Quatérnions e Rotações

Uma Jornada pela Álgebra, Geometria e Topologia

Claudio Gorodski

Disciplina Panorama da Matemática
IME-USP
18 e 23 de novembro de 2020

Consideremos o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos:

Consideremos o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos: Dados $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, temos $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$.

Consideremos o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos: Dados $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, temos $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Usando $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, obtemos:

Consideremos o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos: Dados $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, temos $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Usando $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, obtemos:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

Consideremos o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos: Dados $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, temos $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Usando $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, obtemos:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

No caso de *inteiros*, obtemos:

$$\begin{aligned} &(\text{soma de dois quadrados}) \times (\text{soma de dois quadrados}) \\ &\qquad = (\text{soma de dois quadrados}) \quad (\text{Diofanto, séc. III}) \end{aligned}$$

Consideremos o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos: Dados $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, temos $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$. Usando $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, obtemos:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

No caso de *inteiros*, obtemos:

$$\begin{aligned}&(\text{soma de dois quadrados}) \times (\text{soma de dois quadrados}) \\ &\qquad = (\text{soma de dois quadrados}) \quad (\text{Diofanto, séc. III})\end{aligned}$$

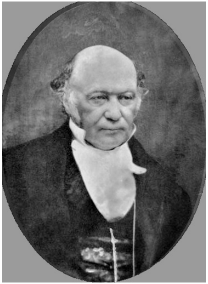
Notemos que não vale para soma de três quadrados:

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(0^2 + 1^2 + 2^2) = 3 \times 5 = 15 \neq \text{soma de três quadrados.}$$

Existem "números tri-dimensionais?"

Existem "números tri-dimensionais?" Em outras palavras, existe uma multiplicação em $\mathbb{R}^3$?

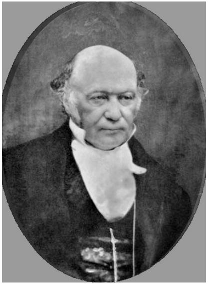
Existem "números tri-dimensionais?" Em outras palavras, existe uma multiplicação em $\mathbb{R}^3$?



William Rowan Hamilton
(1805-1865).

Durante treze anos, Hamilton tentou definir uma tal multiplicação.

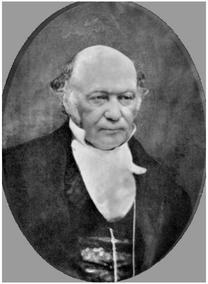
Existem "números tri-dimensionais?" Em outras palavras, existe uma multiplicação em $\mathbb{R}^3$?



William Rowan Hamilton (1805-1865).

Durante treze anos, Hamilton tentou definir uma tal multiplicação.
Até que, em 1843, caminhando com a esposa ao longo do canal em Dublin para um encontro da Academia Real, teve uma epifania e visualizou as equações:

Existem “números tri-dimensionais?” Em outras palavras, existe uma multiplicação em $\mathbb{R}^3$?

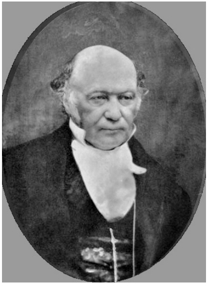


William Rowan Hamilton (1805-1865).

Durante treze anos, Hamilton tentou definir uma tal multiplicação.
Até que, em 1843, caminhando com a esposa ao longo do canal em Dublin para um encontro da Academia Real, teve uma epifania e visualizou as equações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Existem "números tri-dimensionais?" Em outras palavras, existe uma multiplicação em $\mathbb{R}^3$?



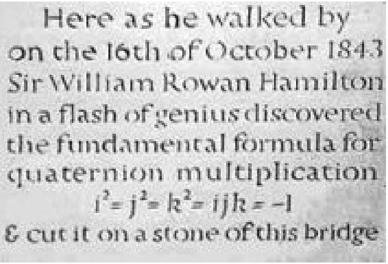
WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865).

Durante treze anos, HAMILTON tentou definir uma tal multiplicação.
Até que, em 1843, caminhando com a esposa ao longo do canal em Dublin para um encontro da Academia Real, teve uma epifania e visualizou as equações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

(Num famoso ato de vandalismo, gravou-as numa pedra da ponte de Brougham)

Brougham Bridge em Dublin



Hamilton passou a 4 dimensões e sacrificou a comutatividade:

Hamilton passou a 4 dimensões e sacrificou a comutatividade:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$$

com uma multiplicação satisfazendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

Hamilton passou a 4 dimensões e sacrificou a comutatividade:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$$

com uma multiplicação satisfazendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

$\mathbb{H}$ é uma álgebra (sobre $\mathbb{R}$, de dimensão 4), **associativa**, **normada** e **com divisão**.

Hamilton passou a 4 dimensões e sacrificou a comutatividade:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$$

com uma multiplicação satisfazendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

$\mathbb{H}$ é uma álgebra (sobre $\mathbb{R}$, de dimensão 4), **associativa**, **normada** e **com divisão**.

$$\begin{aligned} \text{Conjugado} \quad &: \bar{q} = a - bi - cj - ck \\ \text{Parte real} \quad &: \Re q = a \\ \text{Parte imaginária} \quad &: \Im q = bi + cj + dk \end{aligned}$$

Hamilton passou a 4 dimensões e sacrificou a comutatividade:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$$

com uma multiplicação satisfazendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

$\mathbb{H}$ é uma álgebra (sobre $\mathbb{R}$, de dimensão 4), **associativa**, **normada** e **com divisão**.

$$\begin{aligned} \text{Conjugado} &: \bar{q} = a - bi - cj - ck \\ \text{Parte real} &: \Re q = a \\ \text{Parte imaginária} &: \Im q = bi + cj + dk \end{aligned}$$

Hamilton passou a 4 dimensões e sacrificou a comutatividade:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$$

com uma multiplicação satisfazendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

$\mathbb{H}$ é uma álgebra (sobre $\mathbb{R}$, de dimensão 4), **associativa**, **normada** e **com divisão**.

$$\begin{aligned} \text{Conjugado} &: \bar{q} = a - bi - cj - ck \\ \text{Parte real} &: \Re q = a \\ \text{Parte imaginária} &: \Im q = bi + cj + dk \end{aligned}$$

Agora a norma Euclideana em $\mathbb{R}^4$ fica:

$$|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = q\bar{q}$$

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação.

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação. Agora, calculemos:

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação. Agora, calculemos:

$$|qq'|^2 = qq'\overline{qq'}$$

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação. Agora, calculemos:

$$\begin{aligned} |qq'|^2 &= qq'\overline{qq'} \\ &= qq'\bar{q}'\bar{q} \end{aligned}$$

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação. Agora, calculemos:

$$\begin{aligned} |qq'|^2 &= qq'\overline{qq'} \\ &= qq'\bar{q}'\bar{q} \\ &= q|q'|^2\bar{q} \end{aligned}$$

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação. Agora, calculemos:

$$\begin{aligned} |qq'|^2 &= qq'\overline{qq'} \\ &= qq'\bar{q}'\bar{q} \\ &= q|q'|^2\bar{q} \\ &= q\bar{q}|q'|^2 \end{aligned}$$

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação. Agora, calculemos:

$$\begin{aligned} |qq'|^2 &= qq'\overline{qq'} \\ &= qq'\bar{q}'\bar{q} \\ &= q|q'|^2\bar{q} \\ &= q\bar{q}|q'|^2 \\ &= |q|^2|q'|^2, \end{aligned}$$

e a norma é **multiplicativa**.

