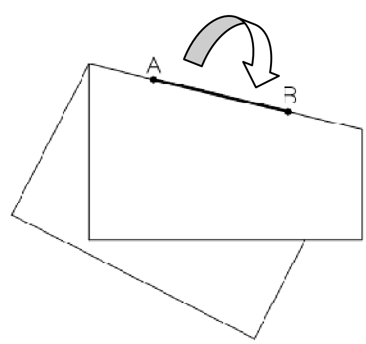


4. Resultado: Observe que a dobradura construída exemplifica uma reta que contém A e B.

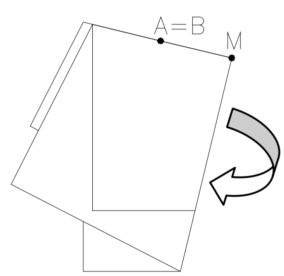
B. Ponto médio de um segmento

Chama-se de **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ o ponto M neste segmento tal que os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são congruentes.

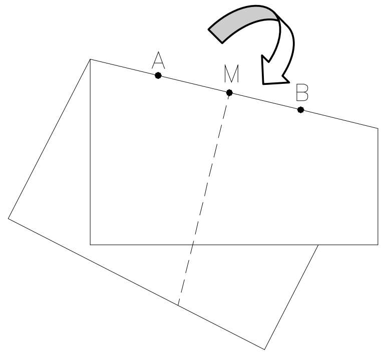
1. Faça uma reta qualquer. Marque os pontos A e B sobre a reta.



2. Faça uma dobradura coincidindo os pontos A e B.



3. Desdobre a e marque o ponto M na interseção das retas.



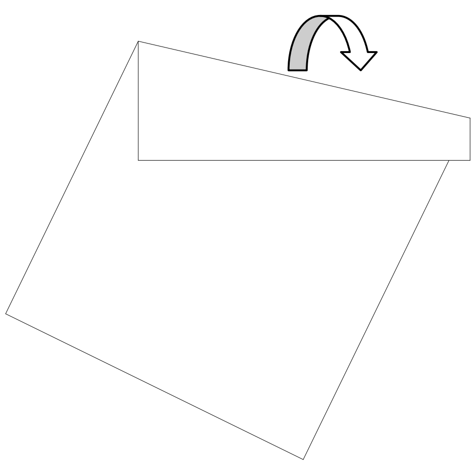
4. Resultado: Observe que a partir do passo 2, os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ se sobrepõem, o que corresponde a dizer que tais segmentos são congruentes.

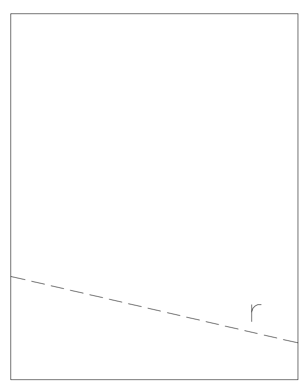
C. Construção de retas perpendiculares por um ponto P

Dado uma reta r e um ponto P, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular à reta r. Tem-se 2 casos a considerar:

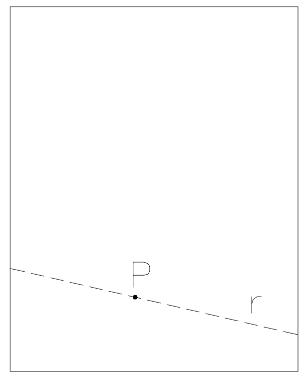
1º caso: O ponto P pertence à reta r.

1. Faça uma reta r.

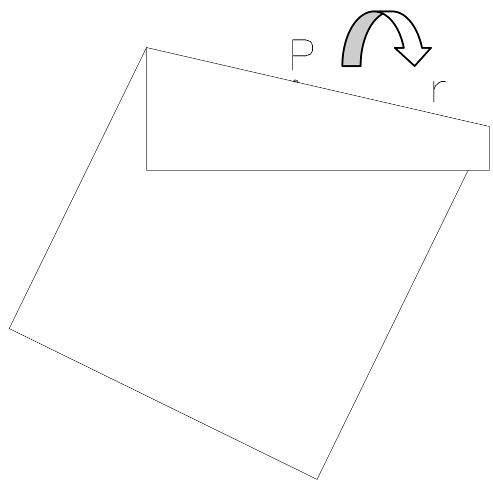




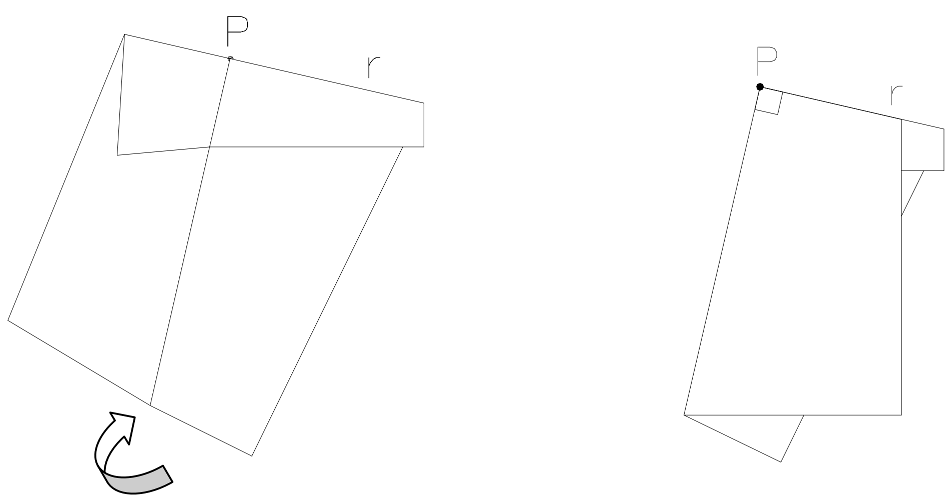
2. Marque um ponto P qualquer sobre r.



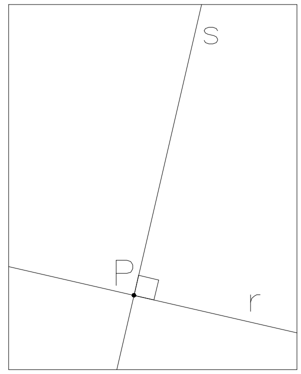
3. Dobre a folha sobre r.



4. Faça uma dobradura passando por P de modo que as duas semirretas sobre r com origem em P coincidam.



5. Desdobre. Verifique que há duas retas formadas r e s.

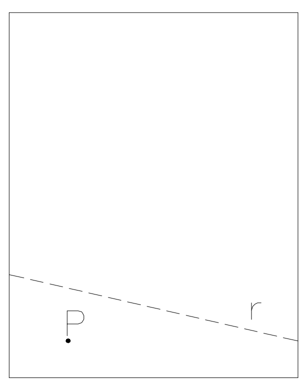


6. Resultado: Observe que pela construção os ângulos formados por r e s são congruentes (eles se sobrepõem), logo as retas r e s formaram ângulos retos, portanto, r e s são perpendiculares.

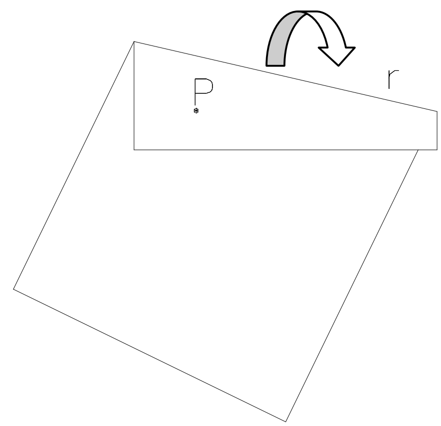
2º caso: O ponto P não pertence à reta r.

1. Faça uma reta r.

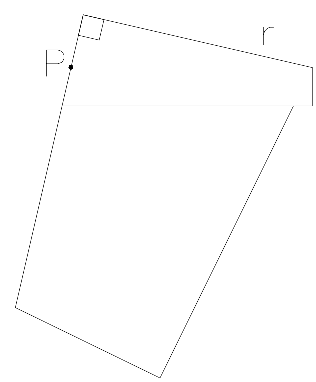
2. Marque um ponto P na folha fora de r.



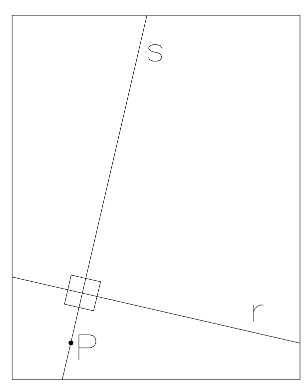
3. Faça novamente a dobradura sobre r, de modo que P fique à mostra.



4. Faça uma dobradura passando por P e faça coincidir as duas semirretas originadas por essa dobradura.



5. Desdobre e verifique que há duas retas formadas r e s.

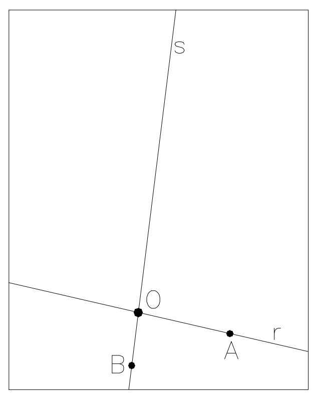


6. Resultado: Observe que, como no 1º caso, os ângulos formados por r e s são congruentes (eles se sobrepõem), logo as retas r e s formaram ângulos retos, portanto, r e s são perpendiculares.

D. Construção da bissetriz

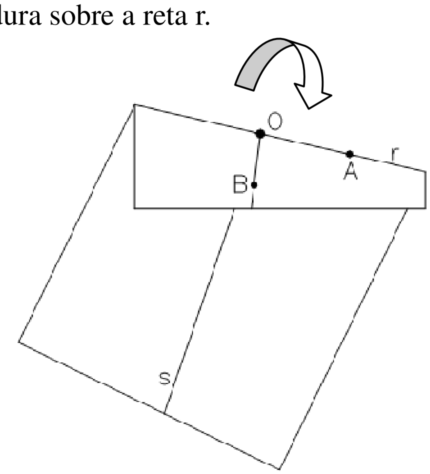
Como definido anteriormente (pág.10), **bissetriz** é a semirreta interior ao ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

Considere duas retas r e s quaisquer, concorrentes. Seja o ponto O a interseção das duas retas. Seja o ponto A pertencente à reta r e o ponto B à reta s.

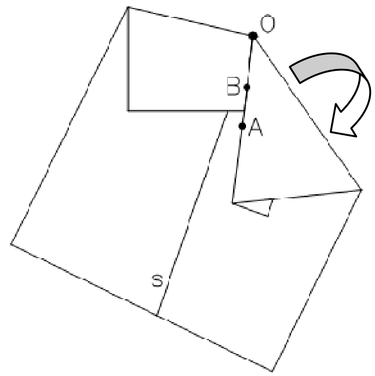


Será determinada a bissetriz do ângulo AÔB.

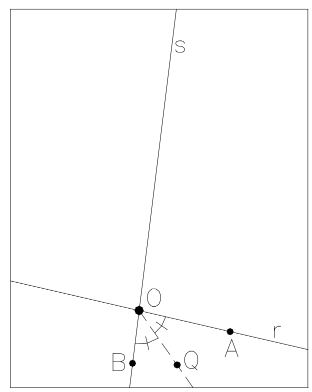
1. Faça a dobradura sobre a reta r.



2. Faça uma dobradura sobrepondo os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.



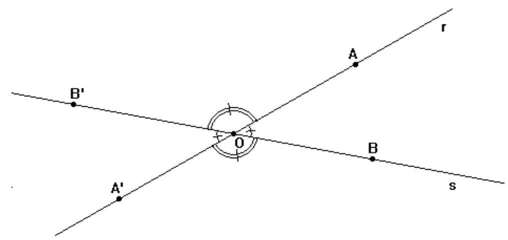
3. Desdobre. Marque o ponto Q sobre a dobradura.



4. Resultado: Após o segundo passo, observe que o ângulo AÔQ se sobrepõe ao ângulo BÔQ, logo são congruentes. Portanto, a semirreta $\overrightarrow{OQ}$ divide o ângulo AÔB em dois ângulos congruentes; $\overrightarrow{OQ}$ é a bissetriz de AÔB.

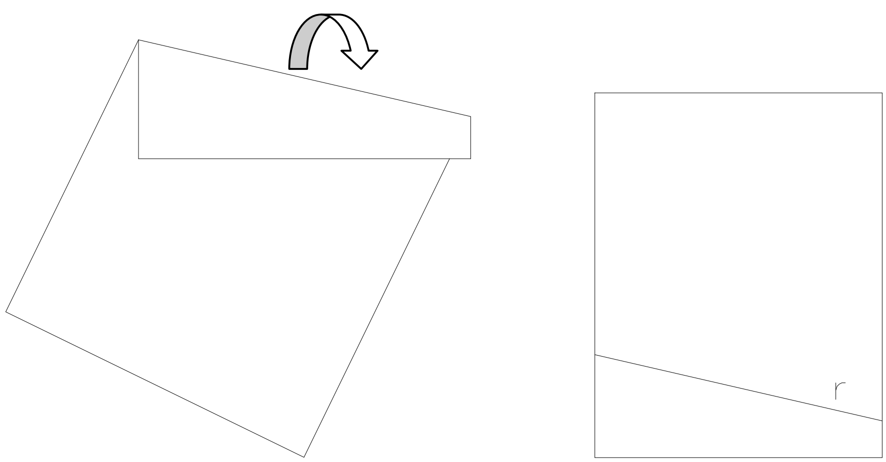
E. Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes

Dadas duas retas r e s concorrentes com interseção no ponto O. Sejam os pontos A e A' pertencentes à reta r e tendo O entre A e A'. Sejam os pontos B e B' pertencentes à reta s e tendo o ponto O entre B e B'. Então se diz que os ângulos AÔB e A'ÔB' são opostos pelo vértice, assim como os ângulos AÔB' e A'ÔB também o são (ver figura abaixo).

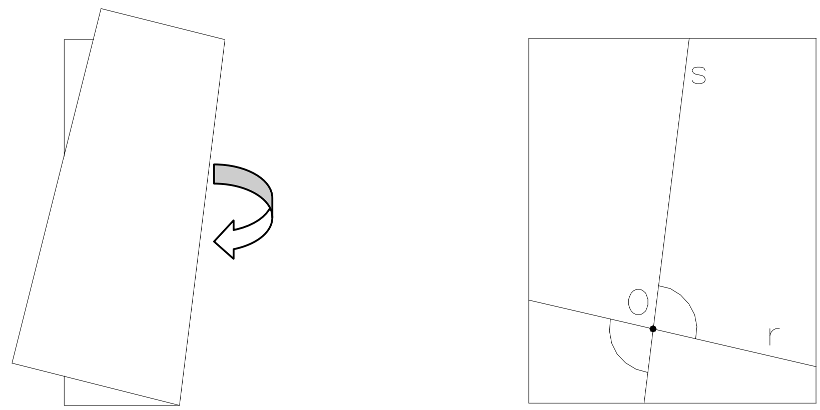


O objetivo agora é mostrar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Para simplificar, nesse item da oficina, serão considerados os ângulos opostos pelo vértice AÔB e A'ÔB'.

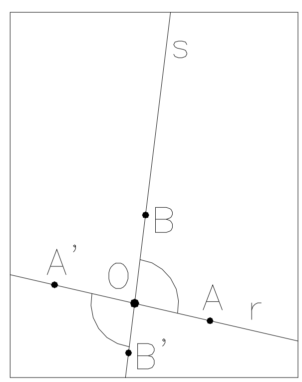
1. Faça uma reta r.



