1 $\bar{\partial}$-lema de Poicaré

Antes de começarmos a demonstração do lema acima, é importante relembrar que, dada uma integral imprópria do tipo $\int_A \frac{f(w)}{w-z_0}dw \wedge d\overline{w}$, onde A é um aberto que contém o ponto z_0 em $\mathbb{C}$ e f não possui singularidades em $\mathbb{C}$, o valor principal de Cauchy é definido como:

$$\int_A \frac{f(w)}{w-z_0}dw \wedge d\overline{w} := \lim_{r\to 0} \int_{A\setminus B(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z_0}dw \wedge d\overline{w},$$

onde $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ denota a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em z_0.

Proposição 1.1. *(Primeiro Resultado) Sejam $a \in \mathbb{C}$, U uma vizinhança aberta de a e $\epsilon > 0$ tal que U contém o fecho de $B(a,\epsilon)$, ou seja, $\overline{B}(a,\epsilon) \subset U$. Então, se $\alpha = f d\bar{z} \in \mathcal{A}^{0,1}(U)$, a função:*

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,\epsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw \wedge d\overline{w}$$

satisfaz: $\alpha = \bar{\partial} g$, ou seja, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$.

Demonstração. Seja z_0 um ponto arbitrário de $B(a,\epsilon)$. Definindo $\delta := \epsilon - |z_0 - a|$, vale que $B(z_0,\delta) \subset B(a,\epsilon)$. Então, podemos tomar uma função corte como:

$$\Psi_{z_0}(z) := \begin{cases} 1 & , |z-z_0| \le \frac{\delta}{4}; \\ \exp\left(\frac{16}{3\delta^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - |z-z_0|^2}\right) & , \frac{\delta}{4} < |z-z_0| < \frac{\delta}{2}; \\ 0 & , |z-z_0| \ge \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Para esta função vale que o suporte de Ψ_{z_0} está contido em $\overline{B}(z_0, \frac{\delta}{2})$.

Definindo as funções $f_1 := \Psi_{z_0} \cdot f$ e $f_2 := (1 - \Psi_{z_0}) \cdot f$, temos que $f = f_1 + f_2$ e podemos definir as funções:

$$g_k(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,\epsilon)} \frac{f_k(w)}{w-z} dw \wedge d\overline{w}, \ k = 1, 2.$$

Para vermos que a função g_1 está bem definida, devemos lembrar primeiro que podemos estender a integração a todo o plano complexo $\mathbb{C}$, pois o suporte da função Ψ_{z_0} já está contido no domínio de integração $B(a,\epsilon)$. Temos, então:

$$g_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f_1(w)}{w-z} dw \wedge d\overline{w}.$$

Tomando $w - z = x + iy$, com z fixo, temos $dw = dx + idy$. Fazendo a mudança de variáveis: $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos que $dw \wedge d\overline{w} =$

$-2irdr \wedge d\phi$. Então, segue que:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f_1(z+re^{i\phi})}{re^{i\phi}}(-2ir)drd\phi, \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} f_1(z+re^{i\phi})e^{-i\phi}drd\phi. \end{aligned} \tag{1}$$

Mostrando que a função g_1 está bem definida.

Temos que a função g_2 é dada através do valor principal de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{B(a,\epsilon)} \frac{f_2(w)}{w-z}dw \wedge d\overline{w} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int_{B(a,\epsilon)\setminus B(z,r)} \frac{f_2(w)}{w-z}dw \wedge d\overline{w}.$$

Logo para $z \in B(z_0, \frac{\delta}{4})$, temos que a região de integração não possui singularidades e a função f_2 se anula em uma vizinhança suficientemente pequena de z. Isso mostra que a função g_2 está bem definida em $B(z_0, \frac{\delta}{4})$. Desta maneira, mostramos que a função:

$$g(z) := g_1(z) + g_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B(a,\epsilon)} \frac{f(w)}{w-z}dw \wedge d\overline{w}$$

está bem definida em $B(z_0, \frac{\delta}{4}) \subset B(a,\epsilon)$, onde z_0 é um ponto arbitrário de $B(a,\epsilon)$. Isso mostra que a função g está bem definida para todo $z \in B(a,\epsilon)$.