Notemos inicialmente a identidade

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q},$$

de fácil verificação. Agora, calculemos:

$$\begin{aligned} |qq'|^2 &= qq'\overline{qq'} \\ &= qq'\bar{q}'\bar{q} \\ &= q|q'|^2\bar{q} \\ &= q\bar{q}|q'|^2 \\ &= |q|^2|q'|^2, \end{aligned}$$

e a norma é **multiplicativa**.
Em particular,

$$\begin{aligned} (\text{soma de quatro quadrados}) &\times (\text{soma de quatro quadrados}) \\ &= (\text{soma de quatro quadrados}) \end{aligned}$$

Temos:

Temos:

$$q \neq 0 \quad \text{se e somente se} \quad |q| \neq 0.$$

Temos:

$$q \neq 0 \quad \text{se e somente se} \quad |q| \neq 0.$$

Então, dado $q \neq 0$, temos

$$q\frac{\bar{q}}{|q|^2} = 1,$$

Temos:

$$q \neq 0 \quad \text{se e somente se} \quad |q| \neq 0.$$

Então, dado $q \neq 0$, temos

$$q \frac{\bar{q}}{|q|^2} = 1,$$

isto é,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

$\mathbb{H}$ é uma álgebra com divisão

Temos:

$$q \neq 0 \quad \text{se e somente se} \quad |q| \neq 0.$$

Então, dado $q \neq 0$, temos

$$q \frac{\bar{q}}{|q|^2} = 1,$$

isto é,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

FERDINAND G. FROBENIUS (1849-1917).

Teorema (FROBENIUS 1878)

As álgebras associativas com divisão sobre $\mathbb{R}$ são: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (resp. de dimensão 1, 2, 4).

Temos:

$$q \neq 0 \quad \text{se e somente se} \quad |q| \neq 0.$$

Então, dado $q \neq 0$, temos

$$q \frac{\bar{q}}{|q|^2} = 1,$$

isto é,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

Ferdinand G. Frobenius (1849-1917).

Teorema (Frobenius 1878)

As álgebras associativas com divisão sobre $\mathbb{R}$ são: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (resp. de dimensão 1, 2, 4).

Os octônions formam uma álgebra real normada com divisão de dimensão 8 que não é comutativa nem associativa.

Os octônions formam uma álgebra real normada com divisão de dimensão 8 que não é comutativa nem associativa. John T. Graves (colega de Hamilton do tempo de estudante) os descobriu em 1843, mas o primeiro a publicar sobre sua existência foi Arthur Cayley, em 1845.

Os octônions formam uma álgebra real normada com divisão de dimensão 8 que não é comutativa nem associativa. John T. Graves (colega de Hamilton do tempo de estudante) os descobriu em 1843, mas o primeiro a publicar sobre sua existência foi Arthur Cayley, em 1845. O correspondente "teorema dos oito quadrados" já fora descoberto por C. F. Degen em 1818.

Os octônions formam uma álgebra real normada com divisão de dimensão 8 que não é comutativa nem associativa. John T. Graves (colega de Hamilton do tempo de estudante) os descobriu em 1843, mas o primeiro a publicar sobre sua existência foi Arthur Cayley, em 1845. O correspondente "teorema dos oito quadrados" já fora descoberto por C. F. Degen em 1818.

Adolf Hurwitz (1859-1919).

Teorema (Hurwitz 1898)

As álgebras normadas com divisão sobre $\mathbb{R}$ *são:* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ *(resp. de dimensão* 1, 2, 4, 8*).*

Escrevamos

Escrevamos

$$q = a + bi + cj + dk$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \end{aligned}$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = a + bi, \ \beta = c - di \in \mathbb{C}.$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = a + bi, \ \beta = c - di \in \mathbb{C}.$$

Então

$$q_1 q_2 = (\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2)$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = a + bi, \ \beta = c - di \in \mathbb{C}.$$

Então

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 + j\beta_1 j\beta_2 + j\beta_1\alpha_2 + \alpha_1 j\beta_2 \end{aligned}$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = a + bi, \ \beta = c - di \in \mathbb{C}.$$

Então

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 + j\beta_1 j\beta_2 + j\beta_1\alpha_2 + \alpha_1 j\beta_2 \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2) + j(\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2) \end{aligned}$$

Aqui usamos que $\beta j = j\bar{\beta}$, etc.

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = a + bi,\ \ \beta = c - di \in \mathbb{C}.$$

Então

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 + j\beta_1 j\beta_2 + j\beta_1\alpha_2 + \alpha_1 j\beta_2 \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2) + j(\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2) \end{aligned}$$

Aqui usamos que $\beta j = j\bar{\beta}$, etc. Estamos portanto considerando $\mathbb{H}$ como espaço vetorial **à direita** sobre $\mathbb{C}$.

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = a + bi, \ \beta = c - di \in \mathbb{C}.$$

Então

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 + j\beta_1 j\beta_2 + j\beta_1\alpha_2 + \alpha_1 j\beta_2 \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2) + j(\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2) \end{aligned}$$

Aqui usamos que $\beta j = j\bar{\beta}$, etc. Estamos portanto considerando $\mathbb{H}$ como espaço vetorial **à direita** sobre $\mathbb{C}$. Neste sentido, a multiplicação à esquerda de $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ por um quatérnion torna-se $\mathbb{C}$-linear:

$$\mathbb{H} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^2), \quad q \mapsto L_q.$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + dk \\ &= a + bi + j(c - di) \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = a + bi, \;\; \beta = c - di \in \mathbb{C}.$$

Então

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 + j\beta_1 j\beta_2 + j\beta_1\alpha_2 + \alpha_1 j\beta_2 \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2) + j(\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2) \end{aligned}$$

Aqui usamos que $\beta j = j\bar{\beta}$, etc. Estamos portanto considerando $\mathbb{H}$ como espaço vetorial **à direita** sobre $\mathbb{C}$. Neste sentido, a multiplicação à esquerda de $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ por um quatérnion torna-se $\mathbb{C}$-linear:

$$\mathbb{H} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^2), \quad q \mapsto L_q.$$

De fato,

$$L_q(xi) = q(xi) = (qx)i = L_q(x)i$$

onde q, $x \in \mathbb{H}$.

