MAT1352 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real II

Lista 2

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{\, (x, y) \in^2 \colon 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq x \,\}$

   (b) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \,\}$

   (c) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x \,\}$

   (d) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{x} \leq y \leq 3 \,\}$

   (e) $A = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x \,\right\}$

   (f) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2 \,\}$

   (g) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 1 \,\}$

   (h) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2 \,\}$

   (i) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 5 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{x-1} \,\}$

2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 8 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt[3]{x} \,\}$

   (b) $A = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x} \,\right\}$

   (c) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \operatorname{arctg}(x) \,\}$

   (d) $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \,\}$

3. Calcule o volume de um cone de raio r e altura h.

4. (a) Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos equiláteros.

   (b) Calcule o volume do sólido cuja base é a região $4x^2 + y^2 \leq 1$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são semicírculos.

   (c) Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles de altura $x - x^2$.

   (d) Calcule o volume do sólido cuja base é um triângulo equilátero de lado l e cujas secções perpendiculares a um dos lados são quadrados.

5. Seja $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq e^x + 4 \,\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

6. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parabolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

7. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado de **toro**. Calcule o seu volume.

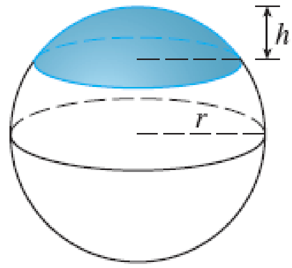

Figura 1: A calota esférica é a parte colorida.

8. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h \leq r$, de uma esfera de raio r.

9. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.

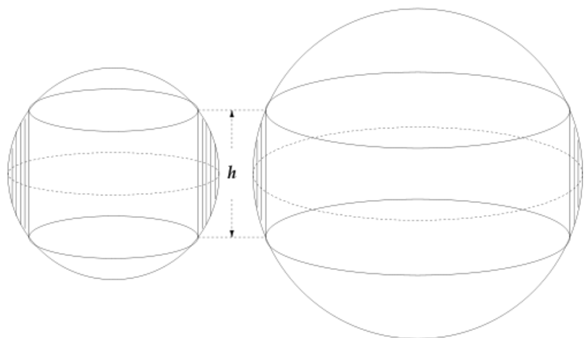

Figura 2: Anéis esféricos de altura h.

10. Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

(a) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 1$

(b) $y = \frac{4}{3}x + 3$, $0 \leq x \leq 2$

(c) $y = \sqrt{x}$

(d) $y = e^x$

11. Calcule o comprimento da curva $y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt$ para $1 \leq x \leq 4$.

12. Quais das seguintes integrais é imprópria? Por quê?

(a) $\int_1^{+\infty} x^4 e^{-x^4}\, dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$

(c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\, dx$

(d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\, dx$

(e) $\int_1^2 \frac{1}{2x - 1}\, dx$

(f) $\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\, dx$

(g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\, dx$

(h) $\int_1^2 \ln(x - 1)\, dx$.

13. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ax}\,dx$, para $a > 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{4-x^2}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,dx$

(m) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$

(n) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+2)(x+3)}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec x\,dx$

(q) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x-3}{2x-3}\,dx$

(r) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

(s) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

(t) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^{2x}\,dx$

(u) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

14. Verifique se as seguintes integrais são convergentes ou divergentes.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5+5x+1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+2x+1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^3}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^6-x+1}{x^7-2x^2+3}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x^3+x^2+1}{x^5+x+2}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{-1}\ln x}{\ln(x+1)}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

(n) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx$

(q) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

15. Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

    (a) $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq e^x \}$

    (b) $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -2 \text{ e } 0 \leq y \leq e^{\frac{-x}{2}} \right\}$

16. Determine m para que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, sendo $f(x) = \begin{cases} m, & \text{se } |x| \leq 3; \\ 0, & \text{se } |x| > 3. \end{cases}$

17. Esboce o gráfico da função $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2}, & \text{se } |t| \geq 1; \\ 1, & \text{se } |t| < 1. \end{cases}$

18. A integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, +\infty[$ é infinito e o integrando não está definido em 0. Calcule-a, expressando-a como uma soma de integrais impróprias da seguinte maneira:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$$

19. Encontre os valores de p para os quais cada integral converge e calcule a integral, quando ela for convergente:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

20. O objetivo deste exercício é verificar que não é conveniente definir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx.$$

    (a) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ é divergente.

    (b) Mostre que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} x\,dx = 0$.

    (c) Calcule $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{2t} x\,dx$.

21. (a) Se f é definida e contínua em $[a, +\infty[$ e $b > a$, mostre que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se, e somente se, $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

    (b) Se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e a e b são números reais, mostre que

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

22. Sejam f e g definidas e contínuas em $[a, +\infty[$ e k um número real não-nulo. Mostre que:

    (a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se, e somente se, $\displaystyle\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx$ converge;

    (b) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\,dx$ converge;

    (c) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\,dx$ diverge.