Devido a função Ψ_{z_0}, temos que $f_2(z) = 0$ para todo $z \in B(z_0, \frac{\delta}{4})$. Logo, temos que, para $z \in B(z_0, \frac{\delta}{4})$, vale que a função $\frac{1}{w-z}$ é holomorfa se $w \notin B(z_0, \frac{\delta}{4})$ e, portanto, $\bar{\partial}\frac{1}{w-z} = 0$. Temos, então, que:

$$\frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B(a,\epsilon)} f_2(w)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{w-z}\right)dw \wedge d\overline{w} = 0, \quad z \in B(z_0, \frac{\delta}{4}),$$

pois f_2 se anula em $B(z_0, \frac{\delta}{4})$ e $\bar{\partial}\frac{1}{w-z}$ se anula fora de $B(z_0, \frac{\delta}{4})$.

Como a função f_1 não se anula como a função f_2 em $B(z_0, \frac{\delta}{4})$, partimos da expressão (1) aplicando o operador $\bar{\partial}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(f_1(z+re^{i\phi})\Big)e^{-i\phi}drd\phi \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \left[\frac{\partial f_1}{\partial w}\cancelto{0}{\frac{\partial(z+re^{i\phi})}{\partial \bar{z}}} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{w}}\cancelto{1}{\frac{\partial(\bar{z}+re^{-i\phi})}{\partial \bar{z}}}\right]e^{-i\phi}drd\phi \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{w}}e^{-i\phi}drd\phi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{B(a,\epsilon)} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{1}{w-z}dw \wedge d\overline{w}. \end{aligned} \tag{2}$$

Temos que o lado direito da igualdade em (2) é dado pelo valor principal de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int_{B(a,\epsilon)\setminus B(z,r)}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{w}}\cdot\frac{1}{w-z}dw\wedge d\overline{w}, \tag{3}$$

como:

$$d\left(\frac{f_1(w)}{w-z}dw\right) = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial \bar{w}}\cdot\frac{1}{w-z}+f_1(w)\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\left(\frac{1}{w-z}\right)\right]dw\wedge d\overline{w}$$

e por $\frac{1}{w-z}$ ser holomorfa no domínio de integração, vale que (3) é escrita como:

$$-\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int_{B(a,\epsilon)\setminus B(z,r)} d\left(\frac{f_1}{w-z}dw\right).$$

Utilizando esse resultado e através do teorema de Stokes temos que:

$$\begin{aligned}\bar{\partial} g_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int_{B(a,\epsilon)\setminus B(z,r)} d\left(\frac{f_1}{w-z}dw\right)\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int_{\partial[B(a,\epsilon)\setminus B(z,r)]}\frac{f_1(w)}{w-z}dw.\end{aligned}$$

Como o suporte de f_1 está inteiramente contido em $B(a,\epsilon)$, temos que a integral sobre a borda de $B(a,\epsilon)$ no sentido anti-horário se anula, restando somente a integral sobre a borda de $B(z,r)$ no sentido horário. Então, trocando o sentido de integração com o sinal na frente da integral, resulta que:

$$\begin{aligned}\bar{\partial} g_1(z) &= \left[\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int_{\partial B(z,r)}\frac{f_1(w)}{w-z}dw\right]\\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{f_1(z+re^{i\phi})}{re^{i\phi}}re^{i\phi}d\phi\right]\\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(z+\lim_{r\to 0} re^{i\phi})d\phi\right]\\ &= \left[\frac{1}{2\pi}f_1(z)\int_0^{2\pi} d\phi\right]\\ &= f_1(z).\end{aligned}$$