Tomemos a base $\{1, j\}$ de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{C}$, $q = \alpha + j\beta$, e calculemos:

$$(\alpha + j\beta) \cdot 1 = \alpha + j\beta$$
$$(\alpha + j\beta) \cdot j = -\bar{\beta} + j\bar{\alpha}$$

Assim obtemos a representaç ao matricial

$$L_q = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Tomemos a base $\{1, j\}$ de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{C}$, $q = \alpha + j\beta$, e calculemos:

$$(\alpha + j\beta) \cdot 1 = \alpha + j\beta$$
$$(\alpha + j\beta) \cdot j = -\bar{\beta} + j\bar{\alpha}$$

Assim obtemos a representaç ao matricial

$$L_q = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Aqui $L_1 = I$ e a associatividade de $\mathbb{H}$ dá

$$L_{q_1 q_2} = L_{q_1} L_{q_2}$$

Tomemos a base $\{1, j\}$ de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{C}$, $q = \alpha + j\beta$, e calculemos:

$$(\alpha + j\beta) \cdot 1 = \alpha + j\beta$$
$$(\alpha + j\beta) \cdot j = -\bar{\beta} + j\bar{\alpha}$$

Assim obtemos a representaç ao matricial

$$L_q = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Aqui $L_1 = I$ e a associatividade de $\mathbb{H}$ dá

$$L_{q_1 q_2} = L_{q_1} L_{q_2}$$

Logo temos um homomorfismo de grupos

$$q \mapsto L_q, \qquad \mathbb{H}^\times \to GL(2, \mathbb{C}),$$

onde $\mathbb{H}^\times$ denote o grupo multiplicativo dos quatérnions não-nulos.

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

.

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \\ &= \{q \in \mathbb{H} \ : \ |q| = 1\} \end{aligned}$$

.

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \\ &= \{q \in \mathbb{H} \ : \ |q| = 1\} \\ &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}. \end{aligned}$$

.

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \;:\; a^2+b^2+c^2+d^2=1\} \\ &= \{q \in \mathbb{H} \;:\; |q|=1\} \\ &= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \;:\; |\alpha|^2+|\beta|^2=1\}. \end{aligned}$$

Como a norma é multiplicativa, S^3 forma um subgrupo de $\mathbb{H}^\times$.

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a^2+b^2+c^2+d^2=1\} \\ &= \{q \in \mathbb{H} \ : \ |q|=1\} \\ &= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |\alpha|^2+|\beta|^2=1\}. \end{aligned}$$

Como a norma é multiplicativa, S^3 forma um subgrupo de $\mathbb{H}^\times$. Temos

$$\varphi : S^3 \to SU(2), \quad \varphi(q) = L_q,$$

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\} \\ &= \{q \in \mathbb{H} \ : \ |q| = 1\} \\ &= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Como a norma é multiplicativa, S^3 forma um subgrupo de $\mathbb{H}^\times$. Temos

$$\varphi : S^3 \to SU(2), \quad \varphi(q) = L_q,$$

pois

$$\varphi(q)\varphi(q)^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\} \\ &= \{q \in \mathbb{H} \ : \ |q| = 1\} \\ &= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Como a norma é multiplicativa, S^3 forma um subgrupo de $\mathbb{H}^\times$. Temos

$$\varphi : S^3 \to SU(2), \quad \varphi(q) = L_q,$$

pois

$$\varphi(q)\varphi(q)^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\det \varphi(q) = \det \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Os quatérnions de norma 1 formam um conjunto difeomorfo à esfera S^3:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\} \\ &= \{q \in \mathbb{H} \ : \ |q| = 1\} \\ &= \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Como a norma é multiplicativa, S^3 forma um subgrupo de $\mathbb{H}^\times$. Temos

$$\varphi : S^3 \to SU(2), \quad \varphi(q) = L_q,$$

pois

$$\varphi(q)\varphi(q)^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\det \varphi(q) = \det \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

É fácil ver que φ é bijetora e contínua, portanto, um homeomorfismo (já que S^3 é compacto) e um isomorfismo de grupos.

Consideremos os quatérnions puramente imaginários:

$$\Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid \Re q = 0\} \cong \mathbb{R}^3.$$

Consideremos os quatérnions puramente imaginários:

$$\Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid \Re q = 0\} \cong \mathbb{R}^3.$$

Sejam $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \in \Im\mathbb{H}$.

Rotações de $\mathbb{R}^3$ (Cayley 1845)

Consideremos os quatérnions puramente imaginários:

$$\Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid \Re q = 0\} \cong \mathbb{R}^3.$$

Sejam $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \in \Im\mathbb{H}$. Então

$$uv = -(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) + (u_2 v_3 - u_3 v_2) i + (u_3 v_1 - u_1 v_3) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$

Consideremos os quatérnions puramente imaginários:

$$\Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid \Re q = 0\} \cong \mathbb{R}^3.$$

Sejam $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \in \Im\mathbb{H}$. Então

$$\begin{aligned} uv &= -(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) + (u_2 v_3 - u_3 v_2) i + (u_3 v_1 - u_1 v_3) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k \\ &= -u \cdot v + u \times v \end{aligned}$$

Consideremos os quatérnions puramente imaginários:

$$\Im\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} \mid \Re q = 0\} \cong \mathbb{R}^3.$$

Sejam $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k,\ v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \in \Im\mathbb{H}$. Então

$$\begin{aligned} uv &= -(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) + (u_2 v_3 - u_3 v_2) i + (u_3 v_1 - u_1 v_3) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k \\ &= -u \cdot v + u \times v \end{aligned}$$

Em particular,

$$u^2 = -|u|^2 = -1$$

para $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3 = S^2$.

Para cada $q \in S^3$ e $x \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, definamos

$$\tilde{\psi}(q)x = qxq^{-1}.$$

Para cada $q \in S^3$ e $x \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, definamos

$$\tilde{\psi}(q)x = qxq^{-1}.$$

Então $\tilde{\psi}(q)$ é uma isometria de $\mathbb{R}^4$:

$$|\tilde{\psi}(q)x| = |q||x||q|^{-1} = |x|.$$

Para cada $q \in S^3$ e $x \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, definamos

$$\tilde{\psi}(q)x = qxq^{-1}.$$

Então $\tilde{\psi}(q)$ é uma isometria de $\mathbb{R}^4$:

$$|\tilde{\psi}(q)x| = |q||x||q|^{-1} = |x|.$$

$\tilde{\psi}(q)$ fixa os pontos do subespaço $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{H}$:

$$\tilde{\psi}(q)a = qaq^{-1} = aqq^{-1} = a$$

para $a \in \mathbb{R}$.

Para cada $q \in S^3$ e $x \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, definamos

$$\tilde{\psi}(q)x = qxq^{-1}.$$

Então $\tilde{\psi}(q)$ é uma isometria de $\mathbb{R}^4$:

$$|\tilde{\psi}(q)x| = |q||x||q|^{-1} = |x|.$$

$\tilde{\psi}(q)$ fixa os pontos do subespaço $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{H}$:

$$\tilde{\psi}(q)a = qaq^{-1} = aqq^{-1} = a$$

para $a \in \mathbb{R}$.
Como $\mathbb{H} = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \Im\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ é uma decomposição ortogonal, agora $\tilde{\psi}(q)$ define uma isometria $\psi(q)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\psi : S^3 \to SO(3).$$

Tomemos um quatérnion da forma $q = \cos\theta + u \sin\theta$, onde $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3$.

