TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

MARCEL VINHAS BERTOLINI

Resumo. Neste texto demonstro o Teorema de Riemann-Roch a partir das relações bilineares de Riemann, nos moldes das referências [1] e [2].

Sejam X uma superfície de Riemann compacta e conexa de gênero g, e D um *divisor* em X, isto é, uma soma formal finita de pontos de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$:

$$D = n_1 p_1 + \cdots + n_m p_m, \qquad n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } p_i \in X,$$

entendendo aqui como irrelevante a ordem em que a soma é escrita. O divisor $-D$ é definido invertendo-se os sinais dos coeficientes de D, e divisores em X podem ser somados de maneira natural: agrupando por possíveis pontos em comum e somando seus coeficientes. O *grau* $\deg D$ de um divisor D é a soma $n_1 + \cdots + n_k$ de seus coeficientes.

Um divisor D como acima *limita* uma função meromorfa f definida em X se f é holomorfa em $X \setminus \{p_1, \dots p_m\}$ e, em torno de cada p_i, tem expressão da forma

$$f(z) = \sum_{j=-n_i}^{\infty} a_j z^j,$$

com coeficientes a_j possivelmente nulos. Em outras palavras, D limita f se

(1) f é holomorfa em $X \setminus \{p_1, \dots p_m\}$;
(2) Cada ponto p_i que aparece em D com coeficiente n_i positivo é "no pior dos casos" um pólo de ordem n_i de f (podendo nem ser um pólo);
(3) Cada ponto p_i que aparece em D com coeficiente n_i negativo é zero de ordem $\geq -n_i$ de f.

O conjunto $L(D)$ das funções meromorfas em X limitadas por D é um espaço vetorial complexo cuja dimensão será denotada por $l(D)$. Analogamente, um divisor limita 1-formas meromorfas em X, e a dimensão do espaço vetorial complexo $\Omega(D)$ de tais 1-formas será denotada por $i(D)$.

Teorema 1 (Riemann-Roch)**.**

$$l(D) - i(-D) = \deg D - g + 1 \tag{1}$$

A desigualdade $l(D) \geq \deg D - g + 1$ é conhecida como *desigualdade de Riemann*, sendo que o termo de correção $i(-D)$ costuma ser atribuido a Roch. Como um exemplo de conseqüência dessa desigualdade, observe que $l(D) \geq 2$ se $\deg D \geq g+1$ e, tomando D como a soma de $g+1$ pontos de X, isso significa que existem funções meromorfas não-constantes com possíveis pólos de ordem no máximo 1 nesses $g+1$ pontos. Uma outra conseqüência do Teorema é a fórmula de Riemann-Hurwitz, normalmente demonstrada por métodos topológicos, mas não farei essa demonstração aqui — veja a pag. 77 de [1].

Prova do Teorema - Parte 1. Primeiro considere o divisor nulo $D = 0$. A única restrição que esse divisor impõe sobre as funções de $L(0)$ é que elas não tenham pólos e, portanto, $L(0)$ é o espaço de funções holomorfas em X. Como uma superfície de Riemann compacta não admite funções holomorfas não-constantes (Liouville), $L(0)$ é identificável com $\mathbb{C}$, e $l(0) = 1$. Já $\Omega(0)$ é constituído por 1-formas holomorfas em X, e a teoria de tais 1-formas, chamadas de "abelianas de primeira espécie", garante que $i(0) = g$, o gênero de X (Teorema 10-3, pag. 252 de [2]). Com isso, (1) se torna

$$1 - g = \deg 0 - g + 1,$$

e vale o Teorema.

Considere agora um divisor D *efetivo*, isto é, com coeficientes n_i positivos.

Fixe curvas $\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g$ em X que representem uma base canônica da homologia de X e sejam disjuntas dos pontos p_i de D. Os α e *β-períodos* de uma 1-forma ω são as integrais $\int_{\alpha_k} \omega$ e $\int_{\beta_k} \omega$, $k = 1, \ldots, g$. Considere também, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = -n_i - 1, \ldots, -2$ as 1-formas ω_{ij} holomorfas em $X \setminus \{p_i\}$ com expressão $\omega_{ij} = z^j dz$ em torno de p_i e normalizadas de forma que tenham α-períodos nulos (pag. 257 de [2]).

