Estrutura complexa do Espaço de Teichmüller

Minoru Akiyama

A teoría de Teichmüller estuda as diferentes estruturas conformes que têm uma superfície topológica dada. Específicamente, se $\mathcal{S}$ é uma superfície orientável, o espaço de Teichmüller da superfície $\mathcal{S}$ é definido como o espaço das estruturas complexas de $\mathcal{S}$ modulo homeomorfismos homotópicos à identidade e tais que a fronteira ideal de $\mathcal{S}$ é fixada durante a homotopía.

Consideremos o caso de uma superfície de Riemann $\mathcal{S}$ do tipo conforme finito (g, n), é dizer, $\mathcal{S}$ é biholomorfa a uma superfície compacta de gênero g menos n pontos. Além disso, suponhamos que $2g - 2 + n > 0$. Ista última hipótesis descarta somente os casos da esfera menos 0,1 ou 2 pontos e o toro, pelo qual a superfície $\mathcal{S}$ tem como espaço recobridor universal ao plano hiperbólico $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Im}\ z > 0\}$. Podemos assumir então que $\mathcal{S} = \mathbb{H}/\Gamma$, onde Γ é o grupo recobridor da superfície $\mathcal{S}$, porém um grupo Fuchsiano cujo conjunto limite é a reta real estendida $\overline{\mathbb{R}}$. O objetivo deste trabalho é provar que, neste contexto, o espaço de Teichmüller da superfície $\mathcal{S}$ é uma variedade complexa de dimensão $3g - 3 + n$. Em geral, o espaço de Teichmüller de qualquer superfície tem sempre estrutura de variedade complexa, más ela tem dimensão finita somente quando a superfície é do tipo finito. Por outro lado, a fronteira ideal de uma superfície do tipo finito é vazia e isto faz a definição do espaço de Teichmüller e algumas das provas deste trabalho mais simples.

1 Aplicações quasiconformes

Uma aplicação holomorfa com derivada não nula chama-se uma aplicação conforme. Para definir o espaço de Teichmüller precisa-se do conceito de aplicação quasiconforme, o qual é uma generalização natural das aplicações conformes, além de uma ferramenta útil para o estudo das superfícies de Riemann e em particular para a teoría de Teichmüller.

Será usado a notação f_z e $f_{\bar{z}}$ para designar as derivadas parciais $f_z := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ e $f_{\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, da função complexa f.

Definição 1.1. *Sejam U e V dois dominios de $\mathbb{C}$ e $K \geq 1$. Um homeomorfismo $f : U \longrightarrow V$ é uma aplicação K-quasiconforme se ela tem derivadas parciais distribucionais f_z e $f_{\bar{z}}$ localmente em L^2 e satisfaz*

$$|f_{\bar{z}}| \leq k \cdot |f_z| \quad q.t.p \tag{1}$$

onde $k = \frac{K-1}{K+1}$. O menor K tal que f é K-quasiconforme chama-se constante de quasiconformalidade de f e designa-se $K(f)$.

O fato de f ter derivadas distribucionais localmente em L^2 implica que as derivadas f_z e $f_{\bar{z}}$ usuais existem q.t.p em U. Nesses pontos, a derivada de f tem a forma $df(z) = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$, pelo qual a aplicação $\mathbb{R}$-linear $df(z)$ transforma o círculo unitario no plano tangente $T_z\mathbb{C}$ numa elipse de excentricidade $\frac{|f_z|+|f_{\bar{z}}|}{|f_z|-|f_{\bar{z}}|} \leq \frac{1+k}{1-k} = K$. A desigualdade (1) diz que as excentricidades dessas elipses são uniformementes limitadas. Por outro lado, o Jacobiano de f é dado por $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$, pelo qual a mesma desigualdade garante que f preserva orientação.

É claro que toda aplicação conforme é quasiconforme. O seguinte lema dá um recíproco desta afirmação.

Lema 1.2 (Weyl). *Se f é 1-quasiconforme, então f é conforme.*

A função $\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$, a qual está definida q.t.p em U, chama-se o coeficiente de Beltrami de f. Observe que $\mu_f \in L^{\infty}(U)$, de fato, $||\mu_f||_{\infty} := \sup ess\ |\mu_f| \leq k < 1$.

As seguintes são algumas das propriedades das aplicações quasiconformes cujas provas podem-se encontrar em [1], [2], [3], [4].

Proposição 1.3. *Se f é K-quasiconforme, então f^{-1} também é K-quasiconforme.*

Proposição 1.4. *Se $f : U \longrightarrow V$ é uma aplicação K_1-quasiconforme e $g : V \longrightarrow W$ é uma aplicação K_2-quasiconforme, então $g \circ f : U \longrightarrow W$ é K_1K_2-quasiconforme. Além disso, $\mu_{g\circ f} = \frac{\mu_f + r(\mu_g \circ f)}{1 + r\overline{\mu_f}(\mu_g \circ f)}$, onde $r = \frac{\overline{f_z}}{f_z}$.*

Observe da proposição anterior os seguintes casos especiais: Se g é conforme, então $\mu_{g\circ f} = \mu_f$. Se em cambio f é conforme, então $\mu_{g\circ f} = (\mu_g \circ f) \cdot \frac{\overline{f'}}{f'}$. Fazendo $h = g \circ f$ é fácil ver que

$$\mu_{h\circ f^{-1}} \circ f = \frac{\mu_h - \mu_f}{1 - \mu_f \overline{\mu_h}} \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}} \tag{2}$$

Os dois seguintes teoremas seram usados com frequencia neste trabalho. Eles juntos são conhecidos como o teorema da aplicação de Riemann mensurável, são fundamentales para a teoría de Teichmüller e seu desarrollo deve-se ao esforzo de muitos matemáticos importantes como Gauss, Korn, Lichtenstein, Morrey, Bojarski, Ahlfors, Bers, entre outros.