Tomemos um quatérnion da forma $q = \cos\theta + u \sin\theta$, onde $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3$.

Proposição

$\psi(q)$ é uma rotação de ângulo 2θ e eixo u.

Tomemos um quatérnion da forma $q = \cos\theta + u \sin\theta$, onde $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3$.

Proposição

$\psi(q)$ é uma rotação de ângulo 2θ e eixo u.

Demonstração. q comuta com u, então $\psi(q)u = u$.

Tomemos um quatérnion da forma $q = \cos\theta + u \sin\theta$, onde $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3$.

Proposição

$\psi(q)$ é uma rotação de ângulo 2θ e eixo u.

Demonstração. q comuta com u, então $\psi(q)u = u$. Tome $v \perp u$, e ponha $w = u \times v$.

Tomemos um quatérnion da forma $q = \cos\theta + u \sin\theta$, onde $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3$.

Proposição

$\psi(q)$ é uma rotação de ângulo 2θ e eixo u.

Demonstração. q comuta com u, então $\psi(q)u = u$. Tome $v \perp u$, e ponha $w = u \times v$. Então, usando

$$uv = u \times v = w = -vu$$

Tomemos um quatérnion da forma $q = \cos\theta + u \sin\theta$, onde $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3$.

Proposição

$\psi(q)$ é uma rotação de ângulo 2θ e eixo u.

Demonstração. q comuta com u, então $\psi(q)u = u$. Tome $v \perp u$, e ponha $w = u \times v$. Então, usando

$$uv = u \times v = w = -vu$$

e

$$uvu = u(vu) = u(-uv) = -u^2 v = v,$$

Tomemos um quatérnion da forma $q = \cos\theta + u\sin\theta$, onde $u \in \Im\mathbb{H} \cap S^3$.

Proposição

$\psi(q)$ é uma rotação de ângulo 2θ e eixo u.

Demonstração. q comuta com u, então $\psi(q)u = u$. Tome $v \perp u$, e ponha $w = u \times v$. Então, usando

$$uv = u \times v = w = -vu$$

e

$$uvu = u(vu) = u(-uv) = -u^2 v = v,$$

nós obtemos

$$\begin{aligned}\psi(q)v &= (\cos\theta + u\sin\theta)v(\cos\theta - u\sin\theta)\\ &= v\cos^2\theta + uv\sin\theta\cos\theta - uvu\sin^2\theta - vu\cos\theta\sin\theta\\ &= v\cos 2\theta + w\sin 2\theta,\end{aligned}$$

como desejado. □

Deduzimos que

$$\psi : S^3 \to SO(3)$$

é um homomorfismo contínuo sobrejetor (pois toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo).

Deduzimos que

$$\psi : S^3 \to SO(3)$$

é um homomorfismo contínuo sobrejetor (pois toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo). Além disso, $\ker \psi = \{\pm 1\}$.

Deduzimos que

$$\psi : S^3 \to SO(3)$$

é um homomorfismo contínuo sobrejetor (pois toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo). Além disso, $\ker \psi = \{\pm 1\}$. Finalmente obtemos um isomorfismo de grupos e um homeomorfismo

$$SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\}$$

Deduzimos que

$$\psi : S^3 \to SO(3)$$

é um homomorfismo contínuo sobrejetor (pois toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo). Além disso, $\ker \psi = \{\pm 1\}$. Finalmente obtemos um isomorfismo de grupos e um homeomorfismo

$$SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\}$$

($\cong \mathbb{R}P^3$, onde $\mathbb{R}P^3$ é o espaço de retas pela origem em $\mathbb{R}^3$; note que toda tal reta encontra S^3 em dois pontos, que são antípodas.)

Deduzimos que

$$\psi : S^3 \to SO(3)$$

é um homomorfismo contínuo sobrejetor (pois toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo). Além disso, $\ker \psi = \{\pm 1\}$. Finalmente obtemos um isomorfismo de grupos e um homeomorfismo

$$SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\}$$

($\cong \mathbb{R}P^3$, onde $\mathbb{R}P^3$ é o espaço de retas pela origem em $\mathbb{R}^3$; note que toda tal reta encontra S^3 em dois pontos, que são antípodas.)
"Uma rotação de $\mathbb{R}^3$ é uma quatérnion unitário, a menos de multiplicação por -1."

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$.
Assumamos o resultado verdadeiro para $n - 1$ e seja $T \neq I$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ com $T(0) = 0$.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$.
Assumamos o resultado verdadeiro para $n - 1$ e seja $T \neq I$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ com $T(0) = 0$.Tomemos $v \in \mathbb{R}^n$ com $Tv = w \neq v$.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$. Assumamos o resultado verdadeiro para $n - 1$ e seja $T \neq I$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ com $T(0) = 0$.Tomemos $v \in \mathbb{R}^n$ com $Tv = w \neq v$. Seja R a reflexão no hiperplano ortogonal a $u := v - w$.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$. Assumamos o resultado verdadeiro para $n - 1$ e seja $T \neq I$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ com $T(0) = 0$.Tomemos $v \in \mathbb{R}^n$ com $Tv = w \neq v$. Seja R a reflexão no hiperplano ortogonal a $u := v - w$. Então $Tu = -u$ e RT fixa os pontos da reta gerada por u.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$. Assumamos o resultado verdadeiro para $n - 1$ e seja $T \neq I$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ com $T(0) = 0$.Tomemos $v \in \mathbb{R}^n$ com $Tv = w \neq v$. Seja R a reflexão no hiperplano ortogonal a $u := v - w$. Então $Tu = -u$ e RT fixa os pontos da reta gerada por u. Agora RT deixa o hiperplano $u^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$ invariante.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$. Assumamos o resultado verdadeiro para $n-1$ e seja $T \neq I$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ com $T(0) = 0$.Tomemos $v \in \mathbb{R}^n$ com $Tv = w \neq v$. Seja R a reflexão no hiperplano ortogonal a $u := v - w$. Então $Tu = -u$ e RT fixa os pontos da reta gerada por u. Agora RT deixa o hiperplano $u^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$ invariante. Pela hipótese de indução, $RT|_{u^\perp}$ é o produto de no máximo $n-1$ reflexões.

Teorema

Toda isometria de $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos pela origem.

Demonstração. Por indução sobre n. O caso inicial $n = 1$ é fácil, pois a única isometria não-trivial de $\mathbb{R}$ que fixa a origem é uma reflexão: $x \mapsto -x$. Assumamos o resultado verdadeiro para $n-1$ e seja $T \neq I$ uma isometria de $\mathbb{R}^n$ com $T(0) = 0$.Tomemos $v \in \mathbb{R}^n$ com $Tv = w \neq v$. Seja R a reflexão no hiperplano ortogonal a $u := v - w$. Então $Tu = -u$ e RT fixa os pontos da reta gerada por u. Agora RT deixa o hiperplano $u^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$ invariante. Pela hipótese de indução, $RT|_{u^\perp}$ é o produto de no máximo $n-1$ reflexões. Logo, T é o produto de no máximo n reflexões. $\square$

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo.

