**INTRODUÇÃO À LÓGICA**

**TEORIAS AXIOMÁTICAS DE 1a ORDEM**

# Iole de Freitas Druck

Os elementos constitutivos de uma teoria axiomática são:

1) Uma linguagem formal de primeira ordem (apropriada ao que se quer dizer);

2) Os axiomas (proposições que descrevem as "verdades" iniciais);

3) Os teoremas (proposições que descrevem as "verdades" logicamente decorrentes dos axiomas).

**I. LINGUAGEM FORMAL – SINTAXE**

Toda linguagem escrita é construída a partir de símbolos inicialmente fixados, com os quais se escreve sequências significativas: as palavras e as frases. No caso de português, italiano e demais línguas latinas ou anglo-saxônicas parte-se do alfabeto usual, já o russo é escrito com outro alfabeto enquanto que o chinês emprega ideogramas. Observe que espaço vazio, vírgula, parênteses, etc., também são recursos gráficos que intervêm na construção da escrita de uma linguagem, como fica evidente no uso de computadores. A descrição dos símbolos que a linguagem utiliza (e das regras de seu emprego correto) é do domínio da Sintaxe da linguagem. Passemos à descrição da Sintaxe do Cálculo de Predicados de 1a ordem. Nessa linguagem os seguintes tipos de símbolos são os empregados (dentro dos parênteses seguem explicações sobre eles ou sobre como devem ser lidos):

**A) Símbolos lógicos:**

**A1)** Símbolos de variáveis:  (qualquer letra minúscula, indexada ou não por números naturais)

**A2)** Conectivos lógicos:  (não),  (e),  (ou),  (se ... então, implica),  (se e só se, é equivalente a).

**A3)** Quantificadores:  (existe),  (para todo, qualquer).

**A4)** O predicado de igualdade: = (é igual a)

**B) Símbolos próprios da linguagem:**

**B1)** Símbolos de constante: Ci (i  I, onde I é um conjunto fixado previamente)

**B2)** Símbolos de predicados ou relacionais n-ários (nIN):  (jJ)

**B3)** Símbolos de funções n-árias (n  IN):  (k  K)

onde os conjuntos I, J e K dependem da linguagem particular que se quer descrever.

**C) Símbolos auxiliares:** , ... ( ) [ ] {}

Exemplos de linguagens apropriada a teorias axiomáticas particulares:

1) A linguagem das teorias algébricas de anéis ou corpos ordenados tem como símbolos próprios os seguintes:

duas constantes: 0, 1

um predicado binário: < (x < y)

duas funções binárias +, . (x + y e x.y)

duas funções unárias: - , -1 (-x e x-1)

2) A teoria dos conjuntos utiliza vários símbolos próprios. Veremos depois que a grande maioria dos símbolos pode ser definida a partir do símbolo , mas agora vamos listá-los todos aqui, classificando-os:

Constantes: , IN

Predicados: , ,  (todos binários)

Funções: , , + , \ (binárias: + é união disjunta, \ é complemento relativo)

~ ,  (unárias: ~ é complemento e  é partes).

Uma linguagem é utilizada para expressar ideias, significados. As palavras são os arranjos de símbolos significativos mais simples e que servem para indicar um objeto, uma qualidade, um sentimento, uma ação ou estado, enfim uma ideia unitária, não uma relação entre várias ideias. Para relacionar ideias são empregadas as frases, ou seja, arranjos de palavras que servem para fazer afirmações sobre algo: sem um verbo não se constrói uma afirmação - é preciso minimamente um sujeito e um predicado para construir-se uma afirmação que faça algum sentido, uma frase.

A sintaxe de uma linguagem é o conjunto de regras que determinam o que são suas frases bem construídas ou consideradas linguisticamente corretas.

Nem todo tipo de palavra da linguagem comum interessa para uma linguagem formal que se propõem a expressar fatos matemáticos. Por exemplo: bonito, saudade, impressão - palavras que exprimem qualidades, que indicam sentimentos ou sensações, entre outras, não são relevantes para escrever matemática. Uma linguagem formal utiliza palavras que representam, indicam ou denotam objetos (substantivos), alguns verbos (consubstanciados nos símbolos de predicados e no =) e algumas palavras que servem para indicar/denotar operações lógicas entre afirmações expressas nessa linguagem (que são os conectivos lógicos e os quantificadores).