Nas mesmas coordenadas em torno de cada p_i que as utilizadas na expressão das ω_{ij}, escreva a diferencial df de uma função f em $L(D)$:

$$df = (\sum_{j=-n_i-1}^{\infty} c_{ij} z^j) dz.$$

A atribuição $f \mapsto (c_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = -n_i - 1, \ldots, -2$ define uma transformação linear $L(D) \to \mathbb{C}^{\deg D}$ cujo núcleo é constituído por funções f cujas df têm tais c_{ij} nulos. Como essas diferenciais também têm resíduos c_{ij} nulos, são holomorfas em X. Daí, por os α-períodos de df se anularem, segue que df se anula (Corolário 10-1, pag. 254 de [2]), e f é constante. Assim, o núcleo da transformação linear é unidimensional e, denotando por V a imagem dessa transformação,

$$l(D) = \dim V + 1. \tag{2}$$

Dado um vetor (c_{ij}) de $\mathbb{C}^{\deg D}$, ele está em V se, e somente se, a 1-forma

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=-n_i-1}^{-2} c_{ij} \omega_{ij}$$

possui a mesma parte principal que df para alguma $f \in L(D)$ e isso ocorre se, e somente se, seus β-períodos são nulos, o que ocorre precisamente quando (c_{ij}) é solução do sistema linear

$$B_{ij}^k c_{ij} = 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad j = -n_i - 1, \ldots, -2 \quad k = 1, \ldots, g,$$

onde B_{ij}^k é o β_k-período de ω_{ij}. Isso caracteriza V como o conjunto solução de um sistema linear com $\deg D$ incógnitas e g equações, e segue que $\dim V \geq \deg D - g$.

Substituindo em (2) é obtida a desigualdade de Riemann:

$$l(D) \geq \deg D - g + 1.$$

As *relações bilineares de Riemann para diferenciais de segunda espécie* (Corolário 10-5, pag. 260 de [Springer]) possibilitam escrever os coeficientes B_{ij}^k de uma outra maneira: considere em $\Omega(0)$ a base constituída por 1-formas holomorfas φ_k, $k = 1, \ldots, g$, tais que o α_l-período de φ_k é igual a 1 se $k = l$ e igual a 0 caso contrário (pag. 255 de [2]). No mesmo sistema de coordenadas utilizado acima,

$$\varphi_k = (\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}^k z^j) dz$$

em torno de cada p_i e, com isso,

$$B_{ij}^k = 2\pi i \frac{b_{i,-j-2}^k}{-j-1} \quad i = 1, \ldots, m \quad j = -n_i - 1, \ldots, -2 \quad k = 1, \ldots, g.$$

Finalmente, considere a transformação linear que a cada elemento de $\Omega(0)$, isto é, 1-forma holomorfa em X com expressão $\sum_{j=0}^{\infty} e_{ij} z^j dz$ em torno de p_i, atribui o vetor (e_{ij}), $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n_i - 1$, de $\mathbb{C}^{\deg D}$. O núcleo dessa transformação é igual $\Omega(-D)$, e sua matriz relativa à base φ_k e a base canônica de $\mathbb{C}^{\deg D}$ é a transposta da matriz (b_{ij}^k), $i = 1, \ldots, g$, $j = 0, \ldots, n - 1$, $k = 1, \ldots, g$. Logo,

$$\dim V = \deg D - \dim \Omega(0) + i(-D) = \deg D - g + i(-D),$$

que é equivalente a (1). Isso conclui a prova do Teorema para divisores efetivos. $\square$

Antes de concluir a prova do Teorema, será feita uma análise mais fina das quantidades que ele relaciona e uma reformulação popular da igualdade (1).

Dada uma função meromorfa não-nula f definida em X, seu divisor associado, denotado por (f), é a soma dos pólos e zeros de f com coeficientes iguais a suas ordens, com sinais positivos para zeros e negativos para pólos. À função nula associe o divisor nulo. Divisores desse tipo são chamados de *principais*. Como a soma de ordens de pólos e zeros de uma função meromorfa em uma superfícies de Riemann compacta se anula, todos divisores principais têm grau zero.