Teorema 1.5 (Morley)**.** *Seja U um dominio de $\mathbb{C}$ e $\mu : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável tal que $||\mu||_{\infty} < 1$. Então existe um homeomorfismo quasiconforme $f : U \longrightarrow f(U)$ que satisfaz a chamada equação de Beltrami*

$$f_{\bar{z}} = \mu \cdot f_z \tag{3}$$

Além disso, a solução é única no seguinte sentido: se g é outra solução de (3), então existe uma aplicação univalente $h : f(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g = h \circ f$.

Em particular se $U = \hat{\mathbb{C}}$, existe uma única aplicação quasiconforme que satisfaz (3) e fixa tres pontos dados. Designemos por $f(\cdot\ ; \mu)$ a única soluçao que fixa 0, 1 e ∞.

Teorema 1.6 (Ahlfors - Bers)**.** *Dado $z \in \mathbb{C}$, a aplicação $\mu \longmapsto f(z\ ; \mu)$, definida na bola de raio 1 em $L^{\infty}(\mathbb{C})$, é holomorfa. (Veja a definição 4.1)*

Suponha agora que $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow X$ é um homeomorfismo entre superfícies de Riemann hiperbólicas e seja $\widetilde{\varphi} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ um levantamento do φ, de modo que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{H} \\ {\scriptstyle \pi_{\mathcal{S}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ \mathbb{H}/\Gamma = \mathcal{S} & \xrightarrow[\varphi]{} & X = \mathbb{H}/\Gamma_X \end{array}$$

Aquí Γ e Γ_X são os grupos de recobrementos de $\mathcal{S}$ e X correspondentes, os quais são grupos Fuchsianos (isto é, subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$); $\pi_{\mathcal{S}}$ e π_X são as respetivas projeções.

Dize-se que o homeomorfismo φ é K-quasiconforme se seu levantamento $\widetilde{\varphi}$ é K-quasiconforme. Neste caso o coeficiente de Beltrami de φ define-se como o coeficiente de Beltrami de $\widetilde{\varphi}$.

Do diagrama é claro que para qualquer $\gamma \in \Gamma$, existe $\gamma_1 \in \Gamma_X$ tal que $\gamma_1 \circ \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi} \circ \gamma$. Isto implica que

$$\mu_{\widetilde{\varphi}} = \mu_{\gamma_1 \circ \widetilde{\varphi}} = \mu_{\widetilde{\varphi} \circ \gamma} = (\mu_{\widetilde{\varphi}} \circ \gamma) \cdot \frac{\overline{\gamma'}}{\gamma'}$$

pois γ e γ_1 são aplicações conformes. Assim, a cada homeomorfismo quasiconforme $\varphi : \mathcal{S} = \mathbb{H}/\Gamma \longrightarrow X$, corresponde uma função $\mu : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mensurável tal que $||\mu||_\infty < 1$ e satisfaz, para todo $z \in \mathbb{H}$ e $\gamma \in \Gamma$,

$$\mu(z) = \mu(\gamma z)\frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} \tag{4}$$

Isto é, μ é um diferencial do tipo $(-1, 1)$ em $\mathbb{H}$. Por simplicidade, dizemos que a função μ é Γ-invariante se cumple (4). Se denotamos por $\mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$ ao conjunto das funções $\mu : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $||\mu||_\infty < 1$ e são Γ-invariante, é fácil ver que $\mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$ é um conjunto aberto do espaço de Banach $L^\infty(\mathbb{H})$.

2 Espaço de Teichmüller

Seja $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ a coleção dos pares (φ, X), onde X é uma superfície de Riemann e $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow X$ é um homeomorfismo quasiconforme. Um tal par chama-se uma superfície marcada modelada sobre $\mathcal{S}$.

Definição 2.1. *Duas superfícies marcadas (φ_1, X_1) e (φ_2, X_2) dize-se que são Teichmüller equivalentes, e se escreve $(\varphi_1, X_1) \sim_\mathcal{T} (\varphi_2, X_2)$, se existe uma aplicação conforme $c : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $c \circ \varphi_1$ e φ_2 são homotópicas.*

O espaço de Teichmüller da superfície $\mathcal{S}$ define-se como o quociente $\mathcal{T}_\mathcal{S} := \mathcal{M}(\mathcal{S}) \,/ \sim_\mathcal{T}$.

Para provar que $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ tem estrutura complexa precisamos identificar cada ponto de $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ com uma certa classe de equivalencia do espaço $\mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$. Antes de fazer isso, lembremos que na seção anterior se mostró que à cada superfície marcada (φ, X) corresponde um diferencial do Beltrami $\mu_\varphi \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$.

Dado cualquer $\mu \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$, estenda-se μ para todo o plano complexo nesta forma:

$$\widetilde{\mu}(z) := \begin{cases} \mu(z) \ , & \text{se} \quad z \in \mathbb{H} \\ \\ \overline{\mu(\bar{z})} \ , & \text{se} \quad z \in \mathbb{H}^* \end{cases}$$

onde $\mathbb{H}^* = \{z \ / \ \text{Im } z < 0 \ \}$. Observe que $||\widetilde{\mu}||_\infty = ||\mu||_\infty < 1$, pelo qual existe um único homeomorfismo quasiconforme $f^\mu : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que fixa os pontos 0, 1, ∞ e é solução da equação do Beltrami $f_{\bar{z}} = \widetilde{\mu} \cdot f_z$.