Passemos agora à descrição, dentro da Sintaxe das linguagens formais de 1a ordem, das regras de utilização correta dos símbolos. Primeiramente diremos quais são as sequências de símbolos da linguagem formal que nos permitem formar palavras que denotam objetos que, neste contexto, são chamadas de termos. A seguir definiremos como são as regras de composição de termos, dos conectivos e dos quantificadores (todas as “palavras” da linguagem formal) para formar corretamente as frases ou afirmações escritas nessa linguagem – chamadas de fórmulas nesse contexto.

**D) Termos** (palavras que indicam ou denotam objetos) – Definição indutiva:

**D1)** Toda variável é um termo; (de comprimento 1)

**D2)** Toda constante da linguagem é um termo; (de comprimento 1)

**D3)** Se f(,...,) é um símbolo de função n-ária e t1,..., tn são termos da linguagem, então f(t1,...,tn) é um termo da linguagem; (de comprimento igual à soma dos comprimentos dos termos envolvidos +1)

**D4)** Só se constrói um termo da linguagem pela aplicação sucessiva e num número finito de vezes das cláusulas D1), D2) e D3) (em qualquer ordem).

Exemplos:

1) Os seguintes são termos da linguagem das teorias algébricas (verifique a aplicação das cláusulas acima, diga quais e quantas vezes foram aplicadas e determine os comprimentos dos termos). Observe que cada um denota algum objeto, mas que, para dizer qual é esse objeto, necessitamos saber o contexto que está sendo considerado. Assim o objeto denotado em a), por exemplo, será diferente se estivermos realizando as operações usuais com racionais, com inteiros módulo 3 ou com matrizes (não?, quais seriam eles nesses três casos?).

a) (1+1)-1 + (-1)

b) (0.1).(-1+1)

c) - [(x-1.x) + (1.y)]

2) Os seguintes são termos da linguagem da Teoria dos Conjuntos:

a) ()

b) x  (y  z)

c) [(~)  ]

Vocês talvez tenham observado que alguns termos indicam ou denotam um objeto preciso (uma vez fornecido um contexto) e outros não, indicam um objeto indeterminado (que ficaria determinado se atribuíssemos valores determinados às variáveis, além de um contexto).

**Definição**: Termos que não têm ocorrência de variáveis são chamados de termos fechados, os demais são chamados de termos abertos.

**Exercício 1**: Dê dois exemplos (distintos dos anteriores) de termos fechados e dois exemplos de termos abertos em cada uma das linguagens formais citadas nos exemplos da página 2. Forneça pelo menos duas interpretações aos termos fechados, em contextos distintos. Justifique suas respostas utilizando as definições dadas antes.

A seguir é preciso descrever as sequências de símbolos da linguagem formal que constituem as frases, as afirmações com significado da linguagem. Já foi dito que os verbos estão presentes nos símbolos de predicado e no =. Assim, por exemplo, o símbolo < é lido "é menor do que", = se lê "é igual a",  significa "pertence a" e  significa "está contido em". Ou seja, os símbolos de predicado não são verbos propriamente, mas sempre contêm algum verbo que diz (predica) algo sobre uma, duas ou mais coisas, estabelece uma propriedade para certos elementos do discurso ou uma relação entre mais de um deles. Assim, o símbolo < sozinho não é uma afirmação completa. Mas 1 < 0, sim, é uma afirmação acabada, (no caso, falsa entre os nos reais). Também x < 0 é uma afirmação, apesar de não ser possível dizer se ela é falsa ou verdadeira se não soubermos a que contexto se está referindo e quem x representa. Os predicados de uma linguagem determinam as propriedades ou relações das quais a linguagem é capaz de falar. Numa linguagem formal, as frases são chamadas de fórmulas.