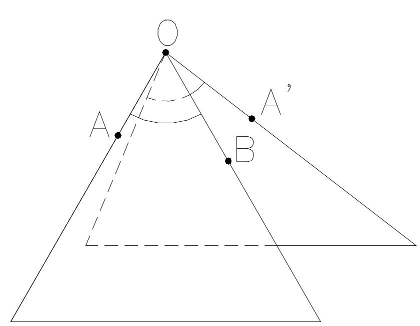
2. Faça uma reta s qualquer concorrente a r. Marque o ponto O na interseção das retas r e s.



3. Marque os pontos A e A' na reta r de modo que o ponto O fique entre os mesmos; marque os ponto B e B' na reta s de modo que o ponto O fique entre os mesmos.



4. Dobre a folha sobre r. Faça uma dobradura coincidindo as semirretas $\overline{OA'}$ e $\overline{OB}$ e outra dobradura coincidindo as semirretas $\overline{OA}$ e $\overline{OB'}$. Desdobre.

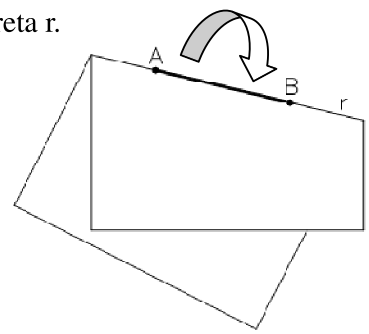


5. Resultado: Observe que através das últimas dobraduras (passo 4), os ângulos AÔB e A'ÔB' ficaram sobrepostos, logo são congruentes.

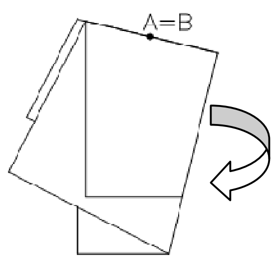
F. Construção da mediatriz

Dados os pontos A e B pertencentes ao plano, a **mediatriz** deles é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de A e B.

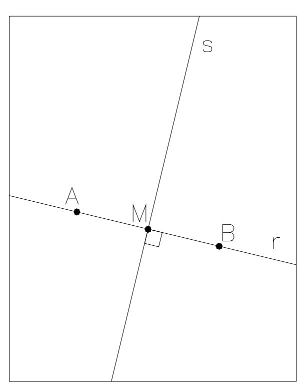
1. Marque os pontos A e B na folha e faça uma dobradura que passa por ambos, determinando a reta r.



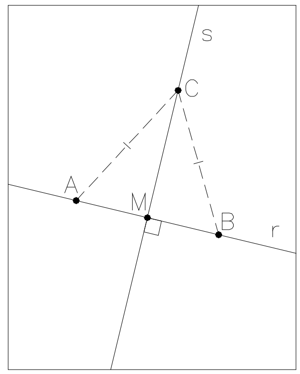
2. Dobre o papel, coincidindo o ponto A com o ponto B.



3. Desdobre. A dobradura determina a reta s. Marque o ponto M na interseção das retas.



4. Marque o ponto C sobre a reta s. Faça uma dobradura que passa pelos pontos A e C ao mesmo tempo e outra que passa por B e C ao mesmo tempo.



5. Resultados: Observe que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, portanto a reta s é mediatriz do segmento $\overline{AB}$; a reta s é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, interceptando-o em seu ponto médio.

Exercício: Faça novamente os passos 1 a 3. Marque o ponto C fora da reta s. Construa os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e verifique se é possível chegar ao mesmo resultado.

Sugestões:

1. Ao término de cada oficina, sugere-se ao aluno destacar a(s) figura(s) obtida(s) pelas dobraduras com a finalidade de visualizar melhor os conceitos trabalhados;
2. É recomendável que o professor estimule o aluno a fazer uma coletânea com os Origamis construídos, permitindo que o aluno tenha um material de estudo complementar ao caderno de Matemática.

Capítulo II

Triângulos

Oficina II – Pontos Notáveis de um Triângulo – Parte I

Material: folhas de papel colorido.

Objetivos: através de dobraduras, verificar as seguintes proposições:

A) As bissetrizes de um triângulo se interceptam num único ponto, chamado este de incentro.
B) As mediatrizes de um triângulo se interceptam num único ponto, chamado este de circuncentro.

Pré-requisitos: alguns conceitos sobre triângulos: vértices, lados, ângulos, bissetriz, mediatriz.

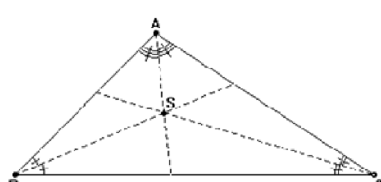
Procedimentos:

1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

Conceitos a serem desenvolvidos nesta oficina

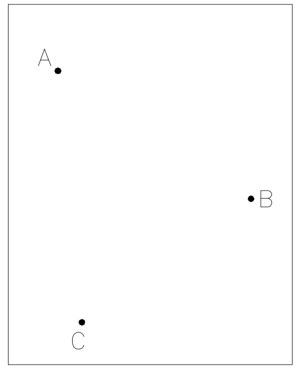
A. Incentro

O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é chamado incentro do triângulo.

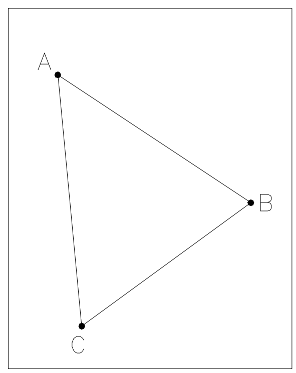


S é o incentro do ΔABC.

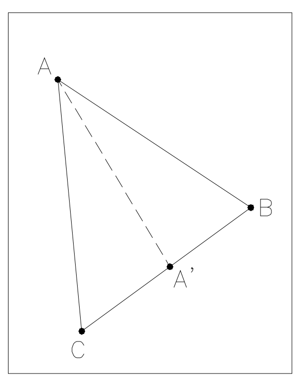
1. Marque no papel três pontos A, B e C não colineares.



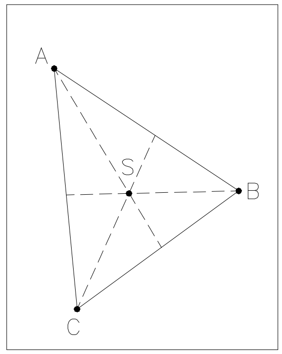
2. Construa as retas que passem por A e B, A e C e B e C.



3. Faça a bissetriz do ângulo A.



4. Faça as bissetrizes dos ângulos B e C e desdobre. Marque o ponto S na interseção das bissetrizes.

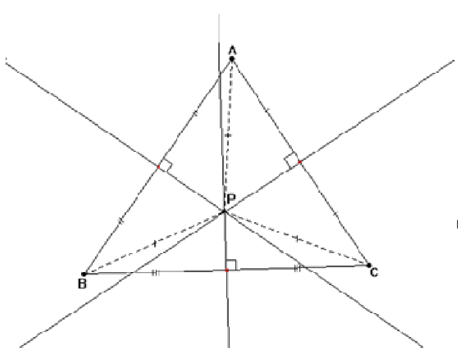


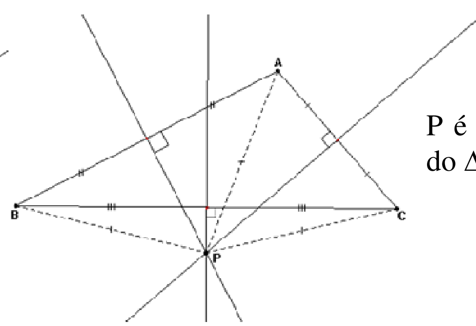
5. Resultado: Observe que as três bissetrizes se interceptam em um único ponto chamado de incentro.

Exercício: Aproveite a construção anterior para mostrar que o incentro equidista dos lados do triângulo.

B. Circuncentro

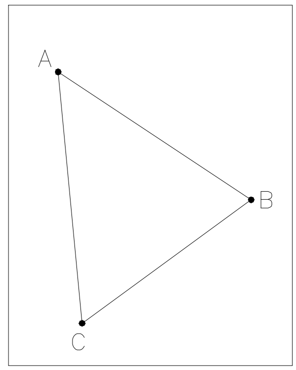
O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado de circuncentro.



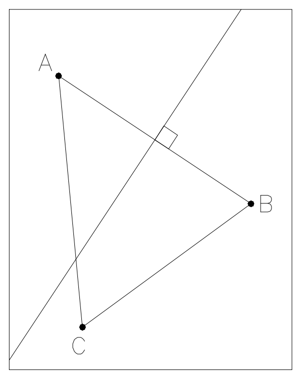


P é o circuncentro do ΔABC.

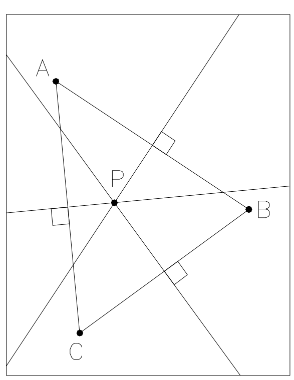
1. Construa um ΔABC.

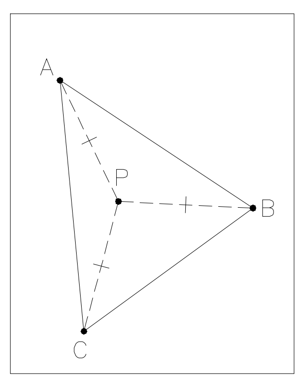


2. Faça a mediatriz do lado AB.



3. Faça as mediatrizes dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Desdobre. Marque o ponto P na interseção das mediatrizes.





4. Resultado: Observe que as três mediatrizes se interceptam em um único ponto chamado de circuncentro.

Exercício 1: Mostrar que o circuncentro se encontra equidistante dos vértices do triângulo.

Exercício 2: Escolha os pontos A, B e C de tal forma a obter um triângulo cujo circuncentro seja externo ao triângulo.

Oficina III – Pontos Notáveis de um Triângulo – Parte II

Material: folhas de papel colorido, tesoura, clipe.

Objetivos: através de dobraduras, verificar as seguintes proposições:

A) As alturas de um triângulo se interceptam em um único ponto chamado de ortocentro;

B) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida de um ângulo raso;

C) As medianas de um triângulo se interceptam em um único ponto chamado de baricentro.

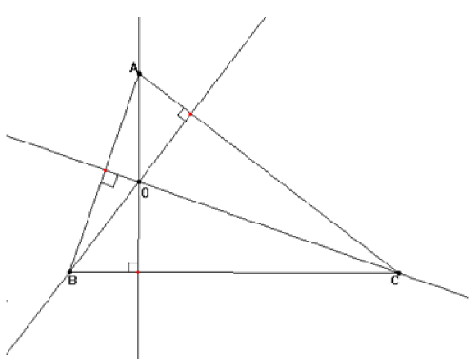
Pré-requisitos: alguns conceitos sobre triângulos: vértices, lados, ângulos, altura, mediana.

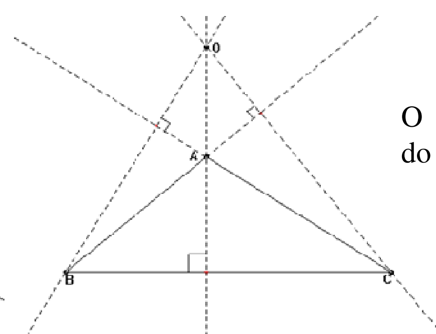
Procedimentos:

1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

A. Ortocentro

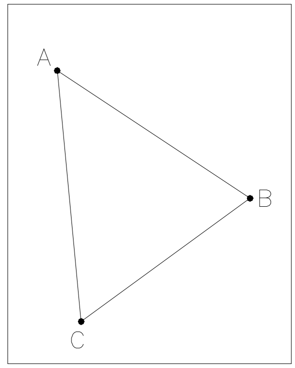
Chama-se ortocentro o ponto de interseção das retas suportes das alturas de um triângulo ABC.



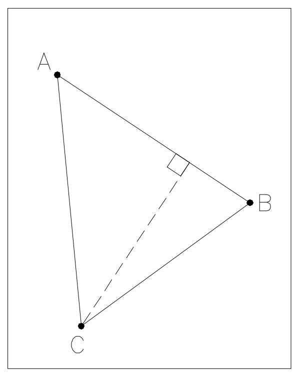


O é o ortocentro do ΔABC.

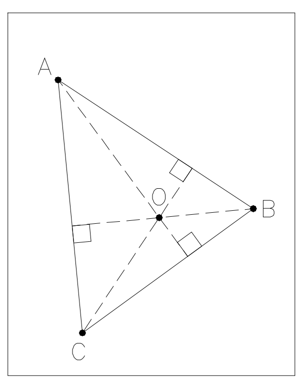
1. Construa um triângulo ABC.



2. Construa a altura relativa ao vértice C (faça a reta passando por C e perpendicular a reta suporte de $\overline{AB}$).



3. Da mesma forma, construa as alturas relativas aos vértices A e B. Marque o ponto O no encontro das alturas.



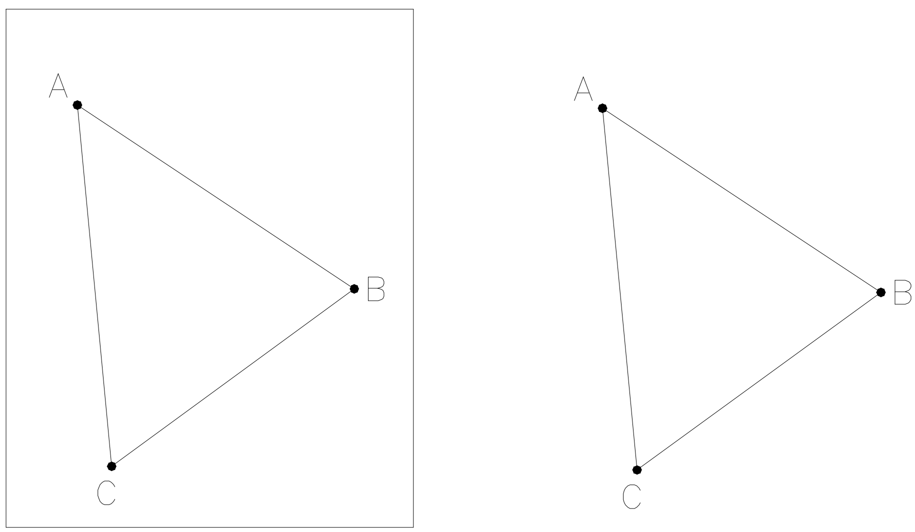
4. Resultado: Observe que as alturas de um triângulo encontram-se num mesmo ponto – o ortocentro.

Exercício: Escolha os pontos A, B e C de tal forma a obter um triângulo cujo ortocentro seja externo ao triângulo.

B. Soma dos ângulos internos de um triângulo

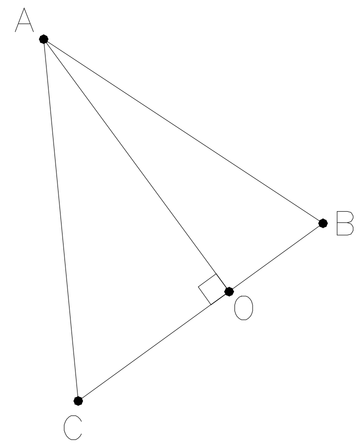
A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida de um ângulo raso.