Proposição 2.2. *Para todo $\mu \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$, $\Gamma^\mu := f^\mu \circ \Gamma \circ (f^\mu)^{-1}$ é um grupo Fuchsiano que deixa invariante ao semiplano $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Observe que $\overline{f^\mu(\bar{z})} = f^\mu(z)$, para todo z, pelo qual f^μ deixa invariante à reta real estendida $\hat{\mathbb{R}}$. Dado qualquer $\gamma \in \Gamma$ e considerando que μ é Γ-invariante, tem-se que f^μ e $f^\mu \circ \gamma$ são soluções da mesma equação do Beltrami. Tome-se uma aplicação de Möbius A de tal forma que $A \circ f^\mu$ e $f^\mu \circ \gamma$ coincidem em três pontos. Logo $f^\mu \circ \gamma \circ (f^\mu)^{-1} = A \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$. Como Γ é discreto, então Γ^μ é um grupo discreto de aplicações de Möbius, isto é, um grupo Fuchsiano. □

Assím, dado $\mu \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$, temos uma aplicação quasiconforme $f^\mu : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, a qual induz um homeomorfismo quasiconforme $\varphi_\mu : \mathcal{S} \longrightarrow X$, onde X é a superfície de Riemann $X := \mathbb{H}/\Gamma^\mu$. Identificamos deste modo o espaço de Banach $\mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$ com $\mathcal{M}(\mathcal{S})$.

Observe que se $(\varphi, X) \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$, $\widetilde{\varphi} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ é um levantamento de φ com coeficiente de Beltrami μ e A é uma aplicação de Möbius aproriada de tal modo que $A \circ \widetilde{\varphi}$ fixe 0, 1 e ∞, então $A \circ \widetilde{\varphi} = f^\mu$. A aplicação A induz uma aplicação conforme c da superfície X sobre numa superfície Y. É obvio que $(\varphi, X) \sim_\mathcal{T} (c \circ \varphi, Y)$, pelo qual podemos supor sempre que o levantamento de uma aplicação quasiconforme φ com coeficiente de Beltrami μ é f^μ.

Antes de mostrar a equivalencia entre $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ e um quociente apropriado de $\mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$, precissa-se do seguinte lema. Lembre-se que todo homeomorfismo $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ se extende de manera única a um homeomorfismo $f : \overline{\mathbb{H}} \longrightarrow \overline{\mathbb{H}}$.

Lema 2.3. *Sejam φ_0 , $\varphi_1 : \mathcal{S} \longrightarrow X$ homeomorfismos entre superfícies hiperbólicas e f_0 , $f_1 : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ levantamentos de φ_0 e φ_1 respectivamente. Suponha que $\mathcal{S} = \mathbb{H}/\Gamma$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ *(φ_0 e φ_1 são homotópicas)*

ii) $f_0 \circ \gamma \circ f_0^{-1} = f_1 \circ \gamma \circ f_1^{-1}$*, para todo* $\gamma \in \Gamma$.

iii) $f_0|_{\mathbb{R}} = f_1|_{\mathbb{R}}$.

Demonstração. ((i) $\Rightarrow$ ii)) Pelo teorema de monodromía, $f_0 \simeq f_1$. Suponha que f_t é uma homotopía entre f_0 e f_1. Dados $\gamma \in \Gamma$ e $z \in \mathbb{H}$, considere os caminhos $t \mapsto f_t(\gamma z)$ e $t \mapsto (f_0 \circ \gamma \circ f_0^{-1})(f_t(z))$. Ambos têm o mesmo ponto inicial $f_0(\gamma z)$ e a projeção sobre X de os dois concordam, pelo tanto são iguais e para $t = 1$ tem-se, para todo $z \in \mathbb{H}$,

$$(f_0 \circ \gamma \circ f_0^{-1})(z) = (f_1 \circ \gamma \circ f_1^{-1})(z)$$

((ii) $\Rightarrow$ iii)) Seja $h = f_0^{-1} \circ f_1$. Como $f_0 \circ \gamma \circ f_0^{-1} = f_1 \circ \gamma \circ f_1^{-1}$, então $\gamma \circ h = h \circ \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Isto implica que se $z \in \mathbb{H}$ é um ponto fixo de algúm γ, então $h(\gamma)$ também é ponto fixo do mesmo γ. Se além disso o z é atrator e se $\zeta \in \mathbb{H}$, $\gamma_n \in \Gamma$, $n \geq 1$, são tais que $\gamma_n(\zeta) \longrightarrow z$, quando $n \longrightarrow +\infty$, então $\gamma_n(h(\zeta)) \longrightarrow z$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Por outro lado $\gamma_n(h(z)) = h(\gamma_n(z)) \longrightarrow h(z)$, se $n \longrightarrow +\infty$, logo $h(z) = z$ para todo ponto fixo de Γ. Como istos pontos são densos no conjunto limite de Γ, que em nosso caso é $\hat{\mathbb{R}}$, então concluímos que $h|_{\mathbb{R}} = id|_{\mathbb{R}}$.