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo. Segue do Teorema de CARTAN-DIEUDONNÉ que toda rotação do $\mathbb{R}^4$ é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões em hiperplanos.

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo. Segue do Teorema de CARTAN-DIEUDONNÉ que toda rotação do $\mathbb{R}^4$ é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões em hiperplanos.

Proposição

Seja u um quatérnion unitário. Então a reflexão de $\mathbb{H}$ no hiperplano $u^\perp$ é a aplicação $x \mapsto -u\bar{x}u$.

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo. Segue do Teorema de Cartan-Dieudonné que toda rotação do $\mathbb{R}^4$ é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões em hiperplanos.

Proposição

Seja u um quatérnion unitário. Então a reflexão de $\mathbb{H}$ no hiperplano $u^\perp$ é a aplicação $x \mapsto -u\bar{x}u$.

Demonstração. A reflexão em $\Im\mathbb{H} = 1^\perp$ é $x \mapsto -\bar{x}$.

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo. Segue do Teorema de Cartan-Dieudonné que toda rotação do $\mathbb{R}^4$ é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões em hiperplanos.

Proposição

Seja u um quatérnion unitário. Então a reflexão de $\mathbb{H}$ no hiperplano $u^\perp$ é a aplicação $x \mapsto -u\bar{x}u$.

Demonstração. A reflexão em $\Im\mathbb{H} = 1^\perp$ é $x \mapsto -\bar{x}$. A multiplicação por u é uma isometria M_u que leva 1 em u e $1^\perp$ em $u^\perp$,

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo. Segue do Teorema de CARTAN-DIEUDONNÉ que toda rotação do $\mathbb{R}^4$ é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões em hiperplanos.

Proposição

Seja u um quatérnion unitário. Então a reflexão de $\mathbb{H}$ no hiperplano $u^\perp$ é a aplicação $x \mapsto -u\bar{x}u$.

Demonstração. A reflexão em $\Im\mathbb{H} = 1^\perp$ é $x \mapsto -\bar{x}$. A multiplicação por u é uma isometria M_u que leva 1 em u e $1^\perp$ em $u^\perp$, e portanto conjuga a reflexão R_1 em $1^\perp$ na reflexão R_u em $u^\perp$,

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo. Segue do Teorema de Cartan-Dieudonné que toda rotação do $\mathbb{R}^4$ é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões em hiperplanos.

Proposição

Seja u um quatérnion unitário. Então a reflexão de $\mathbb{H}$ no hiperplano $u^\perp$ é a aplicação $x \mapsto -u\bar{x}u$.

Demonstração. A reflexão em $\Im\mathbb{H} = 1^\perp$ é $x \mapsto -\bar{x}$. A multiplicação por u é uma isometria M_u que leva 1 em u e $1^\perp$ em $u^\perp$, e portanto conjuga a reflexão R_1 em $1^\perp$ na reflexão R_u em $u^\perp$, isto é,

$$R_u = M_u \circ R_1 \circ M_u^{-1}.$$

Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é uma isometria que preserva a orientação — isto é, tem determinante positivo. Segue do Teorema de CARTAN-DIEUDONNÉ que toda rotação do $\mathbb{R}^4$ é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões em hiperplanos.

Proposição

Seja u um quatérnion unitário. Então a reflexão de $\mathbb{H}$ no hiperplano $u^\perp$ é a aplicação $x \mapsto -u\bar{x}u$.

Demonstração. A reflexão em $\Im\mathbb{H} = 1^\perp$ é $x \mapsto -\bar{x}$. A multiplicação por u é uma isometria M_u que leva 1 em u e $1^\perp$ em $u^\perp$, e portanto conjuga a reflexão R_1 em $1^\perp$ na reflexão R_u em $u^\perp$, isto é,

$$R_u = M_u \circ R_1 \circ M_u^{-1}.$$

Logo

$$R_u x = M_u R_1 M_u^{-1} x = M_u R_1(\bar{u}x) = M_u(-\bar{x}u) = -u\bar{x}u,$$

como desejado. $\square$

Teorema

Toda rotação de $\mathbb{R}^4$ se escreve na forma

$$x \mapsto uxv$$

onde u e v são quatérnions unitários.

Teorema

Toda rotação de $\mathbb{R}^4$ se escreve na forma

$$x \mapsto uxv$$

onde u e v são quatérnions unitários.

Dem. Toda transformação desse tipo é uma isometria e tem determinante positivo (pois u e v podem cada um ser unidos a $1 \in S^3 \subset \mathbb{H}$ por uma curva em S^3, e o determinante é uma função contínua).

Teorema

Toda rotação de $\mathbb{R}^4$ se escreve na forma

$$x \mapsto uxv$$

onde u e v são quatérnions unitários.

Dem. Toda transformação desse tipo é uma isometria e tem determinante positivo (pois u e v podem cada um ser unidos a $1 \in S^3 \subset \mathbb{H}$ por uma curva em S^3, e o determinante é uma função contínua).
Reciprocamente, segue do Teorema de Cartan-Dieudonné e da proposição anterior que toda rotação é da forma

$$u_{2n} \cdots \bar{u}_3 u_2 \bar{u}_1 x \bar{u}_1 u_2 \bar{u}_3 \cdots u_{2n}$$

para quatérnions unitários.

Teorema

Toda rotação de $\mathbb{R}^4$ se escreve na forma

$$x \mapsto uxv$$

onde u e v são quatérnions unitários.

Dem. Toda transformação desse tipo é uma isometria e tem determinante positivo (pois u e v podem cada um ser unidos a $1 \in S^3 \subset \mathbb{H}$ por uma curva em S^3, e o determinante é uma função contínua).
Reciprocamente, segue do Teorema de Cartan-Dieudonné e da proposição anterior que toda rotação é da forma

$$u_{2n} \cdots \bar{u}_3 u_2 \bar{u}_1 x \bar{u}_1 u_2 \bar{u}_3 \cdots u_{2n}$$

para quatérnions unitários. Essa transformação tem a forma desejada. $\square$

Definamos agora

$$\rho : S^3 \times S^3 \to SO(4), \qquad \rho(q_1, q_2)x = q_1 x q_2^{-1}.$$

Definamos agora

$$\rho : S^3 \times S^3 \to SO(4), \qquad \rho(q_1, q_2)x = q_1 x q_2^{-1}.$$

Note que $\rho(q_1, q_2)$ é de fato uma isometria de $\mathbb{R}^4$ (por a norma ser multiplicativa) que preserva a orientação, e também que ρ é um homomorfismo de grupos.

Definamos agora

$$\rho : S^3 \times S^3 \to SO(4), \qquad \rho(q_1, q_2)x = q_1 x q_2^{-1}.$$

Note que $\rho(q_1, q_2)$ é de fato uma isometria de $\mathbb{R}^4$ (por a norma ser multiplicativa) que preserva a orientação, e também que ρ é um homomorfismo de grupos. Além disso, segue do teorema anterior que ρ é sobrejetora.