A proposição segue do fato que:

$$\bar{\partial} g(z) = \bar{\partial} g_1(z) + \bar{\partial} g_2(z) = \bar{\partial} g_1(z).$$

□

Proposição 1.2. *Sejam $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n$, U uma vizinhança de a em $\mathbb{C}^n$, $\epsilon=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$ com $\epsilon_i>0$ para $i=1,\ldots,n$ tal que $D_\epsilon(a)=\{(z_1,\ldots,z_n)\mid |z_i-a_i|<\epsilon_i\}$ é um polidisco cujo fecho está contido em U, ou seja, $\overline{D}_\epsilon(a)\subset U$. Então, se $\alpha\in\mathcal{A}^{p,q}(U)$ é $\bar{\partial}$-fechada e $q>0$, então existe uma forma $\beta\in\mathcal{A}^{p,q-1}(D_\epsilon(a))$ tal que $\alpha=\bar{\partial}\beta$ em $D_\epsilon(a)$.*

Demonstração. Seja, então, $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ denotado da seguinte maneira:

$$\alpha = \sum_{I,J} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

onde I denota um multi-índice crescente: $(i_1, i_2, \dots, i_p)$, com $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ e J um multi-índice crescente: $(j_1, j_2, \dots, j_q)$, com $j_1 < j_2 < \cdots < j_q$. Podemos escrever α como:

$$\alpha = \sum_I dz_I \wedge \left(\sum_J f_{IJ} d\bar{z}_J \right) = \sum_I dz_I \wedge \alpha_I,$$

onde $\alpha_I = \sum_J f_{IJ} d\bar{z}_J \in \mathcal{A}^{0,q}(U)$.

Como:

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{i,I,J} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = (-1)^p \sum_I dz_I \wedge \left(\sum_{i,J} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_J \right)$$

e as formas com multi-índices I diferentes são linearmente independentes, vale que:

$$\bar{\partial}\alpha = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}\alpha_I = 0, \ \forall I, \tag{4}$$

mostrando que α_I também é $\bar{\partial}$-fechada. Temos também que:

$$\alpha = \bar{\partial} \left(\sum_{I,L} g_{IL} dz_I \wedge d\bar{z}_L \right) \Leftrightarrow \alpha_I = \bar{\partial} \left((-1)^p \sum_L g_{IL} d\bar{z}_L \right), \ \forall I. \tag{5}$$

O interessante das relações (4) e (5) é que a demonstração do teorema é reduzida a demonstração de que para cada α_I $\bar{\partial}$-fechada existe uma forma $\gamma_I \in \mathcal{A}^{0,q-1}(D_\epsilon(a))$ tal que $\alpha_I = \bar{\partial}\gamma_I$. Devido a isso, daqui para frente, nos referiremos a α como uma forma em $\mathcal{A}^{0,q}(U)$.

Seja $k \in \{1, \dots, n\}$ o menor inteiro positivo tal que $d\bar{z}_i$ não ocorre em $\alpha = \sum_J f_J d\bar{z}_J$ para $i > k$. Caso k seja igual a n, não existem elementos $d\bar{z}_i$ para $i > n$. Pela definição de k e estarmos utilizando um multi-índice crescente, temos que $d\bar{z}_k$ aparece em α como $d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_{q-1}} \wedge d\bar{z}_k$ sempre que k pertence ao muti-índice J. Desta maneira, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{[J(k \in J)]} f_J d\bar{z}_J + \sum_{[J(k \notin J)]} f_J d\bar{z}_J \\
&= \sum_{[J(k \in J)]} f_J d\bar{z}_{J \setminus \{k\}} \wedge d\bar{z}_k + \sum_{[J(k \notin J)]} f_J d\bar{z}_J \\
&= \omega_1 \wedge d\bar{z}_k + \omega_2,
\end{aligned}$$

onde $\omega_1 := \sum_{[J(k\in J)]} f_J d\bar{z}_{J\setminus\{k\}}$ e $\omega_2 := \sum_{[J(k\notin J)]} f_J d\bar{z}_J$ não dependem de nenhum elemento $d\bar{z}_j$ com $j \geq k$.

