MAT1352 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real II

Lista 1

1. Mostre que $\text{arcsen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

2. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e tal que, para todo x, $f'(x) = \alpha f(x)$, onde α é uma constante não-nula. Prove que existe uma constante k tal que, para todo x, $f(x) = ke^{\alpha x}$.

3. Determine $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que
$$f'(x) = 2f(x) \quad \text{e} \quad f(0) = 1.$$
Sugestão: Use o exercício anterior.

4. Sejam f e g duas funções definidas e deriváveis em $\mathbb{R}$. Suponha que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ e que, para todo x,
$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = -f(x).$$
   (a) Mostre que, para todo x,
$$(f(x) - \text{sen}x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0.$$
   (b) Conclua de (4a) que $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = \cos x$.

5. Encontre o erro na seguinte argumentação usando integração por partes:
Sejam $u(x) = \dfrac{1}{x}$ e $v(x) = x$. Então, $du = -\dfrac{1}{x^2}\,dx$ e $dv = 1\,dx$. Assim,
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx \;\Rightarrow\; 0 = 1.$$

6. Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x-2}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int \text{sen}^2(x)\,dx$;

(f) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4+x^2}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-2x+x^2}}\,dx$;

(h) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\,dx$;

(i) $\displaystyle\int x\sec^2(x)\,dx$;

(j) $\displaystyle\int x\ln^2(x)\,dx$;

(k) $\displaystyle\int x^3\cos(x^2)\,dx$;

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$;

(m) $\displaystyle\int x^3\cos(x^4)\,dx$;

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$;

(o) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$;

(p) $\displaystyle\int 2x(x+1)^{2007}\,dx$;

(q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$;

(r) $\displaystyle\int x(x+1)^{10}\,dx$;

(s) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)}\,dx$;

(t) $\displaystyle\int \text{sen}(\ln x)\,dx$;

(u) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$;

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\text{arcsen}(x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(w) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$;

(x) $\displaystyle\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$;

(y) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$;

(z) $\displaystyle\int x^5e^{-x^3}\,dx$;

7. Continue calculando

(a) $\int xe^{-x}\,dx$;

(b) $\int e^x\sqrt{1+4e^x}\,dx$;

(c) $\int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx$;

(d) $\int xe^{2x}\,dx$;

(e) $\int e^{-2x}\operatorname{sen}(x)\,dx$;

(f) $\int \arccos(x)\,dx$;

(g) $\int \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\,dx$;

(h) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$;

(i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(j) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$;

(k) $\int \frac{x+2}{(x+1)^5}\,dx$;

(l) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2}\,dx$;

(m) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$;

(n) $\int \sqrt{3x-2}\,dx$;

(o) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$;

(p) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

(q) $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$;

(r) $\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,dx$;

(s) $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$.

8. Calcule um pouco mais:

(a) $\int \sec(x)\,dx$;

(b) $\int \sec^2(x)\,dx$;

(c) $\int \sec^3(x)\,dx$;

(d) $\int \sec^4(x)\,dx$;

(e) $\int \operatorname{tg}(x)\,dx$;

(f) $\int \operatorname{tg}^2(x)\,dx$;

(g) $\int \operatorname{tg}^3(x)\,dx$;

(h) $\int \operatorname{tg}^4(x)\,dx$;

(i) $\int \cos^3(x)\,dx$;

(j) $\int \operatorname{sen}(x)\sec^3(x)\,dx$;

(k) $\int \operatorname{tg}(x)\sec^2(x)\,dx$;

(l) $\int \frac{\sec^2(x)}{3+2\operatorname{tg}(x)}\,dx$;

(m) $\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^2(x)\,dx$;

(n) $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\,dx$;

(o) $\int \cos^5(x)\operatorname{sen}^4(x)\,dx$.

9. Calcule.

(a) $\int_{-1}^{1}(2x+1)\,dx$

(b) $\int_{-2}^{1}(x^2-1)\,dx$

(c) $\int_{1}^{3}dx$

(d) $\int_{1}^{3}\frac{1}{x^3}\,dx$

(e) $\int_{0}^{2}(x^2+3x-3)\,dx$

(f) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}+x\right)dx$

(g) $\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx$

(h) $\int_{1}^{2}\frac{1+x}{x^3}\,dx$

(i) $\int_{0}^{1}(x-3)^2\,dx$

(j) $\int_{1}^{4}\frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$

(k) $\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}(3x)\,dx$

(l) $\int_{-1}^{0}e^{-2x}\,dx$

(m) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(3+\cos(3x))\,dx$

(n) $\int_{0}^{1}\operatorname{sen}(5x)\,dx$

(o) $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}\,dx$

10. Desenhe o conjunto A dado e calcule sua área.

(a) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x=1$, $x=3$, pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y=x^3$.