((iii) $\Rightarrow$ ii)) Suponha que f_0 e f_1 concordam em $\Lambda_\Gamma = \hat{\mathbb{R}}$. Como $f_0(\hat{\mathbb{R}}) = f_1(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ e $\hat{\mathbb{R}}$ é Γ-invariante, então para todo $\gamma \in \Gamma$, $f_0 \circ \gamma \circ f_0^{-1} = f_1 \circ \gamma \circ f_1^{-1}$ em $\hat{\mathbb{R}}$. Como as aplicações de ambos lados desta igualdade são transformações de Möbius, então elas são iguais em $\mathbb{H}$.

((ii) $\Rightarrow$ i)) Seja $\theta(\gamma) = f_0 \circ \gamma \circ f_0^{-1} = f_1 \circ \gamma \circ f_1^{-1}$. Defina-se $f_t(z)$ como o ponto do arco hiperbólico que liga $f_0(z)$ com $f_1(z)$ tal que o comprimento do $f_0(z)$ até $f_t(z)$ é t e de $f_t(z)$ até $f_1(z)$ é $1-t$. Logo $f_t(z)$ define uma homotopía entre f_0 e f_1 tal que $\theta(\gamma) \circ f_t = f_t \circ \gamma$, para cada $\gamma \in \Gamma$, pelo qual a aplicaçao $\pi_X \circ f_t \circ \pi_{\mathcal{S}}^{-1}$ é uma homotopía entre φ_0 e φ_1. □

Proposição 2.4. *Suponha que os coeficientes de Beltrami das aplicações $\varphi_0 : \mathcal{S} \longrightarrow X_0$ e $\varphi_1 : \mathcal{S} \longrightarrow X_1$ são μ_0 e μ_1 respectivamente. Então $(\varphi_0, X_0) \sim_{\mathcal{T}} (\varphi_1, X_1)$ se, e somente se, $f^{\mu_0}|_{\mathbb{R}} = f^{\mu_1}|_{\mathbb{R}}$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se (φ_0, X_0) e (φ_1, X_1) são Teichmüller equivalentes, existe $c : X_0 \longrightarrow X_1$ conforme tal que $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} \simeq c$. Seja $\widetilde{c}$ um levantamento de c, logo pelo lema acima temos que $\widetilde{c}|_{\mathbb{R}} = f^{\mu_1} \circ (f^{\mu_0})^{-1}\_\mathbb{R}$. Como $\widetilde{c}$ é conforme e fixa 0, 1 e ∞, então $\widetilde{c} = id$. Pelo tanto $f^{\mu_0}|_{\mathbb{R}} = f^{\mu_1}|_{\mathbb{R}}$.

($\Longleftarrow$) Se $f^{\mu_0}|_{\mathbb{R}} = f^{\mu_1}|_{\mathbb{R}}$, então $\Gamma^{\mu_0} = \Gamma' = \Gamma^{\mu_1}$, onde $\Gamma^{\mu_i} := f^{\mu_i} \circ \Gamma \circ (f^{\mu_i})^{-1}$. f^{μ_0} e f^{μ_1} induzem aplicações $\phi_0, \phi_1 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{H}/\Gamma'$ homotópicas, porém $(\phi_0, \mathbb{H}/\Gamma') \sim_{\mathcal{T}} (\phi_1, \mathbb{H}/\Gamma')$. É facil ver que $(\varphi_i, X_i) \sim_{\mathcal{T}} (\phi_i, \mathbb{H}/\Gamma')$, $i = 0, 1$. □

En conclusão, pode-se identificar o espaço de Teichmüller $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ com o espaço $\mathcal{T}(\Gamma) := \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})/\sim$, onde $\mu_0 \sim \mu_1$ se $f^{\mu_0}|_{\mathbb{R}} = f^{\mu_1}|_{\mathbb{R}}$. O espaço $\mathcal{T}(\Gamma)$ é dotado com a topología quociente do $\mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$, a qual também é induzida pela métrica definida como,

$$d_{\mathcal{T}}\big([\mu_0], [\nu_0]\big) := \frac{1}{2} \liminf_{\substack{\mu \sim \mu_0 \\ \nu \sim \nu_0}} \log K\big(f^\mu \circ (f^\nu)^{-1}\big)$$

para cada $[\mu_0], [\nu_0] \in \mathcal{T}(\Gamma)$. A métrica $d_{\mathcal{T}}$ chama-se naturalmente métrica de Teichmüller. No espaço $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ ela é definida como

$$d_{\mathcal{T}}\big([\varphi_0, X_0], [\varphi_1, X_1]\big) := \frac{1}{2} \liminf_{\substack{\xi_0 \sim \varphi_0 \\ \xi_1 \sim \varphi_1}} \log K\big(\xi_1 \circ (\xi_0)^{-1}\big)$$

de modo que $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ e $\mathcal{T}(\Gamma)$ são isométricos.

3 Mergulho de Bers

Na seção anterior estendimos um diferencial do Beltrami $\mu \in \mathcal{B}^{\Gamma}(\mathbb{H})$ simétricamente com respecto a $\mathbb{R}$ de modo que a aplicação quasiconforme f^{μ} deixa invariante ao semiplano $\mathbb{H}$ e porém ao semiplano $\mathbb{H}^*$. Considere-se agora a extensão:

$$\hat{\mu}(z) := \begin{cases} \mu(z)\ , & \text{se} \quad z \in \mathbb{H} \\ \\ 0\ , & \text{se} \quad z \notin \mathbb{H} \end{cases}$$

e seja $f_{\mu} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ a solução quasiconforme da equação do Beltrami correspondente que fixa 0, 1, ∞. Observe-se que f_{μ} é conforme no semiplano inferior $\mathbb{H}^*$. Ela transforma o círculo $\hat{\mathbb{R}}$ numa curva de Jordan que contem os pontos acima menciondados.