**E)** **Fórmulas** (afirmações sintaticamente corretas na linguagem formal) – Definição:

**E1)** Se P(,...,) é um símbolo de predicado n-ário e t1,...,tn são termos da linguagem, então P(t1,...,tn) é uma fórmula; t1 = t2 também é uma fórmula;

**E2)** Se  e  são fórmulas, então as seguintes expressões também são fórmulas, onde x é variável:

   ( e , chamada de conjunção de  e );

   ( ou chamada de disjunção de  e );

   (se  então  chamada de implicação de  em );

   ( se e se só se , chamada de equivalência entre  e );

  (não , chamada de negação de );

 (x) (para todo x vale chamada de generalização de fórmula universal);

 (x)  (existe x tal que vale para esse x, é chamada fórmula existencial);

**E3)** Só se obtém uma fórmula da linguagem pela aplicação sucessiva e num número finito de vezes, das cláusulas E1) e E2) (em qualquer ordem).

**Definições**:

**1)** As fórmulas do tipo descrito em E1) são as afirmações mais simples que se pode fazer numa linguagem. São chamadas de fórmulas atômicas. Dizemos que elas possuem comprimento igual a 1 (porque incluem apenas um símbolo de predicado).

**2)** As fórmulasdescritas em E2) são ditas compostas. Seus comprimentos são definidos indutivamente, sendo iguais à soma dos comprimentos dos comprimentos da(s) fórmula(s) que as compõe ( ou  e ) +1 (intuitivamente, o comprimento de uma fórmula indica a quantidade de símbolos de predicado e de símbolos lógicos presentes na fórmula – será tanto maior quanto for mais complexa a afirmação que a fórmula representa).

**3)** Nas fórmulas do tipo (x) e (x) diz-se que as ocorrências da variável x na fórmula são ligadas ou não livres. Assim, por exemplo, ao dizermos (x) (x = 1) e (x)(x = 1) estamos fazendo afirmações acabadas, o x que ocorre nelas não é “aberto” a assumir valores distintos, não estamos "deixando" o x variar livremente. O x nessas afirmações é um mero recurso linguístico para dizermos algo a respeito do universo do discurso. Na primeira afirma-se: “o (‘número’) 1 está no universo”. Na segunda, o que se diz é: “o universo só tem o (‘número’) 1 como elemento”. Fixado um universo, essas afirmações têm um único valor de verdade, por exemplo, a 1a é verdadeira e a 2a falsa entre os nos reais. Observe-se que pode haver ocorrências livres e ligadas de uma mesma variável em uma fórmula, como por exemplo, em (x) (x = 1) x = 1) (por quê?), sendo necessário prestar bem atenção ao emprego dos parênteses na fórmula.

**4)** Fórmulas nas quais as variáveis só têm ocorrências ligadas são chamadas de fórmulas fechadas ou sentenças. Fórmulas onde existe alguma ocorrência livre de variável (ocorrência de variável sem estar no escopo de um dos quantificadores – sem ser abrangida por quantificador) são chamadas de fórmulas abertas.

**Exemplos**:

1) Na linguagem das teorias algébricas vista antes:

a) (x)(y)[x + y = 0]

b) (x)((x = 0)  (y)(x.y = 1))

c) (z)(x < y  z.x < z.y)

d) ((x = 0))  (x)(y)(x.y = 1)

2) Na teoria dos conjuntos:

a) x  (y  z) = (x  y)  (x  z)

b) (x)(x    (y) (x  y)

c) ((~()   = )  (x)(x = )

d) (x)(x    x  y)

**Exercício 2**: Justifique suas soluções utilizando as definições dadas.

a) Quais das fórmulas acima são abertas e quais são fechadas?

b) Invente mais duas fórmulas para cada uma das linguagens citadas, uma aberta e uma fechada.

c) Invente uma sequência de símbolos em cada uma das linguagens citadas que não seja uma fórmula. Justifique.

d) Determine os comprimentos das fórmulas dos exemplos 1 e 2 e das fórmulas inventadas no exercício 2b.

**Exercício 3**:

a) Imagine que queiramos estabelecer uma “teoria formal de relações familiares” (pensando no universo dos seres humanos), com linguagem formal adequada para referir-se a: casais, filhos, pais, netos, primos, irmãos e tios. Não necessitando de fazer referência a uma pessoa específica, não necessitaremos de constantes na nossa linguagem. Seguramente deveremos ter alguns símbolos de predicados e funcionais. Convencionamos a seguir os símbolos para uma linguagem formal adequada a isso.