(b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x=1$, $x=4$, $y=0$ e pelo gráfico de $y=\sqrt{x}$.

(c) A é o conjunto de todos os $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que $x^2-1\le y\le 0$.

(d) A é o conjunto de todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \leq y \leq 4 - x^2$.

(e) A é o conjunto de todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \leq y \leq |\text{sen}(x)|$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.

(f) A é a região do plano compreendida entre o eixo $0x$ e o gráfico de $y = x^2 - x$, com $0 \leq x \leq 2$.

(g) A é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = 3 - 2x - x^2$, com $-1 \leq x \leq 2$.

(h) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^2 + 2x + 5$.

(i) A é o conjunto do plano limitado pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, com $-1 \leq x \leq 1$.

(j) A é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, com $0 \leq x \leq 2$.

(k) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \cos(x)$.

(l) A é o conjunto de todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \geq 0$ e $x^3 \leq y \leq x$.

(m) A é o conjunto do plano limitado pela reta $y = x$ e pelo gráfico de $y = x^3$, com $-1 \leq x \leq 1$.

(n) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$.

(o) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$.

(p) A é o conjunto de todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + 1 \leq y \leq x + 1$.

(q) A é o conjunto de todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 - 1 \leq y \leq x + 1$.

(r) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \cos(x)$ e $y = 1 - \cos(x)$.

(s) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } x^3 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}$.

(t) A é o conjunto do plano limitado pelos gráficos de $y = x^3 - x$ e $y = \text{sen}(\pi x)$, com $-1 \leq x \leq 1$.

(u) A é o conjunto de todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \geq 0$ e $-x \leq y \leq x - x^2$.

11. Esboce o gráfico da função F dada por:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{t}, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } t \leq 0 \\ 0, & \text{se } t > 0 \end{cases}$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_{-5}^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } |t| \geq 1 \\ t^2, & \text{se } |t| \geq 1. \end{cases}$

12. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \neq 1 \\ 2, & \text{se } t = 1. \end{cases}$

(a) Esboce o gráfico de F.

(b) Calcule $F'(x)$.

13. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t < 1 \\ \frac{2}{t}, & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$

(a) Verifique que $F'(x) = f(x)$ em todo x em que f for contínua.

(b) F é derivável em $x = 1$?

14. Calcule $F'(x)$ sendo F dada por

(a) $F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{3t}{1+t^6}\, dt$

(b) $F(x) = \int_{1}^{\cos x} \sqrt[3]{1-t^2}\, dt$

(c) $F(x) = \int_{x}^{2} \cos t^4\, dt$

(d) $F(x) = \int_{1}^{x^2} \operatorname{sen} t^2\, dt$

(e) $F(x) = \int_{0}^{2x} \cos t^2\, dt$

(f) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{5+t^4}\, dt$

(g) $F(x) = x^3 \int_{1}^{x} e^{-s^2}\, ds$

(h) $F(x) = \int_{0}^{x} x^2 e^{-s^2}\, ds$

(i) $F(x) = \int_{x}^{1} \operatorname{arctg} t^3\, dt$

(j) $F(x) = \int_{0}^{x} (x-t)e^{-t^2}\, dt$

(k) $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$

(l) $F(x) = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\, dt$

15. Calcule as integrais abaixo e interprete cada caso geometricamente.

(a) $\int_{-2}^{2} x\, dx$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)|\, dx$ (c) $\int_{0}^{\pi} \cos(x)\, dx$ (d) $\int_{-a}^{a} \operatorname{sen}(x)\, dx$

16. Calcule as integrais abaixo e esboce os gráficos mostrando as figuras cujas áreas cada uma das integrais representam.

(a) $\int_{-1}^{2} |x - x^2|\, dx$

(b) $\int_{0}^{\pi} |\operatorname{sen}(x) - \cos(x)|\, dx$

17. O que está errado na expressão abaixo?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}.$$

Exercícios Extras

(a) Calcule:

i. $\int \operatorname{sen}^4(x)\, dx$; ii. $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\, dx$; iii. $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)\, dx$.

(b) i. Calcule $\int \operatorname{sen}^6(x)\ dx$ em função de $\int \operatorname{sen}^4(x)\ dx$ e depois, resolva-a.

ii. Calcule $\int \cos^4(x)\ dx$ em função de $\int \cos^2(x)\ dx$ e depois, resolva-a.