Proposição 3.1. *Para todo $\mu \in \mathcal{B}^{\Gamma}(\mathbb{H})$, $\Gamma_{\mu} := f_{\mu} \circ \Gamma \circ f_{\mu}^{-1}$ é um grupo Kleiniano (isto é, subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$) e $\Omega_{\mu} = f_{\mu}(\mathbb{H})$ é Γ_{μ}-invariante.*

Demonstração. Similar à prova da proposição 2.2. □

Proposição 3.2. *Sejam μ ,$\nu \in \mathcal{B}^{\Gamma}(\mathbb{H})$. Então $f^{\mu}|_{\mathbb{R}} = f^{\nu}|_{\mathbb{R}}$ se, e somente se, $f_{\mu}|_{\mathbb{H}^*} = f_{\nu}|_{\mathbb{H}^*}$.*

Demonstração. Pelo teorema de uniformização existe uma aplicção conforme $g_{\mu} : \Omega_{\mu} \longrightarrow \mathbb{H}$ que fixa 0, 1, ∞. Observe que $f^{\mu} = g_{\mu} \circ f_{\mu}$ em $\mathbb{H}$. Igualmente existe g_{ν} tal que $f^{\nu} = g_{\nu} \circ f_{\nu}$ em $\mathbb{H}$.

($\Longleftarrow$) Se $f_{\mu}|_{\mathbb{H}^*} = f_{\nu}|_{\mathbb{H}^*}$, então $g_{\mu} = g_{\nu}$. Logo $f^{\mu}(z) = f^{\nu}(z)$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

($\Longrightarrow$) Suponha $f^{\mu}|_{\mathbb{R}} = f^{\nu}|_{\mathbb{R}}$. Seja h a função,

$$h(z) := \begin{cases} g_{\nu}^{-1} \circ g_{\mu}(z)\ , & \text{se} \quad z \in \Omega_{\mu} \\ \\ f_{\nu} \circ f_{\mu}^{-1}(z)\ , & \text{se} \quad z \in \Omega_{\mu}^* \end{cases}$$

onde $\Omega_{\mu}^* = f_{\mu}(\mathbb{H}^*)$. Como $g_{\nu}^{-1} \circ g_{\mu} = f_{\nu} \circ f_{\mu}^{-1}$ em $\partial\Omega_{\mu}$, h é um homeomorfismo no plano complexo. Observe que h é conforme em Ω_{μ} e em Ω_{μ}^*, logo ela é conforme em $\hat{\mathbb{C}}$. Como $f_{\nu} = h \circ f_{\mu}$ em $\mathbb{H}^*$ e f_{μ}, f_{ν} fixan três pontos, então $h = id$. Pelo tanto $f_{\mu}|_{\mathbb{H}^*} = f_{\nu}|_{\mathbb{H}^*}$. □

Definição 3.3. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função localmente conforme. A derivada Schwarziana de f é definida como*

$$\mathbf{S}_f(z) := \tfrac{f'''(z)}{f'(z)} - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

Algumas das propriedades da derivada Schwarziana são:

i) f é uma aplicação de Möbius se, e somente se, $\mathbf{S}_f = 0$.

ii) $\mathbf{S}_{g \circ f}(z) = \big(\mathbf{S}_g(f(z))\big) \cdot (f'(z))^2 + \mathbf{S}_f(z)$. (Identidade de Cayley)

Tem-se os seguintes casos especiais: Se g é uma aplicação de Möbius, então $\mathbf{S}_{g \circ f} = \mathbf{S}_f$. Se em cambio f é uma aplicação de Möbius, então $\mathbf{S}_{g \circ f} = \big(\mathbf{S}_g \circ f\big) \cdot (f')^2$.

Seja $\mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*)$ o conjunto das aplicações $\psi : \mathbb{H}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas tais que $||\psi||_N := \sup_{z \in \mathbb{H}^*} 4(\text{Im } z)^2 |\psi(z)| < \infty$ e, além disso, são Γ-invariantes no seguinte sentido: Para todo $\gamma \in \Gamma$ e $z \in \mathbb{H}^*$, $\psi(z) = \psi(\gamma z)(\gamma'(z))^2$. O espaço $\mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*)$ com a norma $|| \cdot ||_N$ (Chamada de Nehari) resulta ser um espaço de Banach complexo.

Observação 3.4. *Seja X uma superfície de Riemann hiperbólica com métrica hiperbólica ρ, e consideremos o feixe $\Omega_X \otimes \Omega_X$, onde Ω_X é o feixe das 1-formas holomorfas de X. Um diferencial quadrático holomorfo sobre X é uma seção do feixe $\Omega_X \otimes \Omega_X$. Se (U, ζ) é uma carta local do X, então todo diferencial quadrático q pode-se escrever como $q = q(\zeta)d\zeta^2$ em U, onde $q(\zeta)$ é holomorfa.*

De fato, pode-se pensar um diferencial quadrático holomorfo q como una coleção de funções holomorfas $q_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i \in I$, onde $\big\{(U_i, \zeta_i)\big\}_{i\in I}$ é um atlas holomorfo de X, tal que, em $U_i \cap U_j$, as coordenadas ζ_i, ζ_j e as funções q_i, q_j satisfazem a identidade,

$$q_i(\zeta_i) = q_j(\zeta_j)\Big(\tfrac{d\zeta_j}{d\zeta_i}\Big)^2$$

Seja $\mathcal{Q}^\infty(X)$ o espaço das diferenciais quadráticas holomorfas q sobre X tais que $||q|| := \sup\limits_{x\in X} \dfrac{|q|(x)}{\rho^2(x)} < \infty$. Se $\mathcal{S}^* = \mathbb{H}^*/\Gamma$ é a superfície dual da superfície de Riemann $\mathcal{S}$, o espaço $\mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$ é a coleção dos levantamentos das diferenciais quadrátricas em $\mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*)$, pelo qual ambos espaços são isomorfos.