1. Construa um triângulo qualquer usando dobraduras. Recorte.

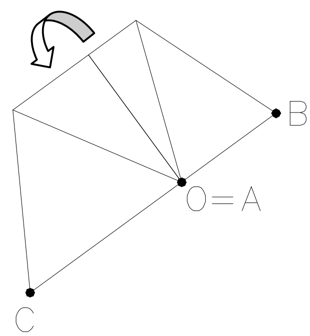


Observação: se o triângulo construído possuir um ângulo obtuso, nomeie o vértice desse ângulo de ponto A.

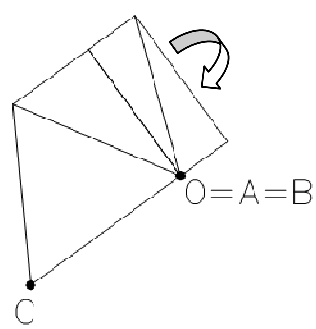
2. Construir a altura em relação ao vértice A.



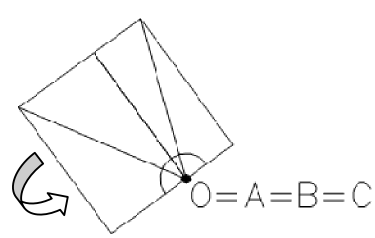
3. Faça uma dobradura coincidindo o ponto A com o ponto O.



4. Faça uma dobradura coincidindo o ponto B com o ponto O.



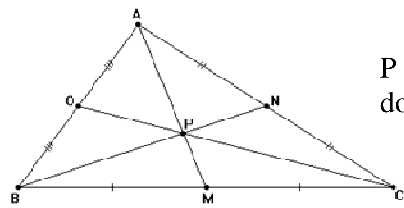
5. Faça uma dobradura coincidindo o ponto C com o ponto O.



6. Resultado: Observe que a união dos ângulos A, B e C formou um ângulo raso, logo a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a um ângulo raso.

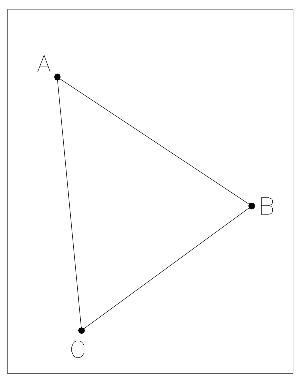
C. Baricentro

Chama-se baricentro o ponto de interseção das três medianas de um triângulo.

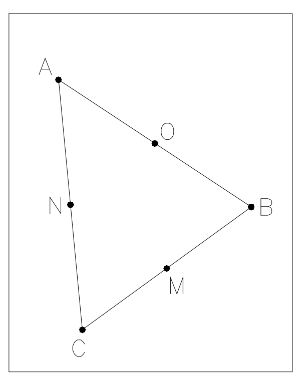


P é o baricentro do ΔABC.

1. Construa um triângulo ABC.

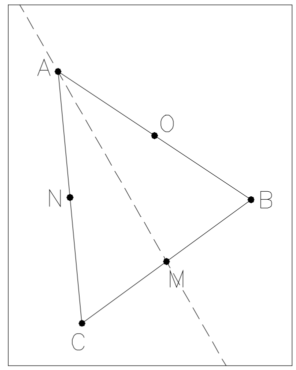


2. Marque os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo, com dobraduras.

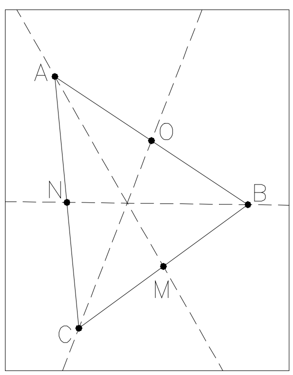


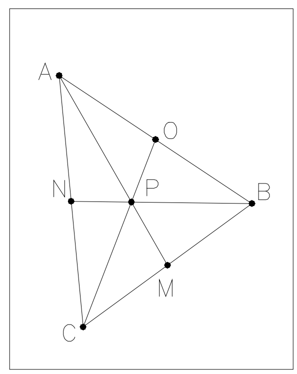
M, N e O são os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

3. Faça uma dobradura passando por A e M ao mesmo tempo. Desdobre.



4. Do mesmo modo, faça uma dobradura passando por B e N e outra dobradura passando por C e O ao mesmo tempo. Desdobre. Marque o ponto P no encontro das medianas.





5. Resultado: O ponto P é o baricentro do triângulo ABC.

Curiosidade: Recorte o triângulo, fure com um clipe o baricentro e verifique que o triângulo está numa posição de equilíbrio (o baricentro é o centro de gravidade do triângulo). Faça outro furo fora do baricentro e verifique o que acontece.

Oficina IV – Construção de Triângulos Especiais

Material: folhas de papel colorido.

Objetivos: construir um triângulo equilátero e um triângulo isósceles.

Pré-requisitos: alguns conceitos sobre triângulos: vértices, lados, ângulos, altura, mediana.

Procedimentos:

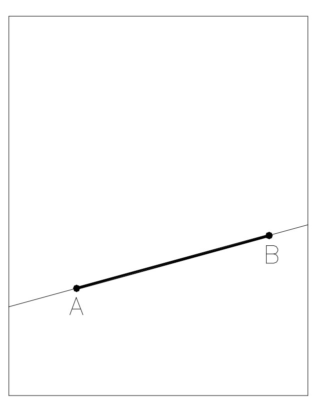
1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

Conceitos a serem desenvolvidos nesta oficina

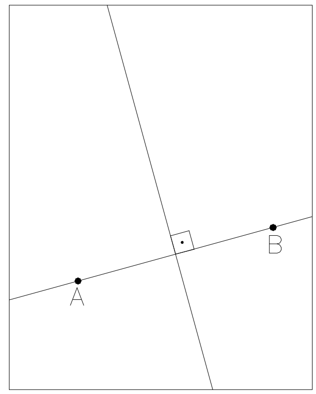
A. Construção de um triângulo equilátero

Um triângulo ABC é equilátero se, e somente se, os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são congruentes. Será construído um triângulo equilátero de base $\overline{AB}$.

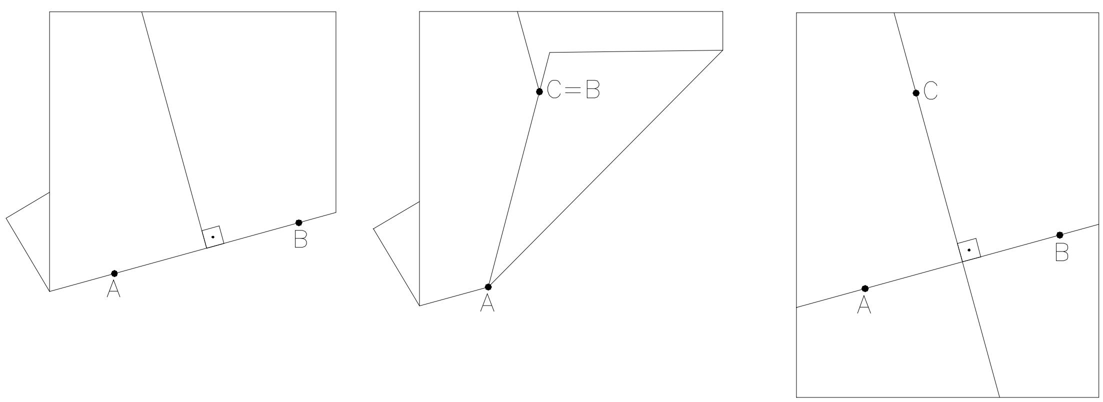
1. Faça uma reta qualquer e marque sobre ela os pontos A e B.



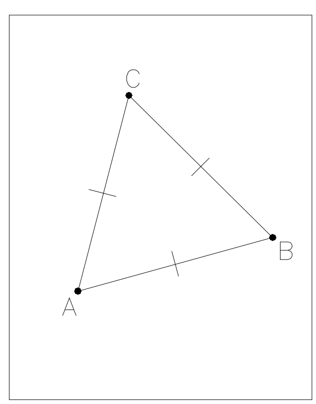
2. Faça a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



3. Faça uma dobradura levando o ponto B sobre a mediatriz, de tal forma que a dobradura passe por A. Marque o ponto C na interseção de B com a mediatriz.



4. Note que pela dobradura anterior, $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{AB}$. Como C está na mediatriz de $\overline{AB}$, então este ponto equidista de A e B, logo $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{BC}$.

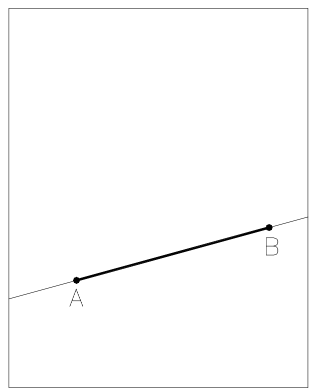


5. Resultado: Como $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo ABC construído é um triângulo equilátero.

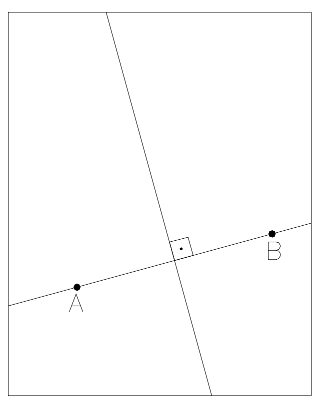
B. Construção de um triângulo isósceles

Um triângulo ABC é dito isósceles se, e somente se, possui dois lados congruentes.

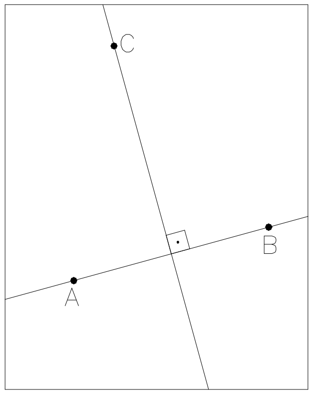
1. Faça uma reta r e marque sobre ela os pontos A e B.

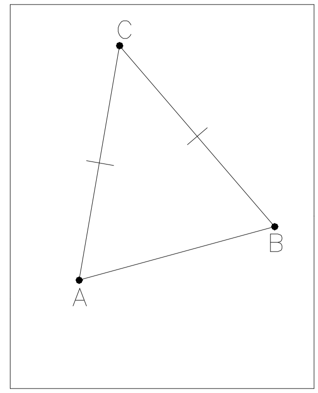


2. Faça a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



3. Marque um ponto C na mediatriz. Faça uma dobradura passando por B e C ao mesmo tempo e outra passando por A e C ao mesmo tempo. Desdobre.





4. Resultado: Sobrepondo os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ eles coincidirão, portanto os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ têm a mesma medida. Como $\overline{AC} = \overline{CB}$, então o triângulo ABC é isósceles.

Capítulo III
Divisão de Segmentos - Teorema de Pitágoras - Trissecção de um Ângulo - Polígonos Regulares

Neste capítulo, são apresentadas quatro oficinas direcionadas aos alunos do Ensino Médio. A primeira oficina trata da divisão de um segmento em partes iguais. Em seguida, é desenvolvida uma oficina para verificar o Teorema de Pitágoras; essa oficina pode ser também desenvolvida no Ensino Fundamental, uma vez que o conteúdo é introduzido nesta etapa. Na terceira oficina, é mostrado um procedimento para dividir um ângulo em três partes iguais. Finalizando, tem-se a oficina que possibilita a construção de dois polígonos regulares – o hexágono e o pentágono.

Oficina V – Divisão de Segmentos

Material: folhas quadradas de papel.

Objetivos: dividir um segmento em n partes iguais.

Pré-requisitos: alguns conceitos de Geometria Plana: ponto, segmento, ponto médio de segmento.

Procedimentos:

1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

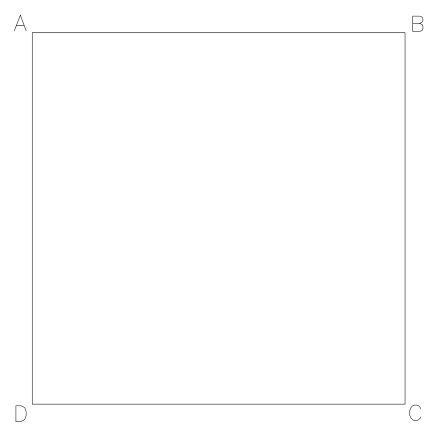
Conceitos geométricos a serem desenvolvidos nesta oficina

A. Divisão de um segmento em 2^k partes iguais

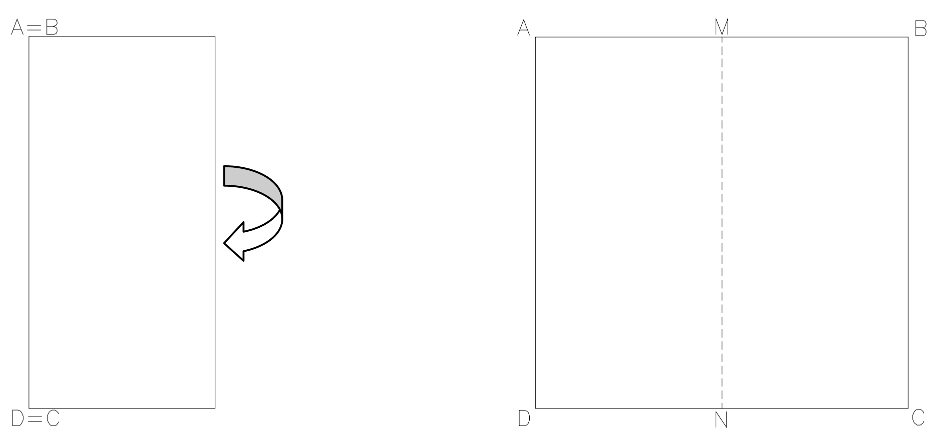
Dividir um segmento em 2^k partes iguais, $k \in N$, significa que para k=1, divide-se 2^1=2 partes iguais, isto é, basicamente, encontrar o ponto médio do segmento (ver oficina I).

Para k=2, 2^2=4 partes iguais, procede-se as seguinte forma:

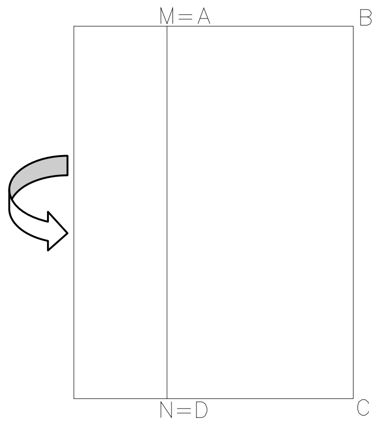
1. Considere que a folha de papel seja um quadrado ABCD. Nomeie seus vértices.

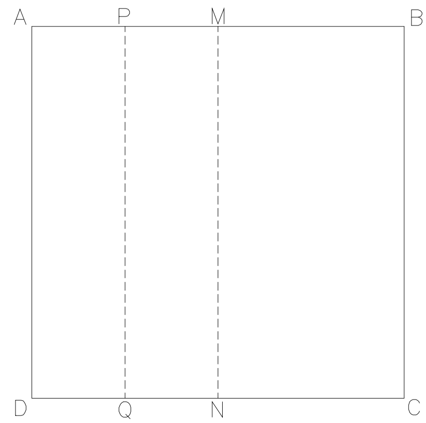


2. Dobre $\overline{BC}$ sobre $\overline{AD}$. Desdobre, e marque os pontos M e N nas extremidades da dobradura, de modo que M pertença ao segmento $\overline{AB}$ e N ao segmento $\overline{CD}$.