Analogamente, dada uma 1-forma meromorfa não-nula ω definida em X, há seu divisor (ω) associado; e à 1-forma nula associa-se o divisor nulo. Divisores desse tipo são chamados de *canônicos* e denotados por K. Observe que

$$\deg((f\omega)) = \deg((f)) + \deg((\omega)) = \deg((\omega)).$$

Dadas ω_1 e ω_2, existe uma função meromorfa f tal que $\omega_1 = f\omega_2$ e, portanto, todos divisores canônicos têm o mesmo grau $\deg K$. Será provado mais abaixo que $\deg K = 2g - 2$.

Divisores D_1 e D_2 são *equivalentes* se $D_1 - D_2$ for principal. Divisores equivalentes têm mesmo grau, e espaços $L(D)$ e $\Omega(D)$ isomorfos. Portanto, a igualdade do Teorema se aplica a classes de equivalência de divisores.

Além disso, o espaço $\Omega(-D)$ é isomorfo a $L(K-D)$, onde K é qualquer divisor canônico, pelo isomorfismo $\zeta \mapsto \zeta/\omega$, onde $K=(\omega)$. Com isso, (1) é equivalente a

$$l(D) - l(K-D) = \deg D - g + 1. \tag{3}$$

Segue daí e do Teorema de Riemann-Roch para divisores efetivos, provado acima, que $\deg K = 2g-2$ para qualquer divisor canônico K: se $g>1$, conforme mencionado acima, existem 1-formas holomorfas não-nulas em X, e o divisor canônico K associado a tal 1-forma é efetivo. Logo, vale (3) para $D=K$, e isso também já foi provado para $D=0$. Daí,

$$l(K) - l(0) = \deg K - g + 1 \quad \text{e} \quad l(0) - l(K) = -g + 1.$$

Somando essas duas equações, conclui-se que $\deg K = 2g-2$. Para $g=0$, considere $K=(df)$, com $f(z)=1/z$.

Conclusão da prova do Teorema. Resta argumentar sobre divisores não-efetivos. Observe que se $l(D)>0$, então existe f não-nula em $L(D)$, $D+(f)$ é divisor efetivo equivalente a D, e vale o Teorema. Daí, se $i(-D)=l(K-D)>0$, então $K-D$ é equivalente a um divisor efetivo e (3) já está provada. Resta então considerar o caso em que $l(D)=i(-D)=0$ e, sob essa hipótese, mostrar que

$$\deg D = g-1.$$

Escreva $D=D_1-D_2$ com D_1 e D_2 inteiros e sem pontos em comum, de modo que $\deg D = \deg D_1 - \deg D_2$. Daí, a desigualdade de Riemann provada acima garante que:

$$l(D_1) \geq \deg D_1 - g + 1 = \deg(D_2) + \deg(D) - g + 1.$$

Suponha que $\deg D \geq g$. Então $l(D_1) \geq \deg D_2 + 1$, e existe uma função não-nula em $L(D_1)$ que se anula em cada ponto de D_2 com a devida ordem, já que essa segunda exigência impõem $\deg D_2$ condições lineares em $L(D_1)$ que, por essa desigualdade, possui dimensão alta o bastante para que exista tal função. Logo, $L(D_1-D_2)=L(D)$ teria uma função não-nula, contrariando a hipótese, e segue que $\deg D \leq g-1$. Aplicando essa desigualdade a $K-D$,

$$g-1 \geq \deg(K-D) = \deg K - \deg D = 2g-2-\deg D,$$

ou seja, $\deg D \geq g-1$, o que conclui a prova do resultado. □

Finalmente, vimos no curso o isomorfismo $L(D) \equiv H^0(X,\mathcal{O}(D))$ e, denotando por $h^0(X,\mathcal{O}(D))$ a dimensão do espaço $H^0(X,\mathcal{O}(D))$, o Teorema de Riemann-Roch é equivalente a:

$$h^0(X,\mathcal{O}(D)) - h^0(X,\mathcal{O}(K-D)) = \deg D - g + 1. \tag{4}$$

Referências

[1] Hershel M Farkas and Irwin Kra. *Riemann surfaces.* Springer, 1992.

[2] G. Springer. *Introduction to Riemann Surfaces.* AMS Chelsea Publishing Series. American Mathematical Society, 2001.