Lembremos que f_μ, $\mu \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$, é uma aplicação conforme em $\mathbb{H}^*$, pelo qual $\mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}}$ é uma função holomorfa. Por outro lado, dado $\gamma \in \Gamma$, existe uma aplicação de Möbius A tal que $A \circ f_\mu = f_\mu \circ \gamma$. Calculando a derivada Schwarziana em ambos lados desta igualdade dá $\mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}} = \big(\mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}} \circ \gamma\big) \cdot \gamma'^2$. Isto mostra que $\mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}}$ é Γ-invariante. O lema a seguir mostra que $\mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}} \in \mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$, para qualquer $\mu \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$.

Lema 3.5 (Nehari-Kraus)**.** *Seja $f : \mathbb{H}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função univalente. Então $||\mathbf{S}_f||_N \leq 6$.*

Demonstração. Fixemos $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}^*$. Seja $T(z) = \frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}$, a aplicação que transforma $\mathbb{H}^*$ no exterior do disco unitario. Como as derivadas Schwarzianas são invariantes pela conjugação de uma aplicação de Möbius a esquerda, podemos supor sem perda de geralidade que $f(z_0) = \infty$ e $f'(z_0) = \frac{1}{(T^{-1})'(\infty)}$. Seja F tal que $F \circ T = f$, logo $F(\zeta) = \zeta + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\zeta^n}$, para $|\zeta| > 1$, e F é univalente nessa região. Fazendo úso do teorema da área de Bieberbach, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot |b_n|^2 \leq 1$, em particular, $|b_1| \leq 1$.

Observe-se que,

$$\begin{aligned} F'(\zeta) &= 1 - \frac{b_1}{\zeta^2} + \dots \\ F''(\zeta) &= \frac{2b_1}{\zeta^3} + \dots\dots \\ F'''(\zeta) &= -\frac{6b_1}{\zeta^4} + \dots \end{aligned}$$

Logo é fácil ver que $\mathbf{S}_F(\zeta) = -\frac{6b_1}{\zeta^4} + \ldots = \frac{1}{\zeta^4}\big(-6b_1 + \text{potencias de } \frac{1}{\zeta}\big)$. Pela identidade de Cayley temos que, para $\zeta = T(z)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_f(z) &= \mathbf{S}_F(\zeta) \cdot T'(z)^2 \\ &= \left(-6b_1 + \text{potencias de } \frac{1}{\zeta}\right) \cdot \frac{1}{\zeta^4} \cdot \left(\frac{-2y_0}{(z-z_0)^2}\right)^2 \\ &= \left(-6b_1 + \text{potencias de } \frac{1}{\zeta}\right) \cdot \frac{4y_0^2}{(z-\bar{z}_0)^4} \end{aligned}$$

Fazendo $z \to z_0$, temos que $\mathbf{S}_f(z_0) = \frac{-6b_1}{4y_0}^2$, pelo qual $4y_0|\mathbf{S}_f(z_0)| \leq 6$. □

Seja $\widehat{\Phi} : \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$ a aplicação definida como $\widehat{\Phi}(\mu) := \mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}}$. A dependencia continua (De fato holomorfa) da função f_μ respecto ao diferencial μ, implica que a aplicação $\widehat{\Phi}$ é continua. Porém, ela induz uma aplicação continua $\Phi : \mathcal{T}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$, dada por $\Phi([\mu]) := \widehat{\Phi}(\mu)$. A boa definição de Φ segue-se da proposição 3.2.

O proximo resultado mostra que existe uma seção de Φ em uma vizinhança do orígem de $\mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$. A prova deste teorema pode-se conseguir em [1], [2], [3].

Teorema 3.6 (Ahlfors-Weill)**.** *Suponha que $\psi \in \mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$ e que $||\psi||_N < 2$. Se $\nu(z) := -2(Im\ z)^2 \cdot \psi(\bar{z})$, $z \in \mathbb{H}$, então $\nu \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$ e, além disso, $\mathbf{S}_{f_\nu|_{\mathbb{H}^*}} = \psi$.*

Teorema 3.7. *Φ é uma aplicação continua, injetora, cuja imagem contém a bola de raio 2 e está contida na bola de raio 6 em $\mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$.*

Demonstração. Falta somente provar que a aplicação Φ é injetora, pois o resto é consequencia do lema 3.5 e o teorema 3.6. Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{B}^\Gamma(\mathbb{H})$ tais que $\Phi([\mu]) = \Phi([\nu])$. Se $h = f_\mu \circ f_\nu^{-1}$, pela identidade de Cayley tem-se que $\mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}} = (\mathbf{S}_{h|_{\mathbb{H}^*}} \circ f_\nu) \cdot (f'_\nu)^2 + \mathbf{S}_{f_\nu|_{\mathbb{H}^*}}$ em $\mathbb{H}^*$. Como $f'_\nu \neq 0$, temos que $\mathbf{S}_h = 0$, logo h é uma aplicação de Möbius em $\mathbb{H}^*$. Mas f_μ e f_ν fixam 0, 1 ∞, pelo qual concluimos que $h|_{\mathbb{H}^*} = id$. Isto implica que $\mu \sim \nu$. $\square$