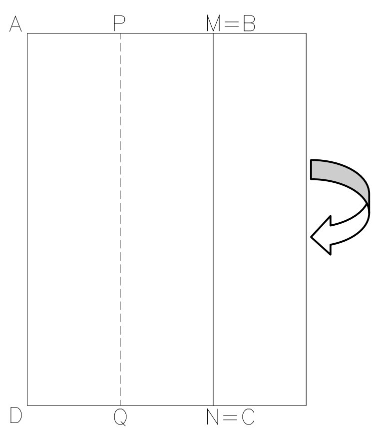


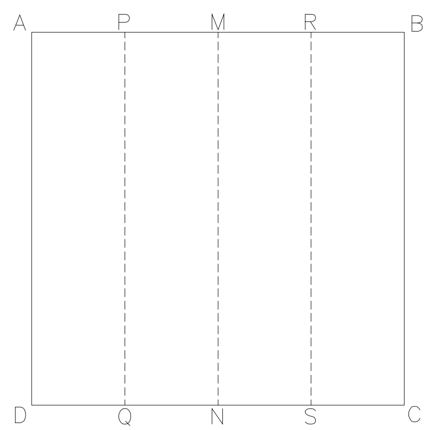
3. Dobre $\overline{AD}$ sobre $\overline{MN}$. Desdobre e marque os pontos P e Q nas extremidades da dobradura de modo que P pertença ao segmento $\overline{AM}$ e Q ao segmento $\overline{DN}$.





4. Dobre $\overline{BC}$ sobre $\overline{MN}$. Desdobre e marque os pontos R e S nas extremidades da dobradura, de modo que R pertença ao segmento $\overline{MB}$ e S ao segmento $\overline{NC}$.

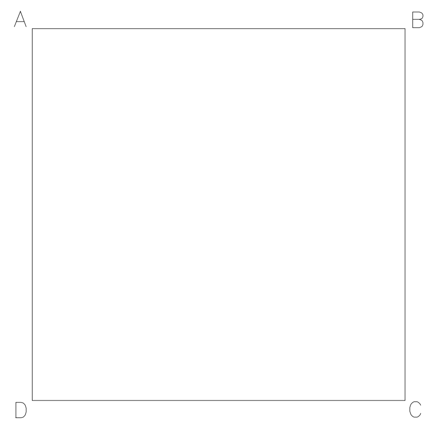




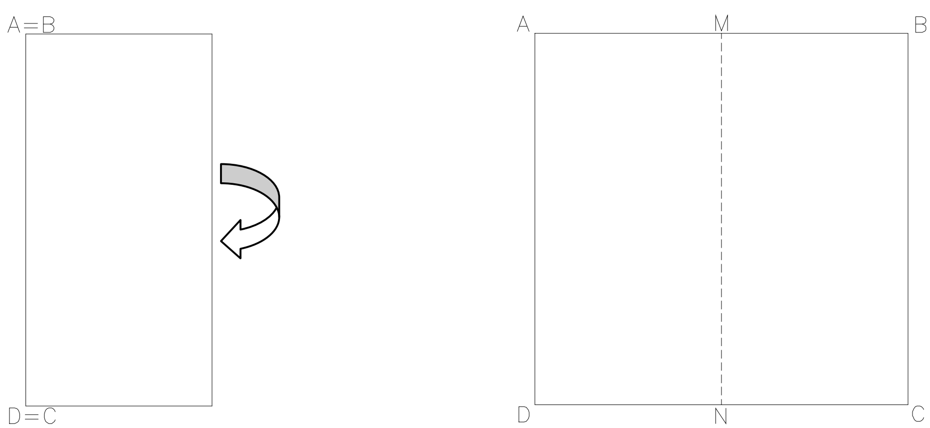
A partir dessa divisão, é possível dividir cada parte dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ao meio, obtendo 8 partes iguais, o que corresponde a k=3, isto é, $2^3=8$; se cada parte for dividida novamente ao meio, obtém-se $2^4=16$ partes iguais; e assim, sucessivamente, para se obter todas as potências de 2: 32, 64, ..., 2^k partes iguais.

B. Divisão de um segmento em 3 partes iguais

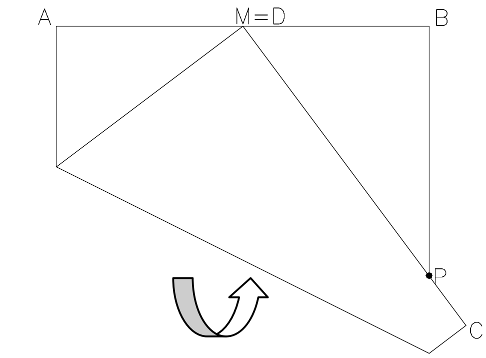
1. Considere que a folha de papel seja um quadrado ABCD. Nomeie seus vértices.

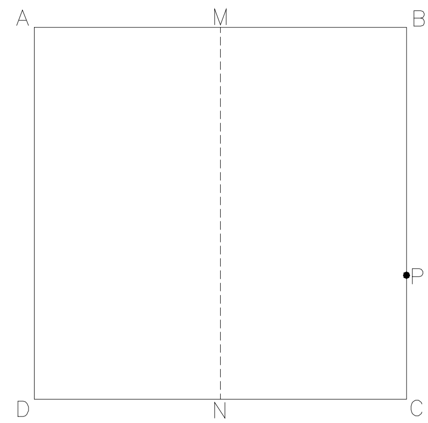


2. Dobre $\overline{BC}$ sobre $\overline{AD}$. Desdobre, e marque os pontos M e N nas extremidades da dobradura, de modo que M pertença ao segmento $\overline{AB}$ e N ao segmento $\overline{CD}$.

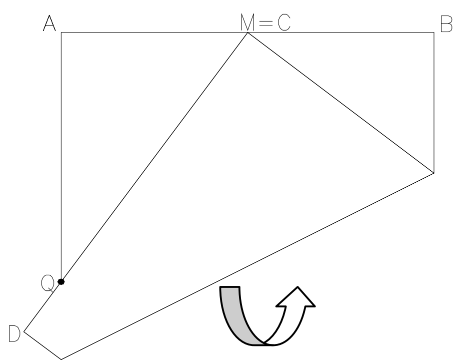


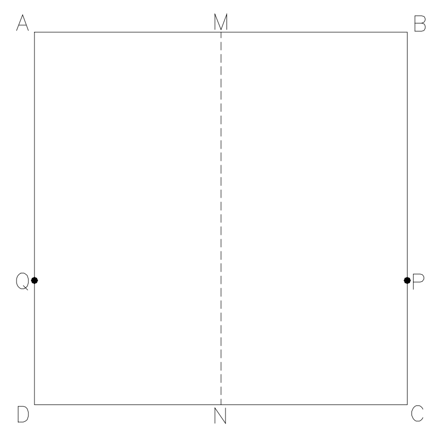
3. Faça uma dobradura levando o ponto D até o ponto M. Marque o ponto P na interseção de $\overline{CD}$ com $\overline{BC}$. Desdobre.



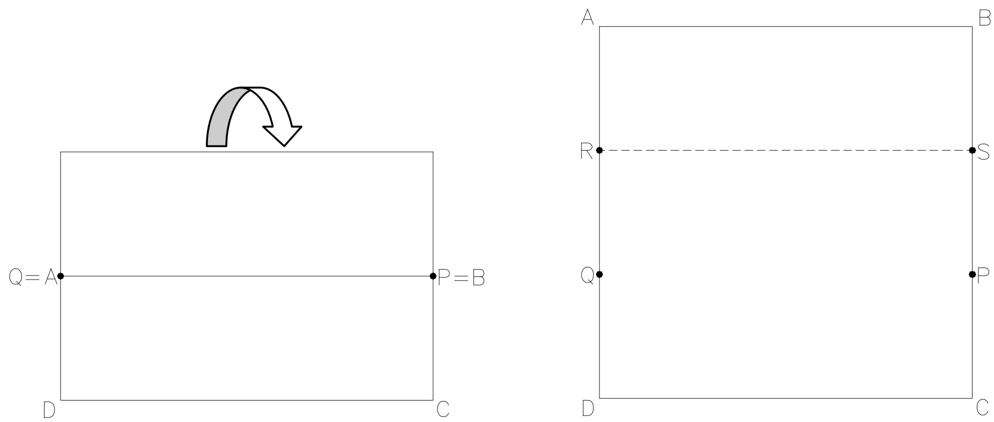


4. Faça uma dobradura levando o ponto C até o ponto M. Marque o ponto Q na interseção de $\overline{AD}$ com $\overline{CD}$. Desdobre.

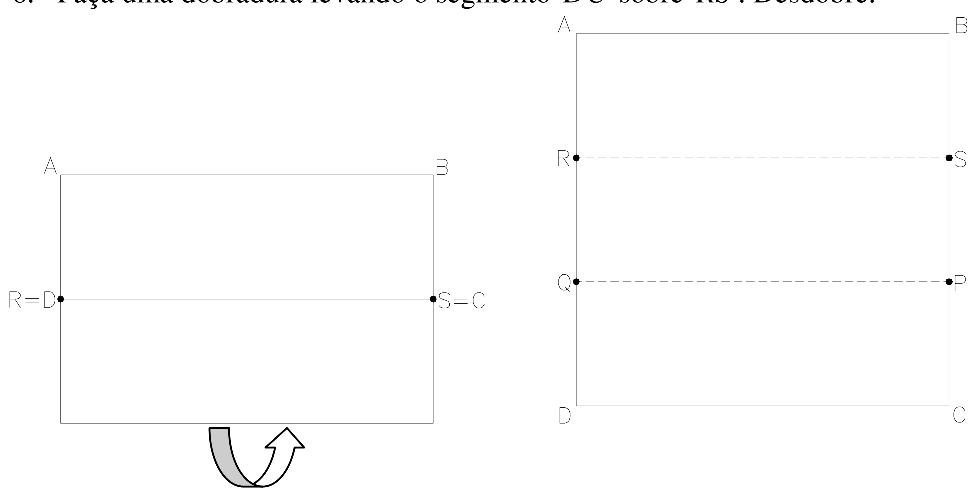




5. Faça uma dobradura levando o segmento $\overline{AB}$ sobre $\overline{QP}$. Desdobre. Marque nas extremidades da dobradura os pontos R e S.



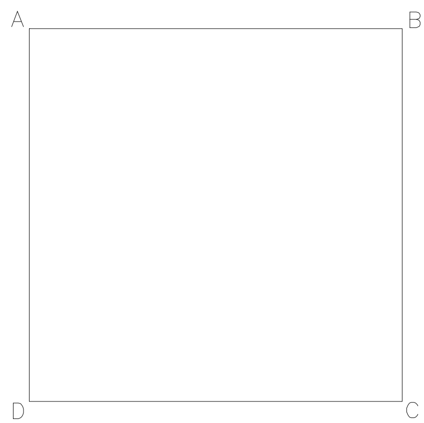
6. Faça uma dobradura levando o segmento $\overline{DC}$ sobre $\overline{RS}$. Desdobre.



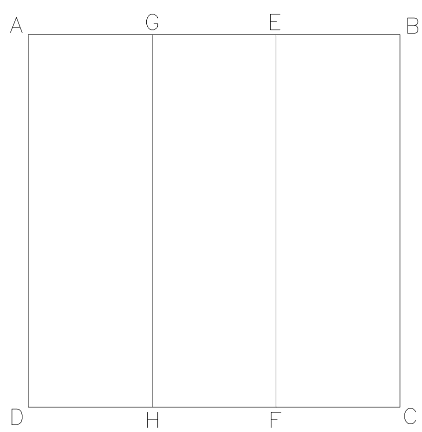
7. Resultado: Observe que os pontos R e Q dividiram o segmento $\overline{AD}$ em 3 partes iguais, ocorrendo o mesmo com os pontos S e P e o segmento $\overline{BC}$.

C. Divisão de um segmento em 5 partes iguais

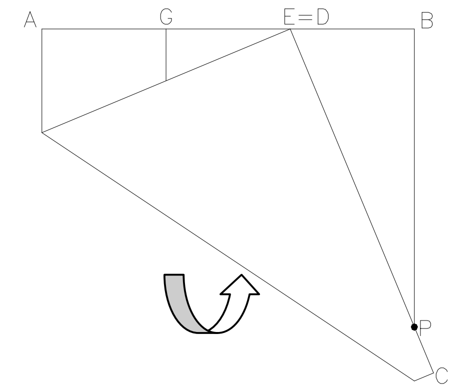
1. Considere que a folha de papel seja um quadrado ABCD. Nomeie seus vértices.

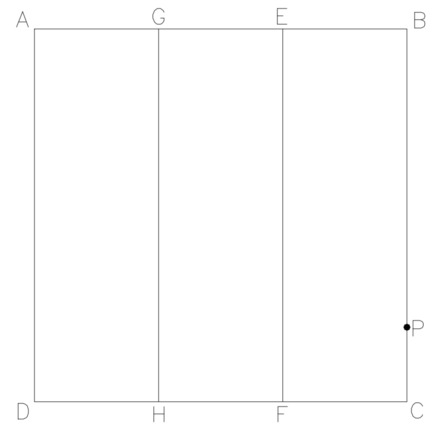


2. Divida os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em 3 partes iguais.

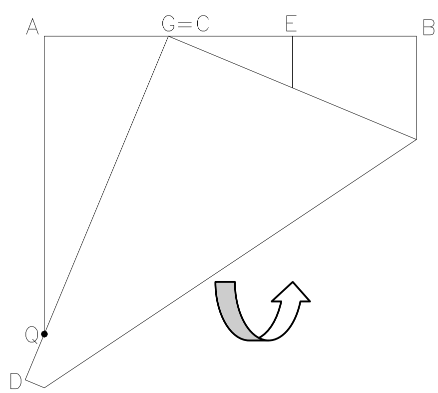


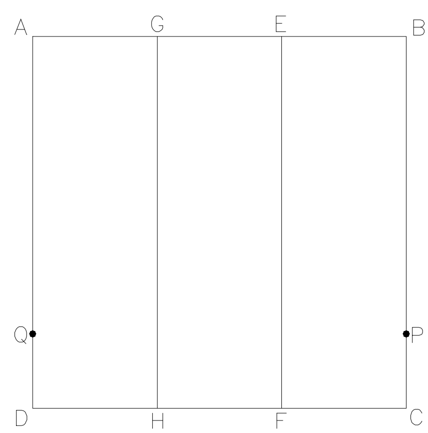
3. Faça uma dobradura levando o ponto D até o ponto E. Marque o ponto P, pertencente a $\overline{BC}$, na interseção de $\overline{DC}$ com $\overline{BC}$. Desdobre.



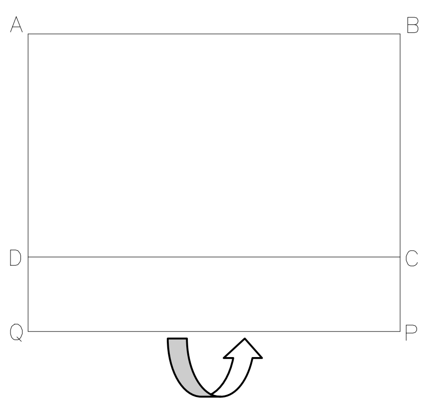


4. Faça uma dobradura levando o ponto C até o ponto G. Marque o ponto Q, pertencente a $\overline{AD}$, na interseção de $\overline{DC}$ com $\overline{AD}$. Desdobre.