O argumento a seguir será utilizado de maneira recursiva logo adiante e o caso em que $k = n$ será considerado ao mesmo tempo em que o desenvolveremos para o caso em que $k < n$ (para utilizarmos a recursividade).

Vamos definir o operador $\bar{\partial}_i$ atuando sobre uma forma arbitrária ρ pertencente a $\mathcal{A}^{0,q-1}(U)$, dada por $\rho = \sum_K h_K d\bar{z}_K$, como $\bar{\partial}_i\rho := \sum_K \frac{\bar{\partial} h_K}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_K$, onde K denota um multi-índice crescente: $(k_1, k_2, \dots, k_{q-1})$, com $k_1 < k_2 < \dots < k_{q-1}$.

Para o caso em que $k < n$, vale que α não depende dos elementos $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$. Portanto, como $\alpha = \sum_J f_J d\bar{z}_J$ é $\bar{\partial}$-fechada, através de $\bar{\partial}\alpha = 0$ concluímos que $\bar{\partial}_i\alpha = 0$ para todo $i > k$ pois os elementos que dependem de $d\bar{z}_i$ são linearmente independentes com os demais na equação $\bar{\partial}\alpha = 0$. Isso leva-nos a concluir que $\frac{\bar{\partial} f_J}{\partial \bar{z}_i} = 0$ para $i > k$, ou seja, f_J é uma função holomorfa nas variáveis $z_{k+1}, \dots, z_n$. Devemos ressaltar aqui que a mesma discussão não se aplica ao caso $k = n$.

Denotando $(z_1, \dots, z_n)$ por z, temos agora que, através da proposição 1.1, vale que as funções:

$$g_J(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a_k,\epsilon_k)} \frac{f_J(z_1, \dots, z_{k-1}, w, z_{k+1}, \dots, z_n)}{w - z_k} dw \wedge d\overline{w}$$

são tais que: $\frac{\partial g_J(z)}{\partial \bar{z}_k} = f_J(z)$ com $z \in V_k$, onde V_k é o conjunto formado pelos valores das variáveis $z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n$ em U e $z_k \in B(a_k, \epsilon_k)$. Para o caso em que $k = n$ temos que as funções g_J são diferenciáveis em todas as variáveis e, para o caso $k < n$, além da diferenciabilidade em todas as variáveis, temos também que g_J são holomorfas nas variáveis $z_{k+1}, \dots, z_n$.

Seja $\gamma_k := -(-1)^{q-1} \sum_{[J(k\in J)]} g_J d\bar{z}_{J\setminus\{k\}}$, temos que $\gamma_k \in \mathcal{A}^{0,q-1}(V_k)$. Para o caso em que $k < n$ tomando $i > k$, vale que:

$$\bar{\partial}_i\gamma_k(z) = -(-1)^{q-1} \sum_{[J(k\in J)]} \frac{\partial g_J(z)}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_{J\setminus\{k\}} = 0, \; z \in V_k, \tag{6}$$

pois g_J são holomorfas nessas variáveis. Para o caso $k = n$ não há o que se constatar. Para ambos os casos, temos que:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_k\gamma_k(z) &= -(-1)^{q-1} \sum_{[J(k\in J)]} \frac{\partial g_J(z)}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_{J\setminus\{k\}} \\
&= -(-1)^{q-1} \sum_{[J(k\in J)]} f_J (-1)^{q-1} d\bar{z}_{J\setminus\{k\}} \wedge d\bar{z}_k \\
&= -\omega_1 \wedge d\bar{z}_k. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Definindo-se $\beta_k := \alpha + \bar{\partial}\gamma_k$, temos que $\beta_k \in \mathcal{A}^{0,q}(V_k)$. Vale também que β_k é uma forma $\bar{\partial}$-fechada, pois α o é e $\bar{\partial}^2 = 0$. Além disso, temos que