Definamos agora

$$\rho : S^3 \times S^3 \to SO(4), \qquad \rho(q_1, q_2)x = q_1 x q_2^{-1}.$$

Note que $\rho(q_1, q_2)$ é de fato uma isometria de $\mathbb{R}^4$ (por a norma ser multiplicativa) que preserva a orientação, e também que ρ é um homomorfismo de grupos. Além disso, segue do teorema anterior que ρ é sobrejetora. Finalmente, $\ker \rho = \{\pm(1,1)\}$.

Definamos agora

$$\rho : S^3 \times S^3 \to SO(4), \qquad \rho(q_1, q_2)x = q_1 x q_2^{-1}.$$

Note que $\rho(q_1, q_2)$ é de fato uma isometria de $\mathbb{R}^4$ (por a norma ser multiplicativa) que preserva a orientação, e também que ρ é um homomorfismo de grupos. Além disso, segue do teorema anterior que ρ é sobrejetora. Finalmente, $\ker \rho = \{\pm(1,1)\}$. Segue que temos um isomorfismo de grupos (que é também um homeomorfismo):

$$SO(4) \cong S^3 \times S^3 / \{\pm(1,1)\}.$$

Definamos agora

$$\rho : S^3 \times S^3 \to SO(4), \qquad \rho(q_1, q_2)x = q_1 x q_2^{-1}.$$

Note que $\rho(q_1, q_2)$ é de fato uma isometria de $\mathbb{R}^4$ (por a norma ser multiplicativa) que preserva a orientação, e também que ρ é um homomorfismo de grupos. Além disso, segue do teorema anterior que ρ é sobrejetora. Finalmente, $\ker \rho = \{\pm(1,1)\}$. Segue que temos um isomorfismo de grupos (que é também um homeomorfismo):

$$SO(4) \cong S^3 \times S^3/\{\pm(1,1)\}.$$

"Uma rotação de $\mathbb{R}^4$ é um par de quatérnions unitários, a menos de multiplicação por -1."

Cíclico	$\mathbb{Z}_n \subset SO(2)$	order n
Diedral	D_n	order $2n$

Cíclico	$\mathbb{Z}_n \subset SO(2)$	order n
Diedral	D_n	order $2n$

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2.

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade.

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade. O conjunto P de pólos é finito, tem cardinalidade par e é invariante por G.

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade. O conjunto P de pólos é finito, tem cardinalidade par e é invariante por G. (De fato, se $p \in P$ é fixo por $g \in G$, então para todo $h \in G$ temos que hp é fixo por hgh^{-1}.)

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade. O conjunto P de pólos é finito, tem cardinalidade par e é invariante por G. (De fato, se $p \in P$ é fixo por $g \in G$, então para todo $h \in G$ temos que hp é fixo por hgh^{-1}.) Seja r o número de órbitas de G em P, e escolhamos um ponto p_i em cada órbita. Então:

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade. O conjunto P de pólos é finito, tem cardinalidade par e é invariante por G. (De fato, se $p \in P$ é fixo por $g \in G$, então para todo $h \in G$ temos que hp é fixo por hgh^{-1}.) Seja r o número de órbitas de G em P, e escolhamos um ponto p_i em cada órbita. Então:

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{|G_{p_i}|}\right).$$

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade. O conjunto P de pólos é finito, tem cardinalidade par e é invariante por G. (De fato, se $p \in P$ é fixo por $g \in G$, então para todo $h \in G$ temos que hp é fixo por hgh^{-1}.) Seja r o número de órbitas de G em P, e escolhamos um ponto p_i em cada órbita. Então:

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{|G_{p_i}|}\right).$$

(Esta equação segue da fórmula de Riemann-Hurwitz para recobrimentos ramificados ou, mais simplesmente, da fórmula de Burnside $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$.)

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade. O conjunto P de pólos é finito, tem cardinalidade par e é invariante por G. (De fato, se $p \in P$ é fixo por $g \in G$, então para todo $h \in G$ temos que hp é fixo por hgh^{-1}.) Seja r o número de órbitas de G em P, e escolhamos um ponto p_i em cada órbita. Então:

$$2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)=\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{|G_{p_i}|}\right).$$

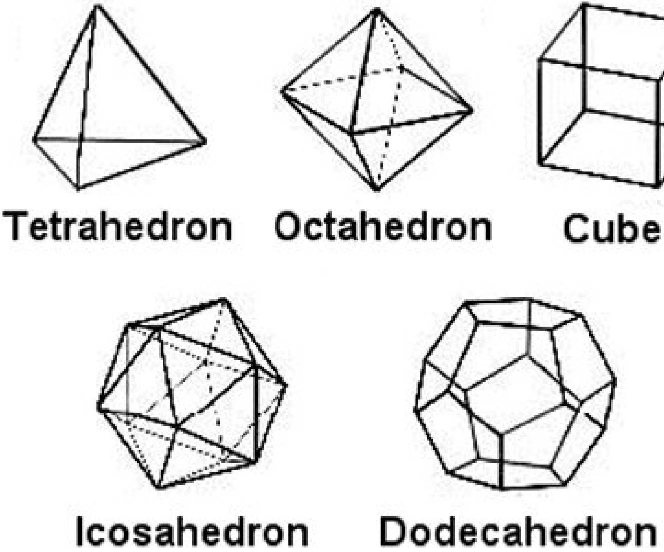
(Esta equação segue da fórmula de Riemann-Hurwitz para recobrimentos ramificados ou, mais simplesmente, da fórmula de Burnside $r=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|$.) Uma busca sistemática das soluções inteiras positivas nos dá a classificação: $(n_i=|G_{p_i}|)$

Seja G um subgrupo finito de $SO(3)$. Então G age na esfera unitária centrada na origem S^2. Um *pólo* de G é um ponto de S^2 fixo por algum elemento de G que não é a identidade. O conjunto P de pólos é finito, tem cardinalidade par e é invariante por G. (De fato, se $p \in P$ é fixo por $g \in G$, então para todo $h \in G$ temos que hp é fixo por hgh^{-1}.) Seja r o número de órbitas de G em P, e escolhamos um ponto p_i em cada órbita. Então:

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{|G_{p_i}|}\right).$$

(Esta equação segue da fórmula de Riemann-Hurwitz para recobrimentos ramificados ou, mais simplesmente, da fórmula de Burnside $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$.) Uma busca sistemática das soluções inteiras positivas nos dá a classificação: $(n_i = |G_{p_i}|)$

Grupo	*Classe de isom.*	*Ordem*	$(n_1, \ldots, n_r)$
Cíclico C_n	$\mathbb{Z}_n$	n	(n, n)
Diedral D_n	D_n	$2n$	$(2, 2, n)$
Tetraedral T	A_4	12	$(2, 3, 3)$
Octaedral O	S_4	24	$(2, 3, 4)$
Icosaedral I	A_5	60	$(2, 3, 5)$


Tetrahedron
Octahedron
Cube
Icosahedron
Dodecahedron

As pré-imagens dos subgrupos finitos de $SO(3)$ pelo recobrimento duplo $S^3 = SU(2) \to SO(3)$ fornecem exemplos subgrupos finitos de $SU(2)$.