Predicados unários: *H*(x) – leia-se “x é homem”;

*M*(x) – leia-se “x é mulher”;

Predicados binários: *C*(x,y) – leia-se “x é casado(a) com y”;

*F*(x,y) – leia-se “x é filho(a) de y”;

*I*(x,y) – leia-se “x é irmã(o) de y”;

*N*(x,y) – leia-se “x é neto(a) de y”;

*T*(x,y) – leia-se “x é tio(a) de y”;

*P*(x,y) – leia-se “x é primo(a) de y”;

Predicado ternário: *FC*(x,y,z) – leia-se “x é filho(a) de y e de z”;

Símbolos funcionais unários: *p*(x) – leia-se “o pai de x”;

*m*(x) – leia-se “a mãe de x”.

1. Traduza as seguintes fórmulas num português compreensível a qualquer pessoa.

1. (x)[(y)(z)(*F*(x,y)  *F*(y,z))  *N*(x,z)]
2. (u)(v){xyz[*H*(x)*M*(y)*I*(y,z)*C*(x,y)*C*(x,z)*FC*(u,x,y)*FC*(v,x,z)]  [*I*(u,v)*P*(u,v) (x = *p*(u)) *T*(x,u)]}

b) Invente duas afirmações (tanto faz se verdadeiras ou falsas) dentro da “teoria formal de relações familiares” e registre-as tanto em português corrente como na “linguagem formal” definida acima. Especifique, justificando, se são abertas ou fechadas.

**II LINGUAGEM FORMAL – SEMÂNTICA**

**F) Sobre a verdade ou falsidade das fórmulas**

Fizemos antes a descrição sintática de como obter as fórmulas, ou seja, as afirmações corretamente escritas em uma linguagem formal. Faremos agora uma descrição de como devem ser elas interpretadas, ou seja, como se atribui a cada fórmula um significado que nos permita avaliar se são verdadeiras ou falsas, em um contexto dado, que chamaremos de universo do discurso. A abordagem aqui adotada é uma introdução intuitiva à Semântica das linguagens formais de 1a ordem. A abordagem rigorosa de tal semântica é do domínio da Teoria de Modelos para tais linguagens, que não trataremos nesse texto introdutório.

Iniciemos com considerações sobre as fórmulas mais simples da linguagem - as fórmulas atômicas. Essas enunciam propriedades de, ou relações básicas entre objetos do universo do discurso de uma dada teoria axiomática, sendo seu significado imediato, intuitivo ou indicado por axiomas, uma vez conhecida a interpretação dada às constantes, aos símbolos funcionais e aos predicados que ela utilize. Podemos assim decidir sobre sua verdade ou falsidade, sempre que seja conhecido o contexto a que se referem e a forma de interpretar os símbolos próprios da teoria nesse contexto.

**Exemplos:** a) 0 = 1 é uma fórmula falsa no Universo dos números naturais, segundo a interpretação usual das duas constantes utilizadas.

b) é uma fórmula verdadeira para conjuntos, pela interpretação usualmente atribuída a esses símbolos.

No caso das fórmulas compostas, nem sempre é intuitivo perceber o seu significado e, consequentemente, sua validade. A seguir consideraremos as fórmulas dos tipos: P, P  Q, P  Q, P  Q, P  Q, chamadas, respectivamente, de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência. Os valores verdade de tais fórmulas – chamadas de proposições – são relativamente simples de serem definidos, por representarem elas afirmações que relacionam (conectam) suas sub fórmulas apenas por meio dos conectivos lógicos, mesmo se suas componentes contenham quantificadores. Exemplo disso é a fórmula: (x)(x = 0)  (x)(x = 0), que é uma verdade lógica escrita na linguagem das teorias algébricas. Tais fórmulas são chamadas de proposições e estudo de suas sintaxe e semântica é chamado na literatura lógica de Cálculo Proposicional, onde os valores verdade das proposições são determinados pelas tabelas de verdade, para cada tipo de fórmula, a partir das possíveis combinações de valores verdade das suas componentes (como já explicitado na outra apostila distribuída em sala anteriormente).