$\beta_k = \omega_1 \wedge d\bar{z}_k + \omega_2 + \sum_i \bar{\partial}_i \gamma_k$, que através de (6) e (7) resulta em $\beta_k = \omega_2 + \sum_{i<k} \bar{\partial}_i \gamma_k$. Através desta última igualdade, vemos que β_k não depende de $d\bar{z}_l$ para $l \geq k$. Para o caso $k = n$, concluímos que $\beta_k = \beta_n$ não depende de $d\bar{z}_n$.

É importante ressaltar que o procedimento realizado acima partindo de α levou à construção do elemento β_k que, pela arbitrariedade de α, pode não depender de $d\bar{z}_l$ para $l \geq k'$ com $k' < k$, ou seja, para um caso específico, poderíamos obter β_k não dependente de $d\bar{z}_l$ para $l \geq k-4$, por exemplo. Mas no caso mais geral possível, em que α depende dos elementos $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_k$, temos a garantia de que β_k depende somente de $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{k-1}$.

O procedimento supracitado pode ser realizado novamente partido da forma β_k e assim obtermos uma forma $\beta_{k-1} = \beta_k + \bar{\partial}\gamma_{k-1} = \alpha + \bar{\partial}\gamma_k + \bar{\partial}\gamma_{k-1} \in \mathcal{A}^{0,q}(V_{k-1})$ que também será $\bar{\partial}$-fechada e não dependerá de $d\bar{z}_l$ para $l \geq k-1$, no caso mais geral possível. Podemos realizar esse processo quantas vezes quisermos. No entanto, temos que lembrar que após a realização de um número m de vezes partindo de α, teremos obtido, para o caso mais geral possível, um objeto $\beta_{(k-m)}$ que dependerá dos elementos $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{k-m-1}$ e quando $k - m - 1 = q$, teremos que β_{q+1} será da forma:

$$\beta_{q+1}(z) = h(z) d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q.$$

Realizando o procedimento pela última vez, temos que, definindo

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a_q, \epsilon_q)} \frac{h(z_1, \ldots, z_{q-1}, w, z_{q+1}, \ldots, z_n)}{w - z_q} dw \wedge d\overline{w},$$

vale que, pela proposição 1.1, $\frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}_q} = h(z)$ com $z \in V_q$ onde V_q é definido de maneira análoga à anterior.

Teremos que $\gamma_q \coloneqq -(-1)^{q-1} g d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{q-1}$ e analogamente a (6), para $i > q$, vale: $\bar{\partial}_i \gamma_q(z) = 0$. Para esta última aplicação do procedimento, temos que, para $i < q$, vale:

$$\bar{\partial}_i \gamma_q(z) = -(-1)^{q-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i}(z) d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{q-1} = 0,$$

pois $1 \leq i \leq q-1$. E, analogamente a (7), temos que:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_q \gamma_q(z) &= -(-1)^{q-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_q}(z) d\bar{z}_q \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{q-1} \\ &= -(-1)^{q-1} h(z) (-1)^{q-1} d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{q-1} \wedge d\bar{z}_q \\ &= -\beta_{q+1}. \end{aligned}$$

Por fim, temos que $\beta_q \coloneqq \beta_{q+1} + \bar{\partial}\gamma_q = 0$ e como recursivamente temos que $\beta_l = \beta_{l+1} + \bar{\partial}\gamma_l$, vale que:

$$\beta_q = \alpha + \sum_{i=q}^{k} \bar{\partial}\gamma_i = 0,$$

e, portanto, segue que $\alpha = \bar{\partial}\gamma$, na qual $\gamma = -\left(\sum_{i=q}^{k} \gamma_i\right)$ e $\gamma \in \mathcal{A}^{0,q-1}(D_\epsilon(a))$, como queríamos demonstrar. $\square$