As pré-imagens dos subgrupos finitos de $SO(3)$ pelo recobrimento duplo $S^3 = SU(2) \to SO(3)$ fornecem exemplos subgrupos finitos de $SU(2)$. Esses são os chamados *grupos poliedrais binários:*

Grupo	Ordem
$C_n = \{e^{2\pi ik} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$	n
$D_n^* = C_n \cup jC_n$	$2n$
$T^* = D_2^* \cup \{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2\}$	24
$O^* = T^* \cup ((1+i)/\sqrt{2})T^*$	48
$I^* = T^* \cup \sigma T^* \cup \sigma^2 T^* \cup \sigma^3 T^* \cup \sigma^4 T^*$	120

Aqui $D_2^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $\sigma = \frac{1}{2}(\tau + i + j/\tau)$ e $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ é a razão áurea.

As pré-imagens dos subgrupos finitos de $SO(3)$ pelo recobrimento duplo $S^3 = SU(2) \to SO(3)$ fornecem exemplos subgrupos finitos de $SU(2)$. Esses são os chamados *grupos poliedrais binários:*

Grupo	Ordem
$C_n = \{e^{2\pi ik} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$	n
$D_n^* = C_n \cup jC_n$	$2n$
$T^* = D_2^* \cup \{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2\}$	24
$O^* = T^* \cup ((1+i)/\sqrt{2})T^*$	48
$I^* = T^* \cup \sigma T^* \cup \sigma^2 T^* \cup \sigma^3 T^* \cup \sigma^4 T^*$	120

Aqui $D_2^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $\sigma = \frac{1}{2}(\tau + i + j/\tau)$ e $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ é a razão áurea. É fácil mostrar que essa lista exaure todos os subgroups finitos de $SU(2)$.

As pré-imagens dos subgrupos finitos de $SO(3)$ pelo recobrimento duplo $S^3 = SU(2) \to SO(3)$ fornecem exemplos subgrupos finitos de $SU(2)$. Esses são os chamados *grupos poliedrais binários:*

Grupo	Ordem
$C_n = \{e^{2\pi ik} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$	n
$D_n^* = C_n \cup jC_n$	$2n$
$T^* = D_2^* \cup \{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2\}$	24
$O^* = T^* \cup ((1+i)/\sqrt{2})T^*$	48
$I^* = T^* \cup \sigma T^* \cup \sigma^2 T^* \cup \sigma^3 T^* \cup \sigma^4 T^*$	120

Aqui $D_2^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $\sigma = \frac{1}{2}(\tau + i + j/\tau)$ e $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ é a razão áurea. É fácil mostrar que essa lista exaure todos os subgroups finitos de $SU(2)$.Cada um desses grupos age (sem pontos fixos) em $S^3 = SU(2)$ por multiplicação à esquerda, e o quociente é uma variedade de dimensão 3.

As pré-imagens dos subgrupos finitos de $SO(3)$ pelo recobrimento duplo $S^3 = SU(2) \to SO(3)$ fornecem exemplos subgrupos finitos de $SU(2)$. Esses são os chamados *grupos poliedrais binários:*

Grupo	Ordem
$C_n = \{e^{2\pi ik} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$	n
$D_n^* = C_n \cup jC_n$	$2n$
$T^* = D_2^* \cup \{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2\}$	24
$O^* = T^* \cup ((1+i)/\sqrt{2})T^*$	48
$I^* = T^* \cup \sigma T^* \cup \sigma^2 T^* \cup \sigma^3 T^* \cup \sigma^4 T^*$	120

Aqui $D_2^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $\sigma = \frac{1}{2}(\tau + i + j/\tau)$ e $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ é a razão áurea. É fácil mostrar que essa lista exaure todos os subgroups finitos de $SU(2)$.Cada um desses grupos age (sem pontos fixos) em $S^3 = SU(2)$ por multiplicação à esquerda, e o quociente é uma variedade de dimensão 3. Por exemplo, S^3/I^* é a *espaço dodecaedral de* Poincaré: tem a homologia da 3-esfera, mas não é simplesmente conexa (importante na formulação da Conjectura de Poincaré e no desenvolvimento da Topologia Algébrica).

As pré-imagens dos subgrupos finitos de $SO(3)$ pelo recobrimento duplo $S^3 = SU(2) \to SO(3)$ fornecem exemplos subgrupos finitos de $SU(2)$. Esses são os chamados *grupos poliedrais binários:*

Grupo	Ordem
$C_n = \{e^{2\pi ik} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$	n
$D_n^* = C_n \cup jC_n$	$2n$
$T^* = D_2^* \cup \{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2\}$	24
$O^* = T^* \cup ((1+i)/\sqrt{2})T^*$	48
$I^* = T^* \cup \sigma T^* \cup \sigma^2 T^* \cup \sigma^3 T^* \cup \sigma^4 T^*$	120

Aqui $D_2^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $\sigma = \frac{1}{2}(\tau + i + j/\tau)$ e $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ é a razão áurea. É fácil mostrar que essa lista exaure todos os subgroups finitos de $SU(2)$.Cada um desses grupos age (sem pontos fixos) em $S^3 = SU(2)$ por multiplicação à esquerda, e o quociente é uma variedade de dimensão 3. Por exemplo, S^3/I^* é a *espaço dodecaedral de* Poincaré: tem a homologia da 3-esfera, mas não é simplesmente conexa (importante na formulação da Conjectura de Poincaré e no desenvolvimento da Topologia Algébrica).

Subgrupos finitos de $SO(4) \cong SU(2) \times_{\mathbb{Z}_2} SU(2)$ são subgrupos finitos de $P_1 \times_{\mathbb{Z}_2} P_2$, onde P_1, P_2 são grupos poliedrais binários.

S^3 como união de dois toros sólidos

S^3 como união de dois toros sólidos

Escrevamos $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

Escrevamos $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Definamos

$$f : S^3 \to \mathbb{R} \qquad f(z, w) = |z|^2 - |w|^2.$$

Escrevamos $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Definamos

$$f : S^3 \to \mathbb{R} \qquad f(z, w) = |z|^2 - |w|^2.$$

Então cada conjunto de nível $(-1 \leq r \leq 1)$

$$f^{-1}(r)$$

é um produto de dois círculos, ou *toro*:

$$T_r : |z| = \sqrt{\frac{1+r}{2}}, |w| = \sqrt{\frac{1-r}{2}}.$$

Escrevamos $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Definamos

$$f : S^3 \to \mathbb{R} \qquad f(z, w) = |z|^2 - |w|^2.$$

Então cada conjunto de nível $(-1 \leq r \leq 1)$

$$f^{-1}(r)$$

é um produto de dois círculos, ou *toro*:

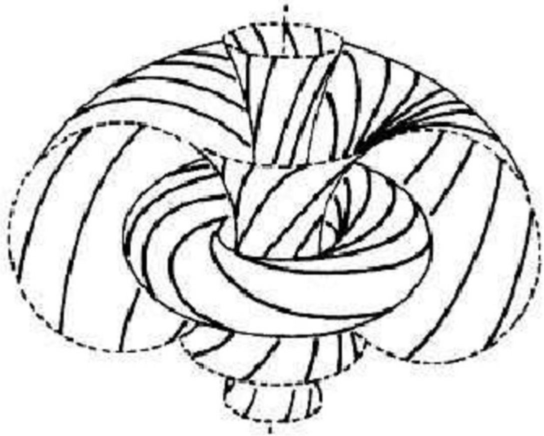
$$T_r : |z| = \sqrt{\frac{1+r}{2}}, |w| = \sqrt{\frac{1-r}{2}}.$$

Agora

$$\cup_{r \leq 0} T_r \quad \text{e} \quad \cup_{r \geq 0} T_r$$

descrevem dois toros sólidos, colados ao longo de sua fronteira comum

$$T_0 : |z| = |w| = 1/\sqrt{2}.$$



Continuemos a ver $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, e consideremos também $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

Continuemos a ver $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, e consideremos também $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Definamos então

$$h : S^3 \to S^2, \qquad h(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}).$$

Continuemos a ver $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, e consideremos também $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Definamos então

$$h : S^3 \to S^2, \qquad h(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}).$$

h está bem definida e é contínua (e suave).

Continuemos a ver $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, e consideremos também $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Definamos então

$$h : S^3 \to S^2, \qquad h(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}).$$

h está bem definida e é contínua (e suave). Note que h é constante nos círculos máximos de S^3 dados por

$$S^1(z, w) = \{(e^{i\theta} z, e^{i\theta} w) \mid \theta \in \mathbb{R}\},$$

Continuemos a ver $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, e consideremos também $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Definamos então

$$h : S^3 \to S^2, \qquad h(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}).$$

h está bem definida e é contínua (e suave). Note que h é constante nos círculos máximos de S^3 dados por

$$S^1(z, w) = \{(e^{i\theta} z, e^{i\theta} w) \mid \theta \in \mathbb{R}\},$$

e, de fato, esses círculos são exatamente os conjuntos de nível de h, como é fácil calcular.

Continuemos a ver $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, e consideremos também $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Definamos então

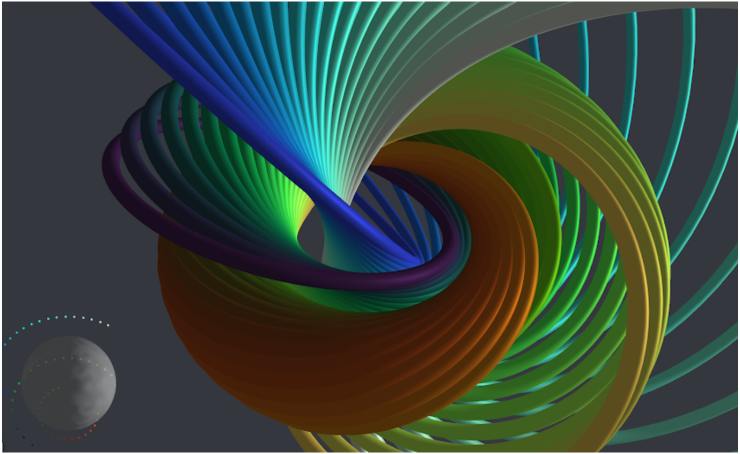
$$h : S^3 \to S^2, \qquad h(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}).$$

h está bem definida e é contínua (e suave). Note que h é constante nos círculos máximos de S^3 dados por

$$S^1(z, w) = \{(e^{i\theta} z, e^{i\theta} w) \mid \theta \in \mathbb{R}\},$$

e, de fato, esses círculos são exatamente os conjuntos de nível de h, como é fácil calcular. A folheação de S^3 por toros é dada pelas pré-imagens da folheação de S^2 por círculos de latitude.

A fibração de Hopf, II



Dois círculos de nível de h estão visivelmente “enlaçados”.

Dois círculos de nível de h estão visivelmente “enlaçados”. Isso mostra que h não pode ser continuamente deformada a uma aplicação constante $S^3 \to S^2$, que leva todo o S^3 em um único ponto.

Dois círculos de nível de h estão visivelmente "enlaçados". Isso mostra que h não pode ser continuamente deformada a uma aplicação constante $S^3 \to S^2$, que leva todo o S^3 em um único ponto. Nós expressamos isso formalmente dizendo que o terceiro grupo de homotopia $\pi_3(S^2)$ é não-trivial.

Dois círculos de nível de h estão visivelmente "enlaçados". Isso mostra que h não pode ser continuamente deformada a uma aplicação constante $S^3 \to S^2$, que leva todo o S^3 em um único ponto. Nós expressamos isso formalmente dizendo que o terceiro grupo de homotopia $\pi_3(S^2)$ é não-trivial. A descoberta de HOPF, em 1931, durante os primórdios do desenvolvimento da teoria de homotopia, causou grande impacto, pois mostrou que, ao contrário das expectativas da época, os grupos de homotopia podem ser mais complicados do que os grupos de homologia ($H_3(S^2) = \{0\}$).

HEINZ HOPF (1894-1971).

Avaliação

Escolher um dos seguintes tópicos e dissertar livremente:

1. Os octônions.
2. Subgrupos finitos de $SO(3)$, $O(3)$, $SO(4)$, etc.
3. O espaço dodecaedral de Poincaré.
4. A fibração de Hopf.
5. A fórmula de Riemann-Hurwitz.

Escrever, no máximo, cinco páginas, excluindo figuras e referências. O prazo para entrega é de até 07/12.

Escolher um dos seguintes tópicos e dissertar livremente:

1. Os octônions.
2. Subgrupos finitos de $SO(3)$, $O(3)$, $SO(4)$, etc.
3. O espaço dodecaedral de Poincaré.
4. A fibração de Hopf.
5. A fórmula de Riemann-Hurwitz.

Escrever, no máximo, cinco páginas, excluindo figuras e referências. O prazo para entrega é de até 07/12.

Bibliografia sugerida:

- Toth, Gabor. Glimpses of algebra and geometry. Second edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002. (Tópicos 2 e 4)
- Conway, John H.; Smith, Derek A. On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003. (Tópico 1)
- Thurston, William P. Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. (Tópicos 3 e 4)
- Zimmermann, Bruno P. On finite groups acting on spheres and finite subgroups of orthogonal groups. Sib. Èlektron. Mat. Izv. 9 (2012), 1–12. (E-print arXiv:1108.2602 [math.GT]) (Tópicos 2 e 5)
- Arapura, Donu. Notes on Algebra, 2017. (https://www.math.purdue.edu/~arapura/algebra/algebra.pdf) (Tópico 2)
- Baez, John C. The octonions. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 39 (2002), no. 2, 145–205. (https://math.ucr.edu/home/baez/octonions/) (Tópico 1)