Na semântica do da Linguagem Formal descrita no início (chamada de Cálculo de Predicados) intervém ainda a atribuição de valores verdades às fórmulas atômicas (igualdades entre termos e símbolos de predicados aplicados a termos) e às fórmulas que se iniciam por quantificadores.

Quanto às fórmulas atômicas, seus valores verdade dependem das interpretações dadas aos símbolos de predicados, aos símbolos funcionais e às constantes (e, portanto também aos termos) em cada universo de discurso de uma linguagem formal ou modelo de uma teoria axiomática.

**Exemplos**:

- (1 + 1) = 0 é verdadeira nos inteiro módulo 2 e é falsa nos conjunto das matrizes quadradas 2x2, com a adição e os neutros usuais destes Universos.

- (x + x = 1) não tem um valor verdade definido num dado Universo. Quando precedida de (x) essa fórmula fica verdadeira no Universo dos números inteiros módulo 3 e também no dos racionais, mas torna-se falsa no Universo dos números inteiros, segundo as interpretações usuais para adição e para o 1 nestes contextos. Precedida de (x) essa fórmula fica falsa em qualquer dos 3 universos citados.

Falta, porém examinar com precisão o significado e o valor de verdade das fórmulas que são iniciadas com os quantificadores  e . Essas fórmulas representam “afirmações” particulares (ou ainda existenciais) ou universais, respectivamente, sobre os elementos de algum universo de discurso. Ora, os contextos podem incluir quantidades finitas ou infinitas de objetos ou de referentes. No caso de um universo finito, com **n** elementos, afirmar que existe algum elemento satisfazendo uma propriedade é equivalente a dizer que a propriedade é satisfeita pelo primeiro **ou** pelo segundo, **ou** ...., **ou** pelo enésimo elemento. (Por quê?). Já afirmar que a propriedade vale para todos os **n** é o mesmo que dizer que vale para o primeiro **e** para o segundo **e** .... **e** para o enésimo elemento (não é mesmo?). Assim podemos considerar que o  é um generalizado e o é umgeneralizado. No entanto não será sempre possível aferir a validade destes tipos de fórmulas (existenciais ou universais) pelo simples uso de tabelas de verdades, pois poderíamos necessitar de uma infinidade de colunas: uma para cada elemento de um universo de discurso que contenha uma infinidade de objetos. Será necessário observar mais de perto todos os possíveis significados atribuíveis às fórmulas. Em algum universo ou contexto uma fórmula pode ser verdadeira, mas em outros não. Assim, em geral, tais fórmulas não podem ser consideradas válidas, ou verdadeiras em qualquer Universo. Concretizemos este último comentário com um exemplo.

**Exemplo:** Considere a seguinte fórmula P(x), escrita na linguagem das teorias algébricas: P(x)  [ (1 + 1)-1 . x = 1 ]

A fórmula (x) P(x) será verdadeira no universo dos números racionais e nos inteiros módulo 3, mas será falsa no conjunto dos números inteiros e nos inteiros módulo 4, com as interpretações usuais para as operações (Por quê?). Por esse motivo dizemos que a fórmula (x) [ (1 + 1)-1 . x = 1 ] não é válida (ou que não é universalmente verdadeira), nesse caso ela é dita contingente, por valer em algum universo e não em não valer em outro.