A aplicação $\Phi : \mathcal{T}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$ chama-se o Mergulho de Bers. De fato, ele é um homeomorfismo sobre um aberto limitado de $\mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$. Na seguinte seção usaremos esta aplicação para construir as cartas locais do espaço $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Antes de fazer isso, vejamos qual é a dimensão do espaço $\mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$ para o caso de uma superfície hiperbólica $\mathcal{S}$ do tipo conforme finito (g, n), com $2g - 2 + n > 0$. Lembremos que $\mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$ é isomorfo ao espaço $\mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*)$ das diferenciais quadráticas holomorfas ψ sobre a superfície $\mathcal{S}^*$ tais que $||\psi|| < +\infty$. Além disso, é facil provar que $\psi \in \mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*)$ se, e somente se, $\int_{\mathcal{S}^*} |\psi| < \infty$, (Ver [3]). Suponhamos que $\mathcal{S}^* = \mathcal{M} \setminus E$, onde $\mathcal{M}$ é uma superfície fechada de gênero g e E é um conjunto de n pontos. Cada $\psi \in \mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*)$ pode ser pensado como um diferencial quadrático sobre a superfície $\mathcal{M}$ que é meromorfa e seus polos são simples e pertencem a E.

Um divisor sobre $\mathcal{M}$ é uma aplicação $D : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $D(x) \neq 0$ somente para um número finito de pontos de $\mathcal{M}$. O grau do divisor D define-se como o valor $deg(D) := \sum_{x \in \mathcal{M}} D(x)$. Se $\alpha \neq 0$ é uma função, 1-forma ou diferencial quadrático meromorfo, o divisor associado à α é a função (α) que no ponto x tem, o valor k se x é um zero de α de ordem k, o valor $-k$ se x é um polo de α de ordem k, e é 0 nos outros pontos. Dado um divisor D, denota-se $L(D)$ ao espaço vetorial das funções meromorfas f em $\mathcal{M}$ tais que $(f) \geq -D$, e denota-se $l(D)$ a sua dimensão. Lembremos o teorema de Riemann-Roch: Se ω é uma 1-forma meromorfa em $\mathcal{M}$ não trivial,

$$l(D) = l((\omega) - D) + deg(D) - g + 1$$

Agora, fixado ω, seja $D_0 = 2(\omega) + \chi_E$, onde χ_E é a função característica de E (e pelo tanto um divisor sobre $\mathcal{M}$). Observe que $deg(\omega) = 2g - 2$, pelo qual $deg(D_0) = 4g - 4 + n$.

Por outro lado, se ψ é um diferencial quadrático meromorfo em $\mathcal{M}$, então $f = \frac{\psi}{\omega^2}$ é uma função meromorfa em $\mathcal{M}$. Da igualdade $(\psi) = (f\omega^2) = (f) + 2(\omega)$ temos $\psi \in \mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*)$ se, e somente se, $(\psi) + \chi_E = (f) + D_0 \geq 0$; isto equivale à dizer que $f \in L(D_0)$. Pelo tanto $dim\ \mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*) = l(D_0)$, logo pelo teorema de Riemann-Roch,

$$dim\ \mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*) = l((\omega) - D_0) + 3g - 3 + n$$

Como $deg((\omega) - D_0) = deg(\omega) - deg(D_0) = 2 - 2g - n < 0$, temos que $l((\omega) - D_0) = 0$, pelo tanto $\mathcal{Q}^\infty(\mathcal{S}^*)$ tem dimensão finita $3g - 3 + n$. Assim, podemos pensar à $\mathcal{Q}^\Gamma(\mathbb{H}^*)$ como o espaço $\mathbb{C}^{3g-3+n}$.

4 Estrutura complexa de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$

Definição 4.1. *Sejam X e Y espaços de Banach complexos e $U \subset X$ um conjunto aberto. Uma aplicaçaão $f : U \longrightarrow Y$ dize-se holomorfa em $x \in U$ se existe uma aplicação linear no sentido complexo e limitada $df_x : X \longrightarrow Y$, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x+h) - f(x) - df_x(h)||_Y}{||h||_X} = 0$$

Dize-se que f é holomorfa se ela é holomorfa em cada ponto de U.

Um conjunto $W \subset Y^*$ chama-se total, quando satisfaz: Se $\alpha(y) = 0$ para todo $\alpha \in W$, então $y = 0$.

Lema 4.2. *$f : U \subset X \longrightarrow Y$ é holomorfa se, e somente se, f é continua e existe $W \subset Y^*$ total tal que $\alpha \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa para toda $\alpha \in W$.*

Proposição 4.3. *A aplicação $\widehat{\Phi} : \mathcal{B}^{\Gamma}(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*)$ é holomorfa.*

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{H}^*$, seja $\alpha_z : \mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*) \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcional $\alpha_z(\psi) = \psi(z)$. É claro que em $\mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*)^*$, $W = \{\alpha_z \ / \ z \in \mathbb{H}^*\}$ é um conjunto total.