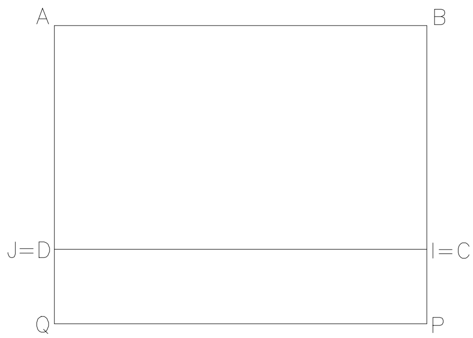


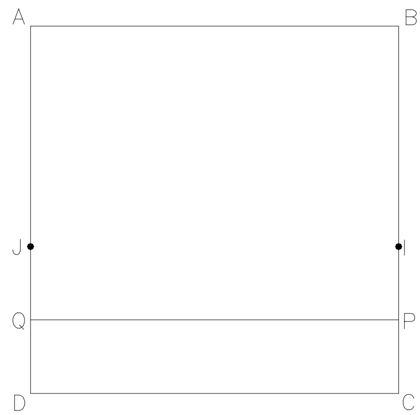


5. Faça uma dobradura passando pelos pontos P e Q ao mesmo tempo.

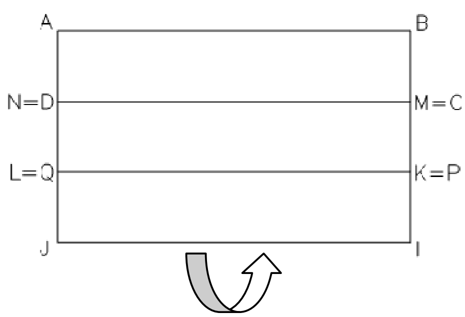


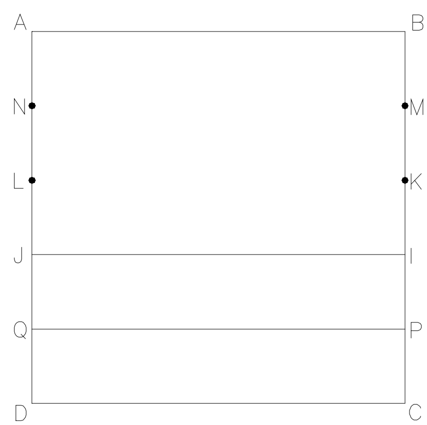
6. Marque o ponto I pertencente a $\overline{BC}$ na interseção do ponto C com $\overline{BP}$. Marque o ponto J pertencente a $\overline{AD}$ na interseção do ponto D com $\overline{AQ}$. Desdobre.



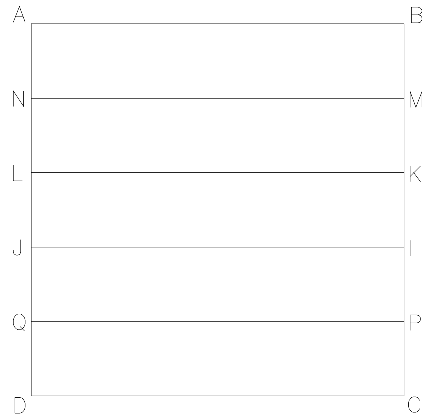


7. Faça uma dobradura sobre $\overline{IJ}$. Marque o ponto K pertencente a $\overline{BI}$ na interseção de P com $\overline{BI}$ Marque o ponto L pertencente a $\overline{AJ}$ na interseção de Q com $\overline{AJ}$. Marque o ponto M pertencente a $\overline{BI}$ na interseção de C com $\overline{BI}$. Marque o ponto N pertencente a $\overline{AJ}$ na interseção de D com $\overline{AJ}$. Desdobre.





8. Faça uma dobradura sobre $\overline{KL}$ e desdobre. Faça uma dobradura sobre $\overline{MN}$ e desdobre.



9. Resultado:
    1. Observe que os pontos N, L, J e Q dividem o segmento $\overline{AD}$ em 5 partes iguais, ocorrendo o mesmo com os pontos M, K, I e P e o segmento $\overline{BC}$.
    2. Observe que os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{KL}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{PQ}$ dividem o quadrado ABCD em 5 partes iguais.

Exercício: Divida um segmento em 10 partes iguais.

D. Divisão de um segmento em número ímpar de partes iguais

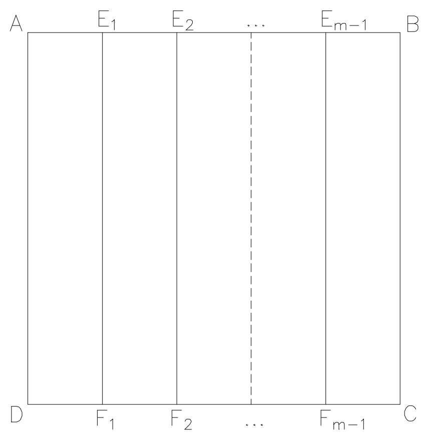
Como foi visto anteriormente, pode-se dividir um segmento em **n** partes iguais, n=2, 3, 5, e para potências de 2. A seguir, será construída a divisão do segmento em um número ímpar de partes iguais, isto é, n=2k-1, $k \in N$.

Dada uma folha quadrada, fixar nesta o lado horizontal e o lado vertical.

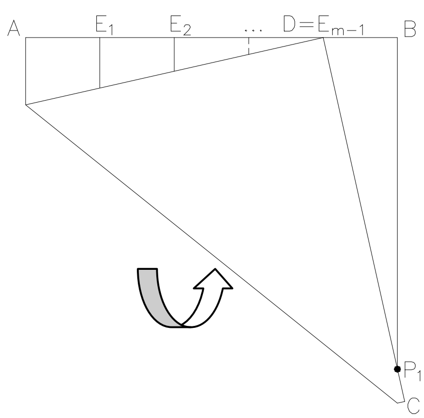
Para dividir o lado vertical $\overline{AD}$ (e, respectivamente, $\overline{BC}$) de um quadrado ABCD em **n** partes iguais, é necessário que o lado horizontal $\overline{AB}$ (e, respectivamente, $\overline{CD}$) esteja dividido em **m** partes iguais (m < n), segundo a tabela recursiva seguinte:

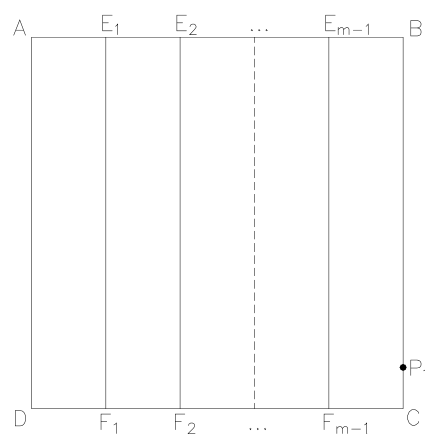
Divisão do lado horizontal da folha em **m** partes	Divisão do lado vertical da folha em **n** partes
2	3
3	5
4	7
5	9
...	...
k	2k-1

1. Suponha que é possível dividir o segmento $\overline{AB}$ (e, respectivamente, $\overline{CD}$) em **m** partes iguais (segundo a tabela acima):

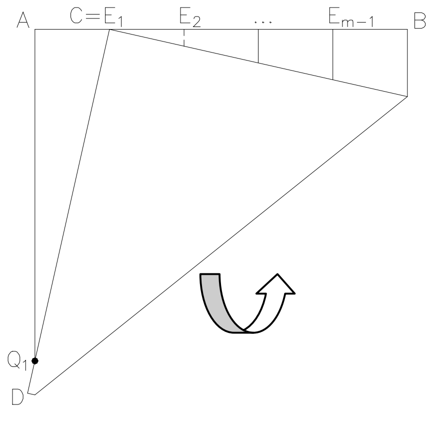


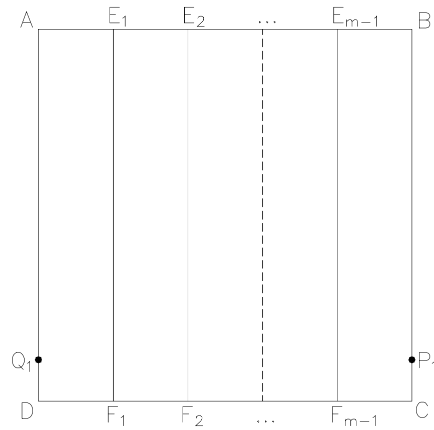
2. Faça uma dobradura levando o ponto D até o ponto E_{m-1}. Marque o ponto P_1, pertencente a $\overline{BC}$ na interseção de $\overline{DC}$ com $\overline{BC}$. Desdobre.



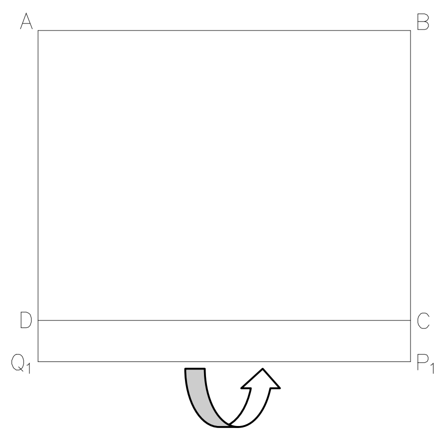


3. Faça uma dobradura levando o ponto C até o ponto E_1. Marque o ponto Q_1, pertencente a $\overline{AD}$ na interseção de $\overline{DC}$ com $\overline{AD}$. Desdobre.

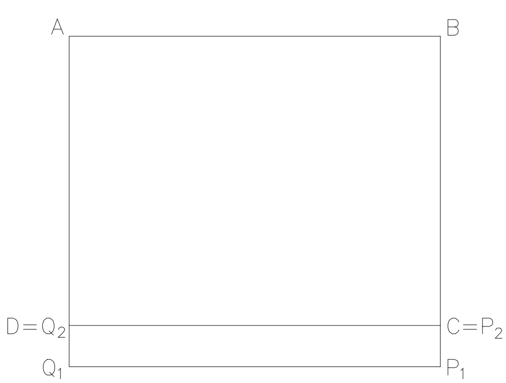


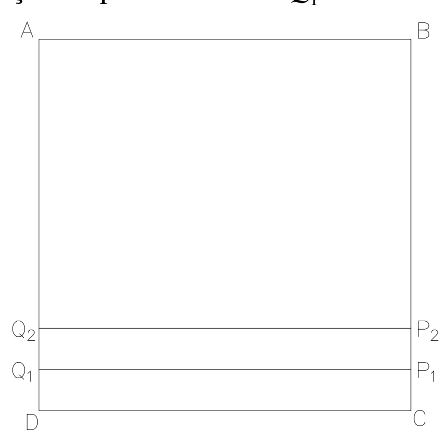


4. Faça uma dobradura passando pelos pontos P_1 e Q_1 ao mesmo tempo.

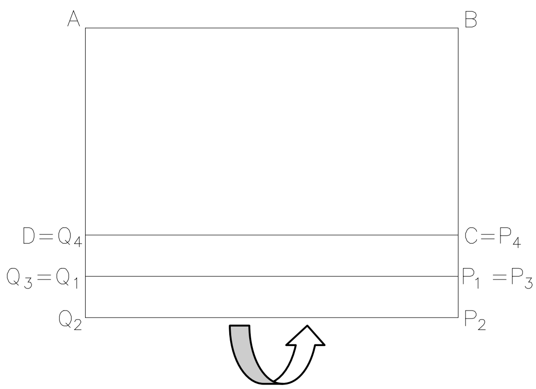


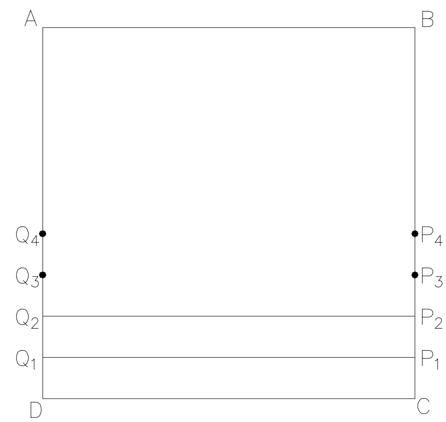
5. Marque o ponto P_2 pertencente a $\overline{BC}$ na interseção do ponto C com $\overline{BP_1}$. Marque o ponto Q_2 pertencente a $\overline{AD}$ na interseção do ponto D com $\overline{AQ_1}$. Desdobre.





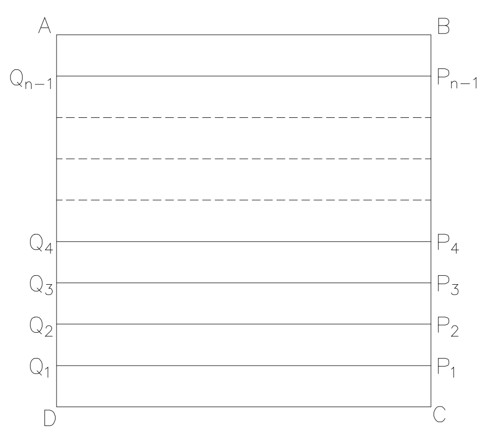
6. Faça uma dobradura sobre $\overline{P_2Q_2}$. Marque os pontos P_3 e P_4 na interseção de P_1 e C, respectivamente, com $\overline{BP_2}$. Marque os pontos Q_3 e Q_4 na interseção de Q_1 e D, respectivamente, com $\overline{AQ_2}$. Desdobre.





7. Repita o procedimento do item anterior com $\overline{P_3Q_3}$, $\overline{P_4Q_4}$, etc., até que sejam marcados P_{n-1} e Q_{n-1}.

8. Faça uma dobradura sobre cada um dos segmentos $\overline{P_iQ_i}$ que ainda não tiverem sido marcados e desdobre.



9. Resultado:
    1. Observe que os pontos P_1, P_2, ... , P_{n-1} dividem o segmento $\overline{BC}$ em n partes iguais, o mesmo acontece com os pontos Q_1, Q_2, ... , Q_{n-1} e o segmento $\overline{AD}$.
    2. Observe que os segmentos $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, ... , $\overline{P_{n-1}Q_{n-1}}$ dividem o quadrado ABCD em n partes iguais.

Exercício: Divida o segmento em n=2**k** partes iguais (por exemplo, n=12 e n=20).

Observações:

1. Com esse exercício, fica completa a divisão de um segmento em qualquer número de partes iguais.
2. Essa oficina fornece elementos para que se possa visualizar mentalmente a divisão de um segmento em um número qualquer de partes iguais, entretanto, se esse número for muito grande, o processo se torna inviável em termos práticos (no papel).

Oficina VI – Teorema de Pitágoras

Material: folha de papel quadrada, tesoura.

Objetivo: verificar o Teorema de Pitágoras.

Pré-requisitos: alguns conceitos de Geometria Plana: triângulo retângulo, quadrado, Teorema de Pitágoras.