Desde o início dessa seção estamos admitindo que saibamos identificar, dada uma interpretação para os símbolos de predicados (que indicam propriedades de objetos de um determinado discurso ou relações entre eles), quando fórmulas atômicas fechadas são verdadeiras ou falsas em um determinado contexto (como foi o caso do exemplo dado logo acima para uma igualdade entre dois termos da linguagem algébrica). Vimos, na definição 1, como verificar a validade de fórmulas cuja “afirmação mais abrangente” é dada por um conectivo lógico. Vamos agora prosseguir definindo por indução sobre o comprimento de fórmulas compostas, não apenas por meio de conectivos lógicos. Observe que também é possível definir por indução sobre o comprimento de proposições os seus valores verdade. Utilizando as tabelas de verdade podemos sempre inferir a verdade ou falsidade de uma proposição a partir de um conhecimento prévio sobre a verdade ou falsidade de suas fórmulas componentes, que possuem comprimento menor do que a proposição inicialmente considerada. Afinal é assim que podemos aferir sobre a verdade ou falsidade de uma fórmula utilizando tabelas de verdade, não é mesmo? Assim, partindo de uma intuição, de uma interpretação previamente fornecida para os símbolos não lógicos em um dado universo, ou seja, da possibilidade de reconhecimento da verdade ou falsidade das fórmulas mais simples – as atômicas (de comprimento 1), podemos decidir sobre a verdade ou falsidade de uma fórmula composta por meio das tabelas de verdade ou do emprego da definição 2 a seguir. As duas definições juntas nos permitirão tomar decisões sobre a verdade ou falsidade de fórmulas do Cálculo de Predicados.

**Definição 2**: (de verdade ou de falsidade das fórmulas que se iniciam com quantificadores).

Dada a fórmula P(x) (ou simplesmente P) de uma linguagem formal (que pode ou não conter alguma ocorrência da variável x) admitimos que saibamos identificar se P(x) é verdadeira (**v**) ou falsa (**f**) em todos os universos possíveis aos quais a linguagem formal de P pode fazer referência. Vamos admitir ainda que nos é dado um determinado contexto de referência para a linguagem formal (ou um universo de discurso juntamente com as interpretações, nesse universo, para as constantes e para os símbolos funcionais e de predicados da linguagem). Nessas condições, diremos que as fórmulas dos tipos (x)P(x) e (x)P(x) são verdadeiras ou falsas no contexto fornecido conforme satisfizerem o critério correspondente, dentre os descritos abaixo.

U1) (x) P(x) é **v** se realmente P(x) é **v** para todos os elementos do universo dado

(aos quais consideramos que a variável x faz referência).

U2) (x) P(x) é **f** se realmente existir pelo menos um elemento do universo dado

(na fórmula a seguir designado por x) para o qual P(x) é **v**.

E1) (x) P(x) é **v** se realmente existir pelo menos um elemento do universo dado

(designado por x na fórmula que segue) para o qual P(x) é **v**.

E2) (x) P(x) é **f** se realmente P(x) é **v** para todos os elementos do universo dado

(aos quais consideramos que a variável x faz referência).

**Definições 3**: Diremos que uma fórmula é válida, universalmente verdadeira ou uma lei da lógica se ela for verdadeira em todos os contextos ou universos onde seja possível dar interpretação ou significados para a linguagem formal na qual ela é escrita. Se uma fórmula é universalmente falsa (falsa em todos os contextos possíveis) então sua negação será uma lei da lógica (por quê?). Fórmulas que não são nem verdades nem falsidades universais, como a do exemplo dado na linguagem algébrica, antes da definição 2 acima, são ditas contingentes.

**Exercício 7**: Temos as seguintes verdades lógicas que não podem ser demonstradas por tabelas de verdade pois envolvem quantificadores. Demonstre-as usando a definição 2 (use as tabelas também, para avaliar a veracidade de fórmulas com conectivos):

1) (x)P  (y)P

2) (x)P  (x) P

3) (x)P  (x) P

4) (x)P  (x) P

5) (x)P  (x) P

6) (x)P  P(t) onde t é um termo

7)(x)(y)(z)P  (x)(y)(z) P

8)x (x = x)

9)xy(x = y  f(x) = f(y)) onde f é uma função qualquer.

10)xy(x = y  (P(x)  P(y))) onde P(x) é uma fórmula qualquer e P(y) é a mesma fórmula, só que trocando todas as ocorrências da variável x pela variável y.

**Exercício 8**: Dê exemplos e contra exemplos para as fórmulas fechadas dos exemplos do item **E)** (p. 5 da apostila), comprovando assim que representam afirmações contingentes. Não esqueça, você precisa fornecer universos e interpretações para os símbolos não lógicos, tanto que as validem como que as invalidem. Formule mais um exemplo de fórmula contingente em alguma linguagem formal que você especifique. Justifique suas respostas.