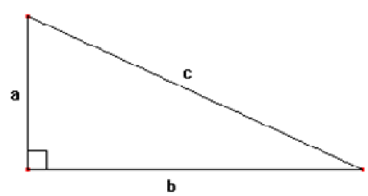
Procedimentos:

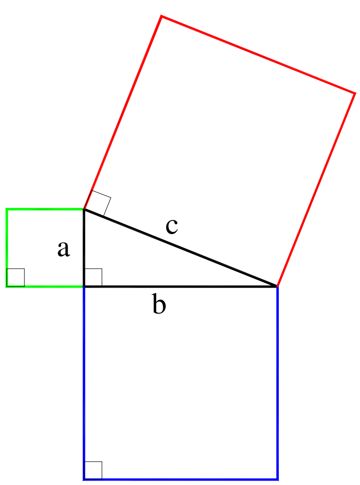
1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

Teorema de Pitágoras

Seja um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c. Então, tem-se que:

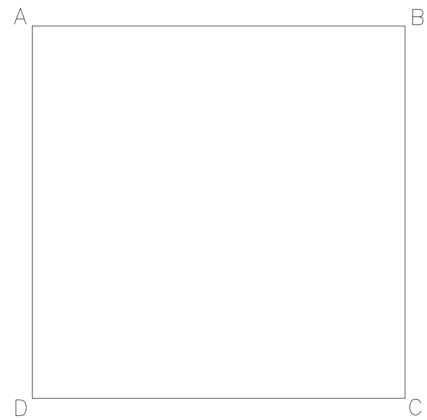
$$c^2 = a^2 + b^2$$



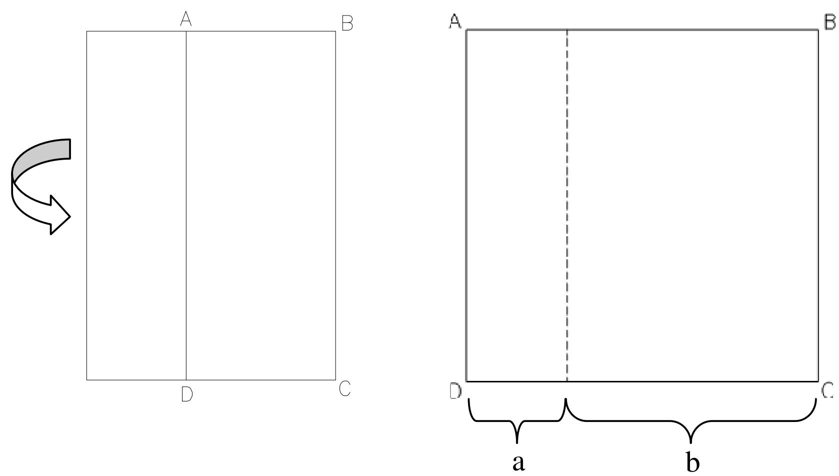


A soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (a e b) equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa (c).

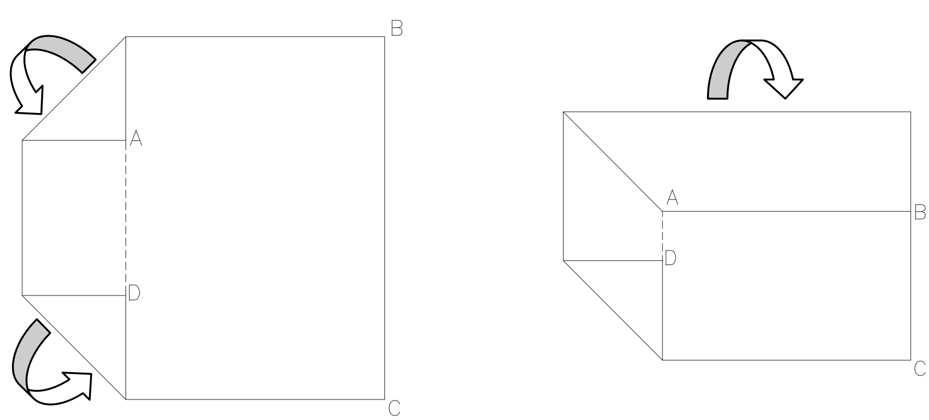
1. Considere que a folha seja um quadrado ABCD, de lado a+b.

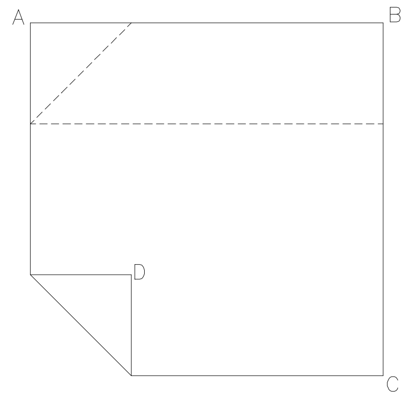


2. Faça uma dobradura paralela a um dos lados do quadrado. Desdobre.

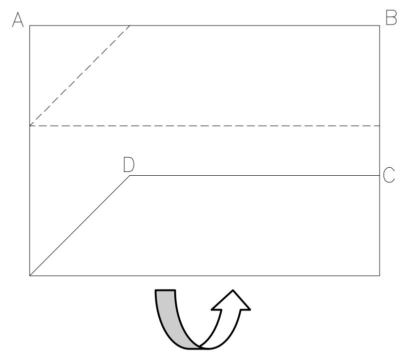


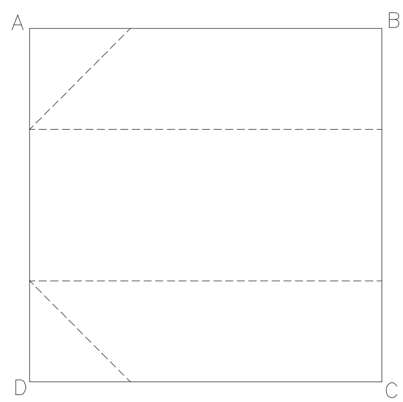
3. Faça as dobraduras indicadas abaixo. Desdobre.



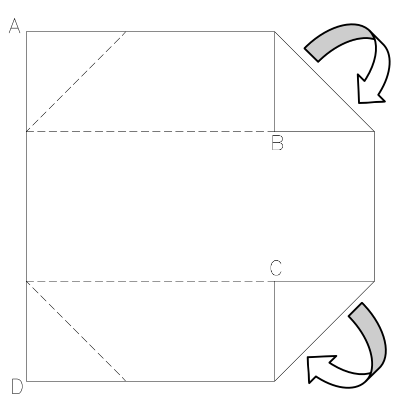


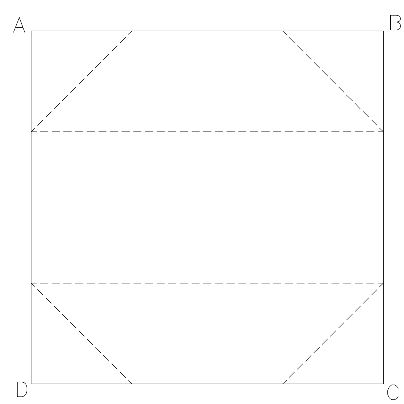
4. Faça a dobradura indicada abaixo. Desdobre.



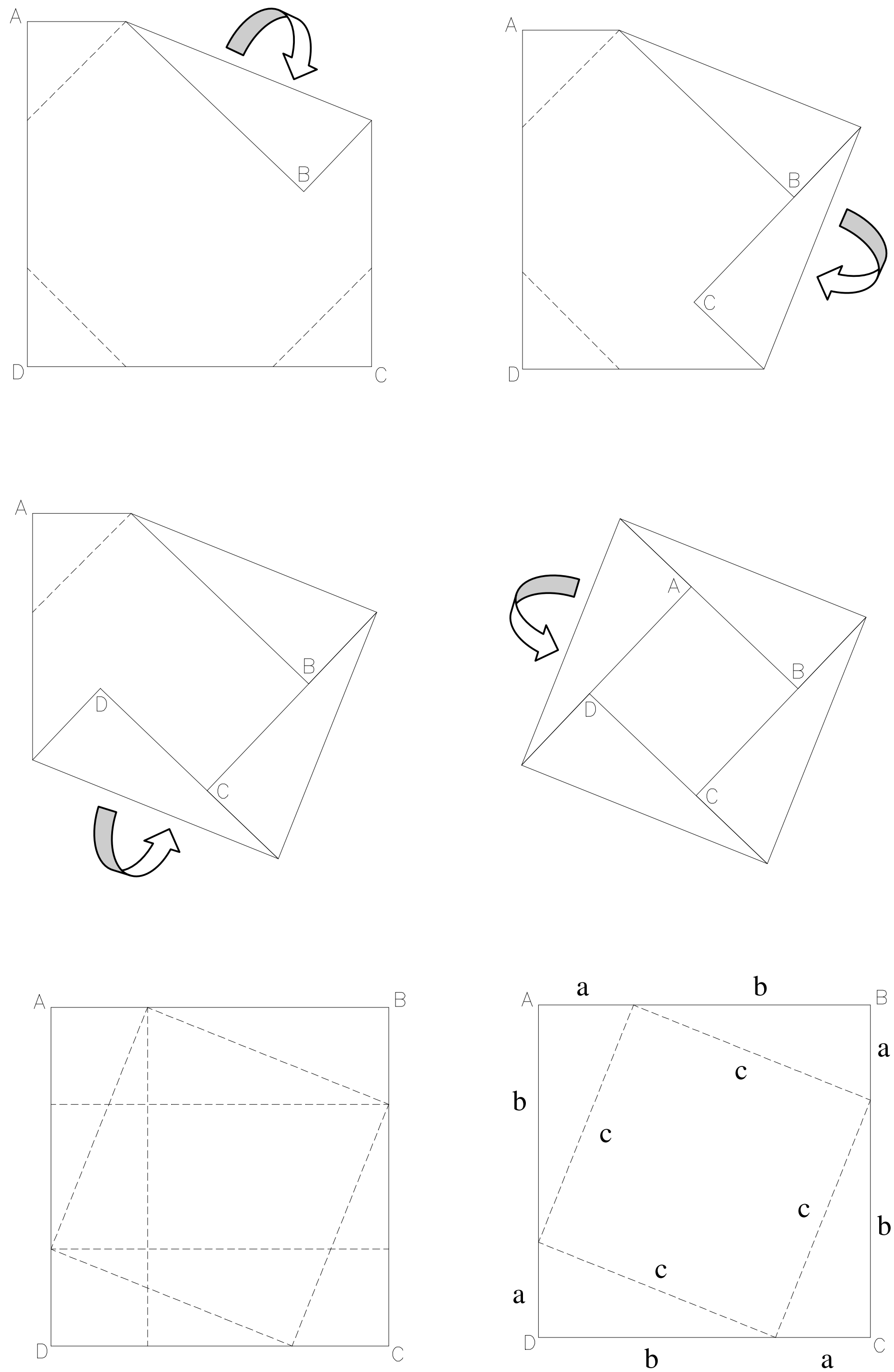


5. Faça as dobraduras indicadas abaixo. Desdobre.



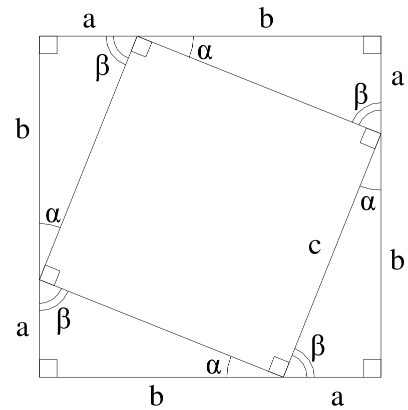


6. Faça as dobraduras indicadas abaixo. Desdobre.



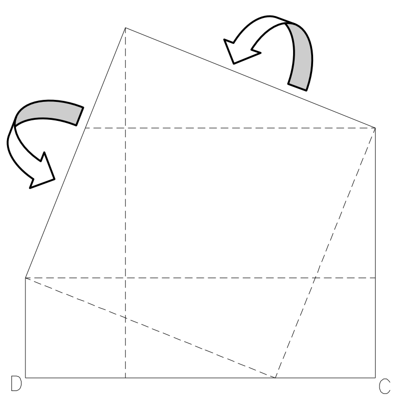
O quadrilátero inscrito é um quadrado (veja a figura acima).

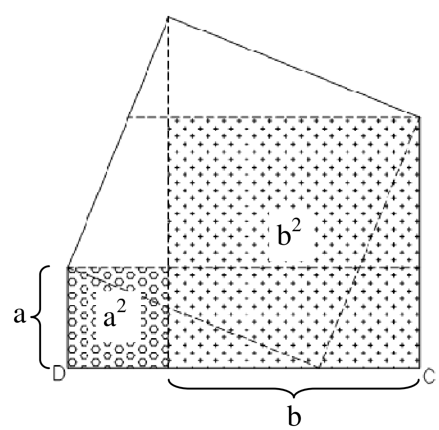
Verificação:



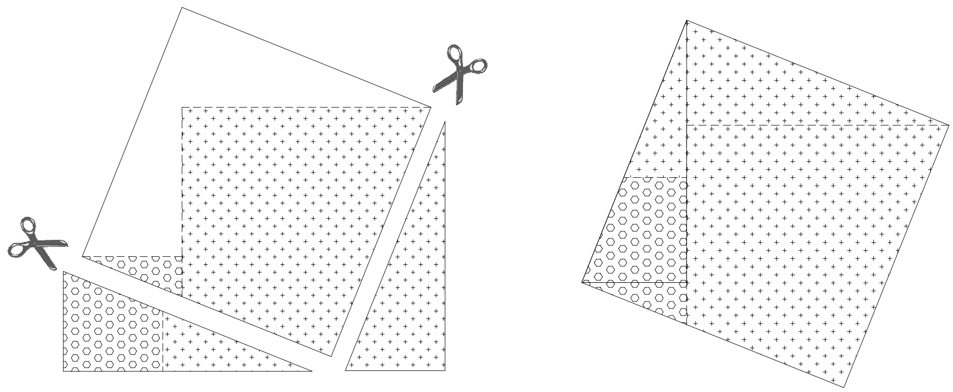
Observe que os triângulos retângulos da figura acima são congruentes (pois possuem catetos de mesma medida). A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida de um ângulo raso. Logo, α e β são complementares, visto que todo triângulo retângulo possui um ângulo reto. Sendo assim, a medida de um ângulo interno do quadrilátero inscrito é igual à medida de um ângulo reto, pois a soma desse ângulo com α e β é igual à medida de um ângulo raso. Portanto, o quadrilátero é um quadrado, pois possui quatro ângulos retos.

7. Faça as dobraduras e hachure as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, como indicado abaixo.





8. Utilizando uma tesoura, recorte os triângulos e os coloque nas áreas não-hachuradas, como nas figuras abaixo.



9. Resultado:
    1. As áreas hachuradas correspondem a a^2+b^2.
    2. Após recortar os dois triângulos retângulos, o quadrado restante possui área igual a c^2.
    3. Os dois triângulos retângulos preenchem a área não-hachurada do quadrado, logo, pode-se verificar que $c^2=a^2+b^2$ (o Teorema de Pitágoras).

Oficina VII - Trissecção de um Ângulo

Material: folha de papel quadrada.

Objetivos: verificar que é possível dividir um ângulo em três partes iguais utilizando dobraduras.

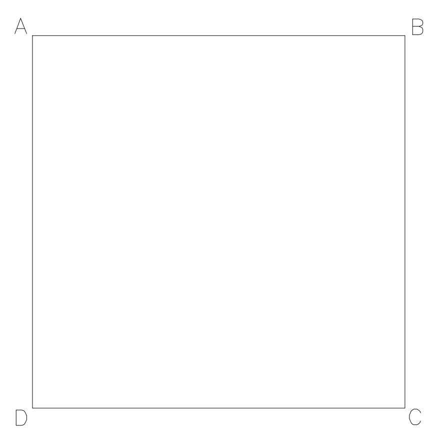
Pré-requisitos: alguns conceitos de Geometria Plana: ponto médio de segmento.

Procedimentos:

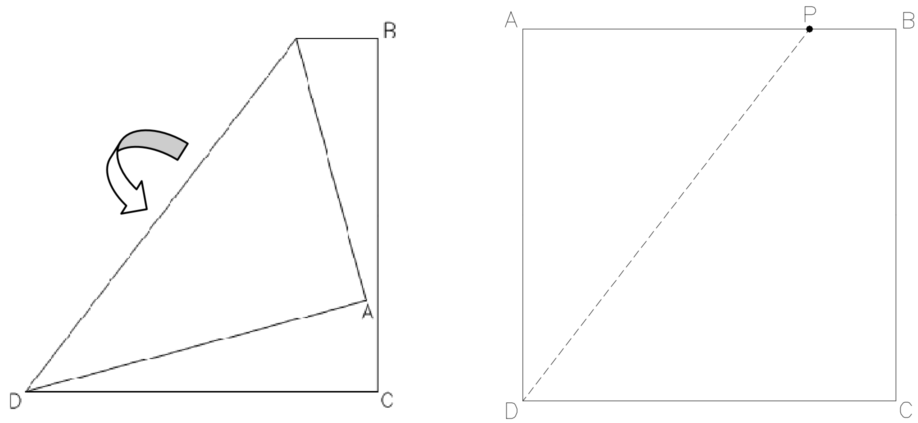
1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

Desenvolvimento da oficina

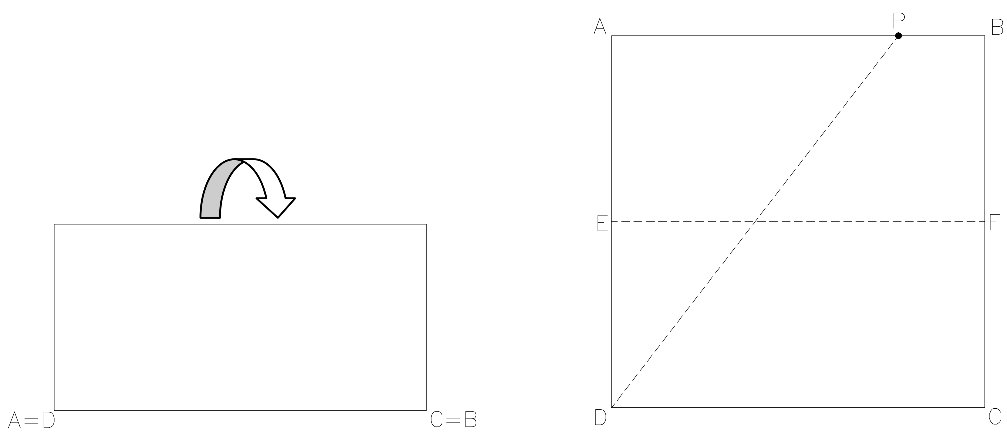
1. Considere que a folha seja um quadrado ABCD.



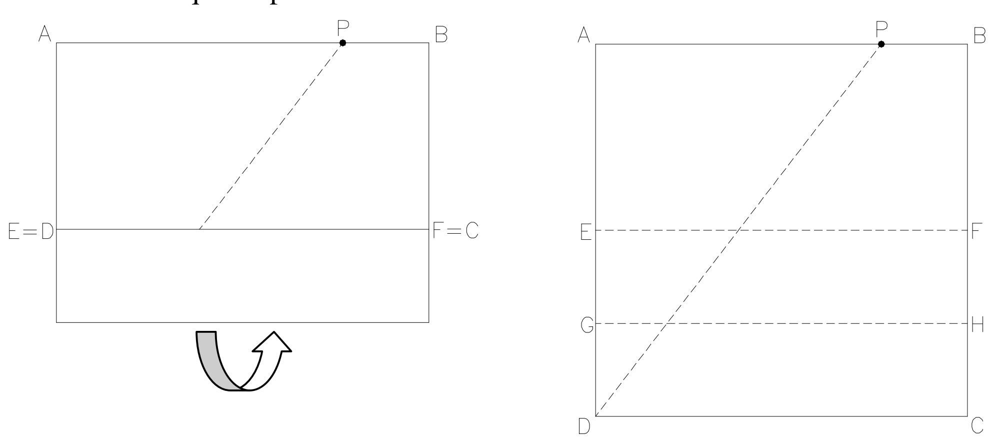
2. Faça uma dobradura passando pelo ponto D. Desdobre. Marque o ponto P na extremidade da dobradura.



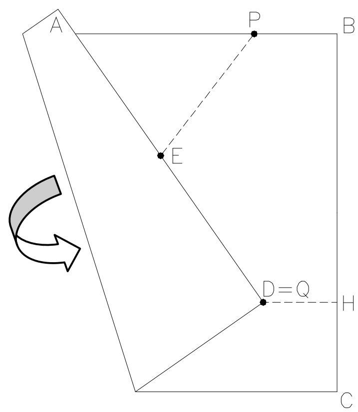
3. Faça uma dobradura, determinando os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Desdobre. Marque os pontos E e F nas extremidades da dobradura.



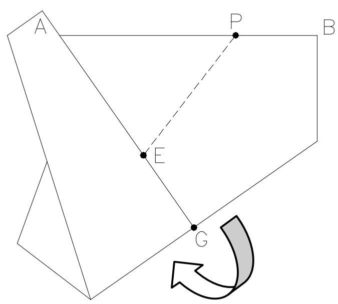
4. Faça uma dobradura, determinando os pontos médios de $\overline{ED}$ e $\overline{FC}$. Desdobre. Marque os pontos G e H nas extremidades da dobradura.

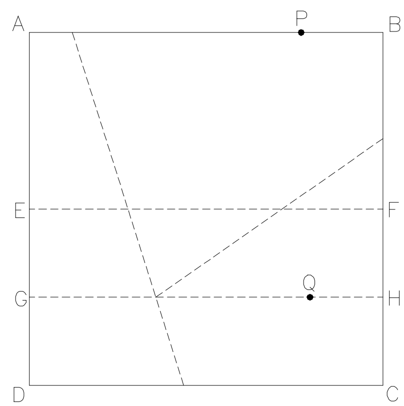


5. Faça uma dobradura levando o ponto D sobre o segmento $\overline{GH}$ e de tal maneira que o ponto E fique sobre o segmento $\overline{DP}$. Marque o ponto Q no encontro do ponto D com o segmento $\overline{GH}$.

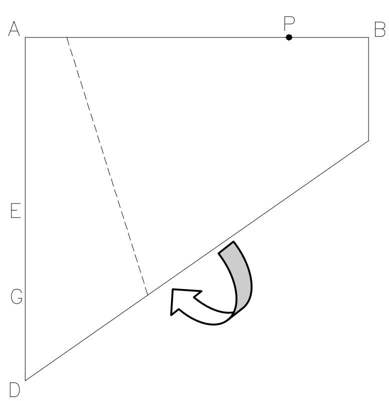


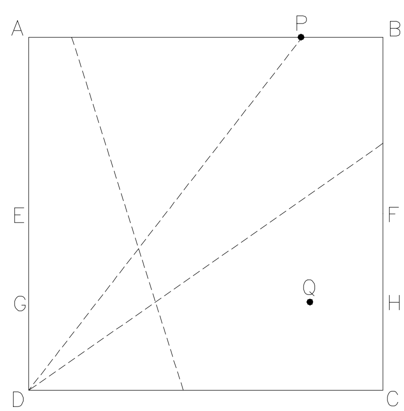
6. Prolongue a dobradura que passa pelo ponto G até o segmento $\overline{BC}$. Desdobre.



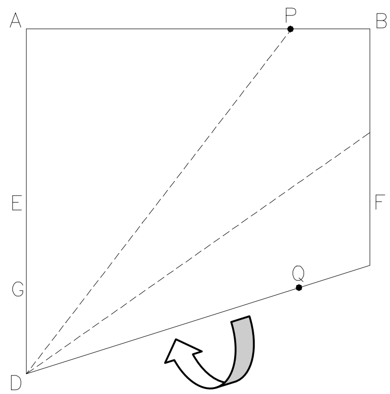


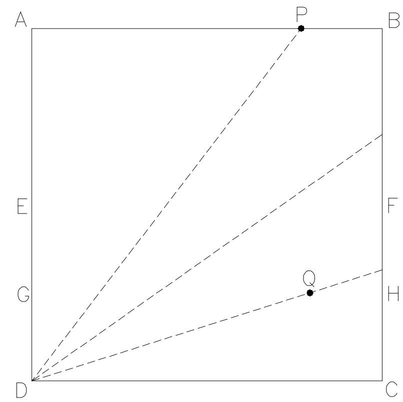
7. Prolongue a última dobradura até o ponto D. Desdobre.





8. Faça uma dobradura passando pelos pontos D e Q. Desdobre.





9. Resultado: Observe que o ângulo PDC foi dividido em 3 partes iguais.

Oficina VIII – Polígonos Regulares

Material: folha de papel quadrada.

Objetivos: construção de alguns polígonos regulares através de dobraduras.

Pré-requisitos: alguns conceitos de Geometria Plana: triângulo equilátero, ponto médio de segmento, bissetriz.

Procedimentos:

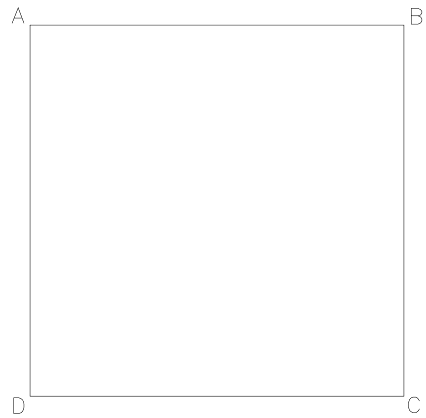
1. Distribuição do material aos alunos;
2. Orientar os alunos sobre as atividades que serão desenvolvidas durante esta oficina e os objetivos da mesma;
3. Realização da oficina;
4. Discussão sobre os conceitos trabalhados através das dobraduras.

Comentário: O triângulo equilátero corresponde ao primeiro polígono regular. Sua construção já foi vista na Oficina IV – Construção de Triângulos Especiais.

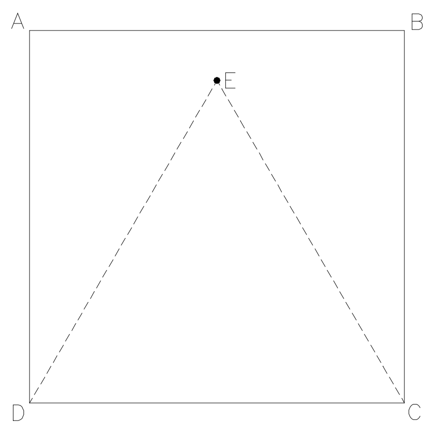
Exercício: Considere que a folha de papel seja um quadrado ABCD. Construa um triângulo equilátero cujo lado coincide com o lado da folha de papel.

A. Hexágono regular

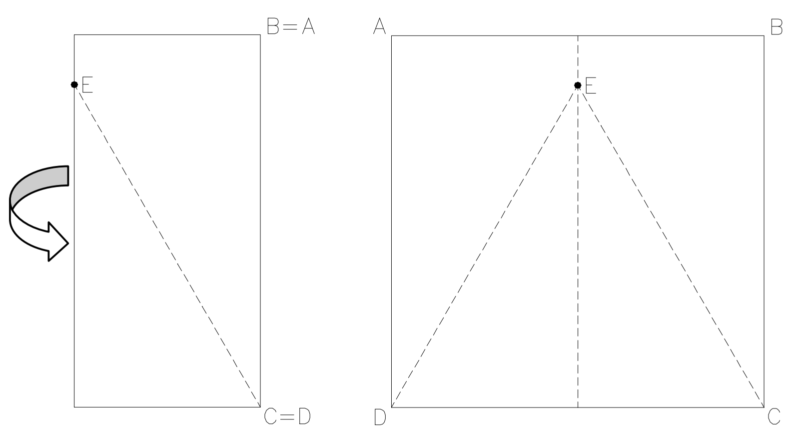
1. Considere que a folha de papel seja um quadrado ABCD.



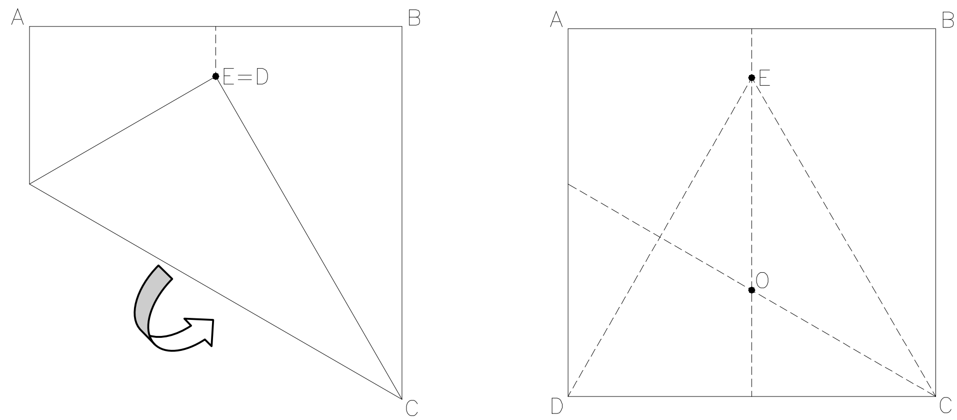
2. Construa um triângulo equilátero EDC.



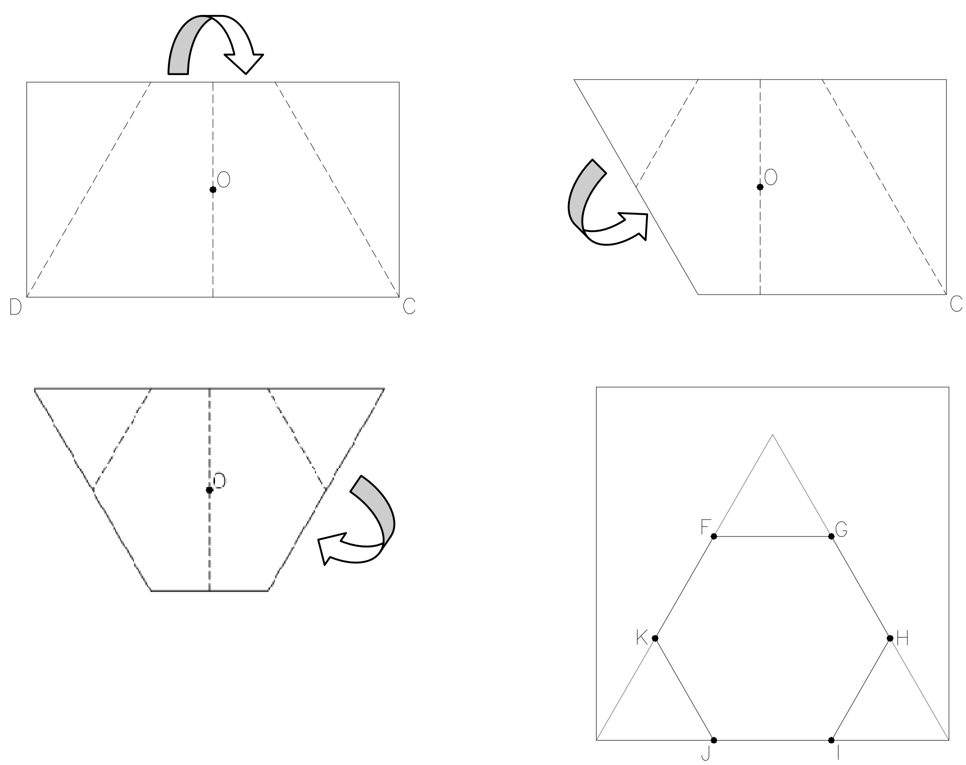
3. Faça uma dobradura levando $\overline{AD}$ sobre $\overline{BC}$. Desdobre.



4. Faça uma dobradura passando por C e levando o ponto D até o ponto E. Desdobre. Marque o ponto O na interseção dessas duas dobraduras.



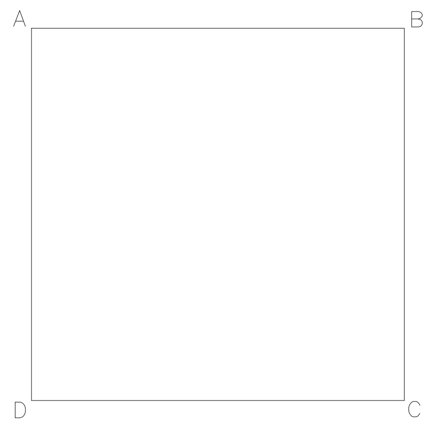
5. Dobre os vértices E, D e C do triângulo sobre o ponto O. Marque os pontos FGHIJK na interseção dessas dobraduras com os lados do triângulo EDC.



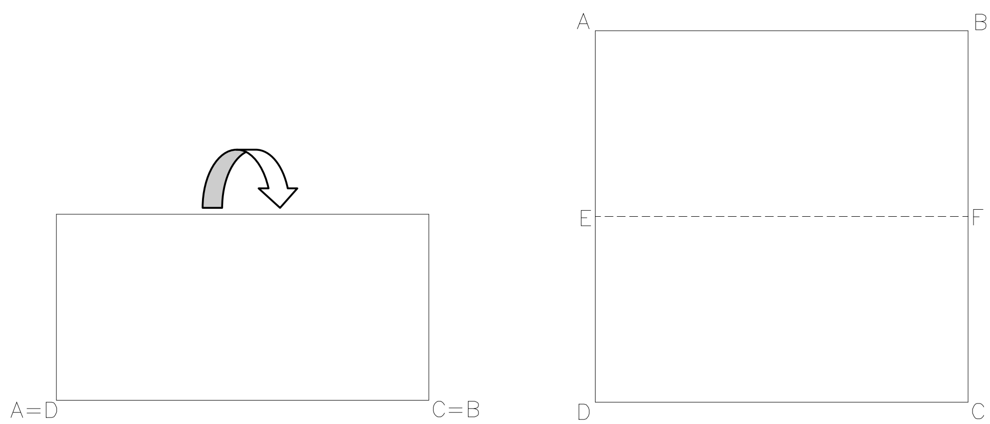
6. Resultado: Observe que os segmentos $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$ e $\overline{KF}$ perfazem um hexágono regular.

B. Pentágono regular

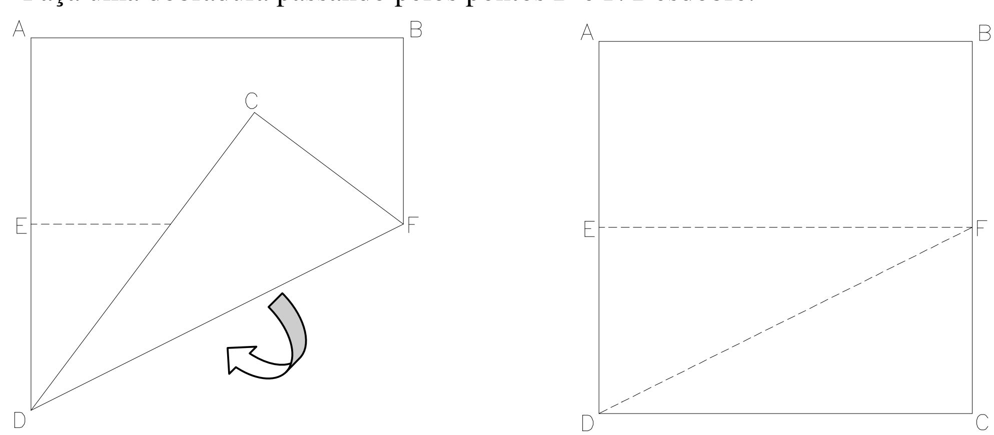
1. Considere que a folha seja um quadrado ABCD.



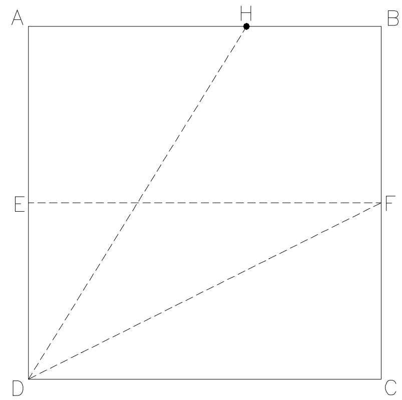
2. Faça uma dobradura, determinando os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Desdobre. Marque os pontos E e F nas extremidades da dobradura.



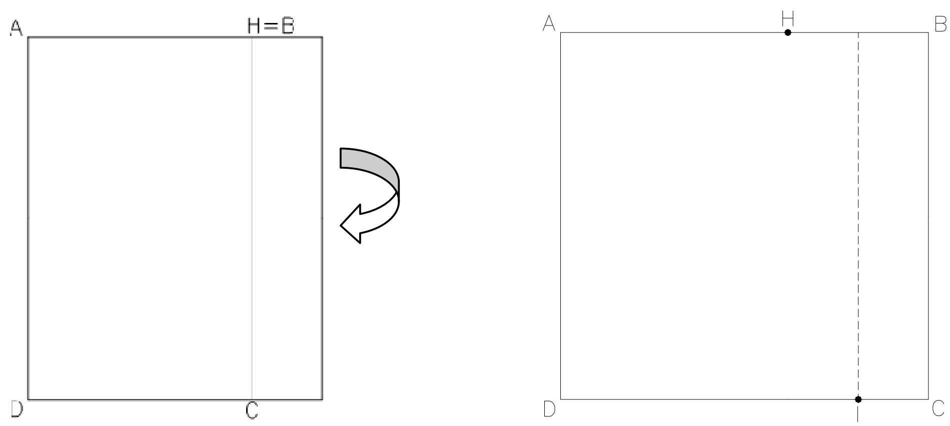
3. Faça uma dobradura passando pelos pontos D e F. Desdobre.



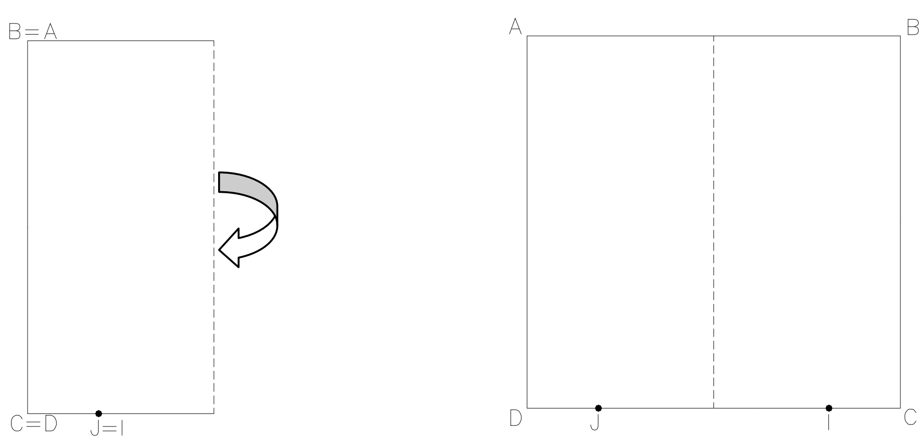
4. Faça a bissetriz do ângulo $A\widehat{D}F$. Marque o ponto H na interseção da bissetriz com $\overline{AB}$.



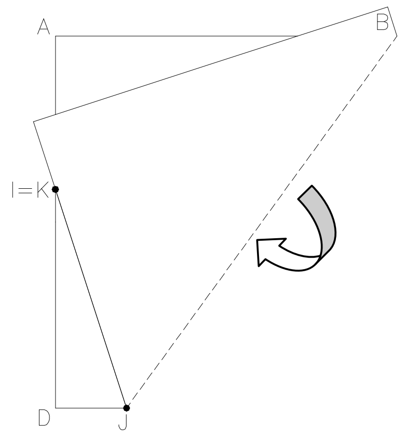
5. Faça uma dobradura levando B sobre H. Marque o ponto I na interseção da dobradura com $\overline{DC}$. Desdobre.

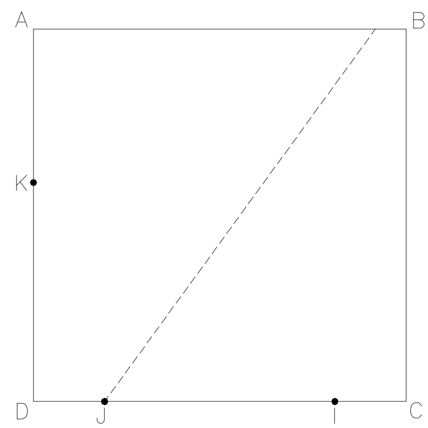


6. Faça uma dobradura levando $\overline{BC}$ sobre $\overline{AD}$. Marque o ponto J na interseção de I com $\overline{DC}$. Desdobre.

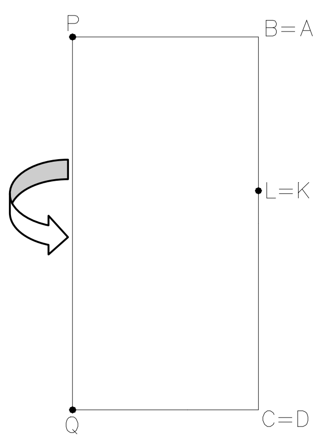


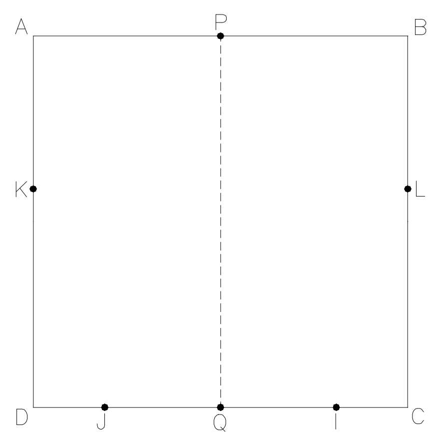
7. Faça uma dobradura levando I até $\overline{AD}$ de tal forma que a dobradura passe por J. Marque o ponto K na interseção de I com $\overline{AD}$. Desdobre.



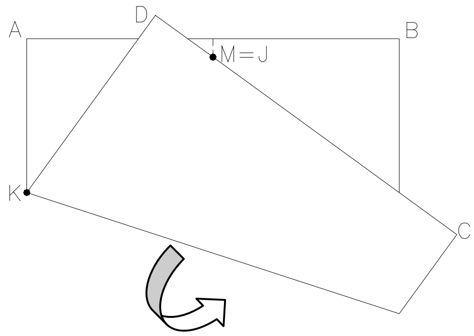


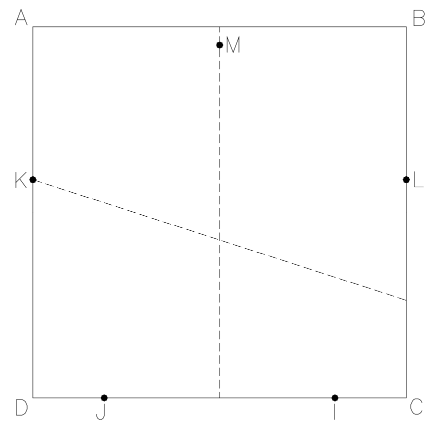
8. Faça uma dobradura levando $\overline{AD}$ sobre $\overline{BC}$. Marque o ponto L na interseção de K com $\overline{BC}$. Marque os pontos P e Q nas extremidades da dobradura. Desdobre.



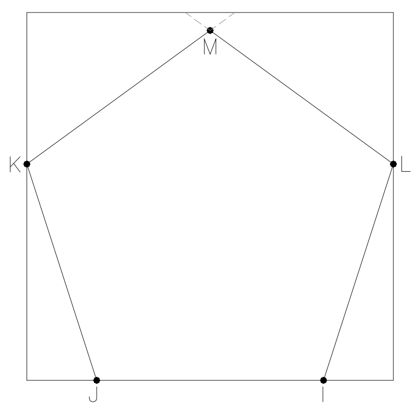


9. Faça uma dobradura levando J sobre $\overline{PQ}$ de tal forma que a dobradura passe por K. Marque o ponto M na interseção de J com $\overline{PQ}$. Desdobre.





10. Faça as dobraduras determinando os seguimentos $\overline{KM}$, $\overline{ML}$, $\overline{KJ}$ e $\overline{LI}$.



11. Resultado: Observe que os segmentos $\overline{KM}$, $\overline{ML}$, $\overline{LI}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{JK}$, formados pelas dobraduras, perfazem um pentágono regular.

Conclusão e Trabalhos Futuros

O Origami, arte milenar oriental, está muito difundido nos dias atuais, sendo reconhecido pelo descobrimento de novas possibilidades de aplicação, dentre elas a tecnologia e a pedagogia, sendo esta última o foco desse trabalho.

As oficinas desenvolvidas nessa monografia têm como intuito subsidiar o ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e complementando a teoria ministrada nas salas de aula.

Com a oficina de Dobraduras Básicas pode-se explorar os conceitos mais básicos da Geometria, permitindo um maior entendimento das várias propriedades envolvidas em cada um dos conceitos abordados.

As oficinas de Pontos Notáveis de um Triângulo têm como finalidade a verificação de conceitos relacionados a triângulos tornando a compreensão desse conteúdo mais fácil e dinâmica.

A oficina de Construção de Triângulos Especiais possibilita verificar alguns métodos de construção de triângulos aprimorando os conhecimentos sobre esses polígonos.

Na oficina de Divisão de Segmentos, tem-se a oportunidade de realizar procedimentos para a divisão de um segmento em **n** partes iguais, permitindo ao aluno a abstração do conceito e possibilitando a visualização mental do processo de divisão, para vários valores de **n**.

Dada a vasta aplicação do Teorema de Pitágoras, a oficina proposta com esse tema contribui para a visualização do conceito, permitindo uma maior compreensão do mesmo.

Com a oficina de Trissecção de um Ângulo, o aluno pode comprovar através da construção de dobraduras que um ângulo qualquer pode ser divido em três partes iguais.

Por último, tem-se a oficina de Polígonos Regulares a qual mostra a construção de um hexágono regular e de um pentágono regular, permitindo uma visão mais concreta sobre esse tópico da Geometria Plana.

Como sugestão de trabalho futuro, fica a aplicação dessas oficinas em salas de aula, com a finalidade de comprovar sua eficácia como material de apoio para aulas de Geometria do Ensino Fundamental e Médio.

Outra sugestão seria o uso da Informática para a confecção das dobraduras, através de softwares que permitam construir e visualizar as dobraduras.

Bibliografia

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIFUSÃO DO ORIGAMI. **A História do Origami**. Associação Brasileira de Difusão do Origami, 2005. Disponível em <http://www.abdo.kit.net/abdo/historia.html>. Acesso em 6 fev. 2010.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Aplicações de Origami com recortes como formas de ensino**. Universidade Federal de São Carlos, 2007. Trabalho de Graduação.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami**. Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos, 2009. Disponível em <http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>. Acesso em jul. 2009.

OFICINA de Dobraduras - Parte I. OBMEP, 2006. Disponível em <http://miltonborba.org/OBMEP/oficina_parte01.pdf>. Acesso em jul. 2009.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira de. **Origami: Matemática e Sentimento**. São Paulo, 2004.

SUZUKI, Soraya de Souza; MARQUES, Rafaella Camargo; PARRA, Danilo. **A Geometria do Origami**. Universidade Estadual de Campinas, 2006. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/origami.pdf>. Acesso em jul. 2009. Trabalho de Graduação.