Fixemos $z \in \mathbb{H}^*$. Pelo teorema 1.6, a aplicação $\mu \longmapsto f_\mu(z)$ é holomorfa, logo $\alpha_z \circ \widehat{\Phi}(\mu) = \mathbf{S}_{f_\mu|_{\mathbb{H}^*}}(z)$ também é uma aplicação holomorfa. Pelo lema 4.2 concluimos que $\widehat{\Phi}$ é holomorfa. $\square$

Proposição 4.4. *Seja $U_0 = \big\{[\mu] \ / \ d_{\mathcal{T}}\big([0],[\mu]\big) < \frac{1}{2}\log 2 \ \big\}$. Então $\Phi(U_0)$ está contido na bola de raio 2 em $\mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*)$ e a restrição $\Phi : U_0 \longrightarrow \Phi(U_0)$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Como $\widetilde{\Phi}$ é uma aplicação holomorfa, fazendo úso adequado do lema de Schwarz temos que $||\widetilde{\Phi}(\mu)||_N \leq 6||\mu||_\infty$. Se $d_{\mathcal{T}}\big([0],[\mu_0]\big) < \frac{1}{2}\log 2$, existe um representante μ na classe $[\mu_0]$ tal que $||\mu||_\infty < \frac{1}{3}$. Logo $||\Phi([\mu_0])||_N \leq 2$. Suponha agora que $\psi_0 = \widetilde{\Phi}(\mu_0)$ e que $||\psi_n - \psi_0||_{\mathbb{N}}$ converge a 0. Para n suficientemente grande temos que $||\psi_n||_N < 2$, pelo qual $\widetilde{\Phi}(\sigma_n) = \psi_n$, onde $\sigma_n(z) = -2y^2\psi_n(\bar{z})$, $n \geq 0$. Além disso $\mu_0 \sim \sigma_0$. Mas $||\psi_n - \psi_0||_{\mathbb{N}} \to 0$ implica que $d_{\mathcal{T}}\big([\sigma_n],[\sigma_0]\big) \to 0$, pelo qual concluimos que Φ^{-1} é continua. $\square$

Fixemos $\mu \in \mathcal{B}^{\Gamma}(\mathbb{H})$ e seja $\Gamma^\mu = f^\mu \circ \Gamma(f^\mu)^{-1}$. Consideremos a aplicação $\widetilde{\beta}_\mu : \mathcal{B}^{\Gamma}(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathcal{B}^{\Gamma^\mu}(\mathbb{H})$ definida como $\widetilde{\beta}_\mu(\nu) := \mu_{f^\nu \circ (f^\mu)^{-1}}$, isto é, $\widetilde{\beta}_\mu(\nu)$ é um coeficiente de Beltrami tal que $f^{\widetilde{\beta}_\mu(\nu)} \circ f^\mu = f^\nu$. Das propriedades dos coeficientes de Beltrami, é claro que $\widetilde{\beta}_\mu(\nu) = \left(\frac{\nu-\mu}{1-\bar{\mu}\nu} \cdot \frac{f^\mu_z}{\overline{f^\mu_z}}\right) \circ (f^\mu)^{-1}$. Da definição 4.1 tem-se que $\widetilde{\beta}_\mu$ é uma aplicação holomorfa, de fato, é facil ver que $d(\widetilde{\beta}_\mu)_\nu(\varrho) = \left(\frac{1-|\mu|^2}{1-\bar{\mu}\nu} \cdot \varrho \cdot \frac{f^\mu_z}{\overline{f^\mu_z}}\right) \circ (f^\mu)^{-1}$

Por outro lado, $\widetilde{\beta}_\mu$ induz uma isometría $\beta_\mu : \mathcal{T}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{T}(\Gamma^\mu)$ dada por $\beta_\mu([\nu]) = [\widetilde{\beta}_\mu(\nu)]$, pelo tanto β_μ transforma a bola aberta $U_\mu \subset \mathcal{T}(\Gamma)$ de raio $\frac{1}{2}\log 2$ numa bola $U_0^{\Gamma^\mu}$ do mesmo raio e centro $[0]$ em $\mathcal{T}(\Gamma^\mu)$.

Se $\Phi_\mu : \mathcal{T}(\Gamma^\mu) \longrightarrow \mathcal{Q}^{\Gamma^\mu}(\mathbb{H}^*)$ designa o mergulho de Bers correspondente e se $\sigma_\mu : V_\mu \subset \mathcal{Q}^{\Gamma^\mu}(\mathbb{H}^*) \longrightarrow \mathcal{B}^{\Gamma^\mu}(\mathbb{H})$ é a seção $\sigma_\mu(\psi)(z) := -2(\mathrm{Im}\ z)^2\psi(\bar{z})$, onde V_μ é a bola de raio 2 em $\mathcal{Q}^{\Gamma^\mu}(\mathbb{H}^*)$ (Lembre-se o teorema 3.6), então temos o seguinte resultado.

Proposição 4.5. *A aplicação $\Phi \circ \beta_\mu^{-1} \circ \Phi_\mu^{-1} : V_\mu \longrightarrow \mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*)$ é holomorfa.*

Demonstração. Observe-se que $\Phi \circ \beta_\mu^{-1} \circ \Phi_\mu^{-1}|_{V_\mu} = \widetilde{\Phi} \circ \widetilde{\beta}_\mu^{-1} \circ \sigma_\mu$, pelo qual basta somente provar que σ_μ é holomorfa. Isto sigue inmediatamente da definição 4.1. $\square$

O seguinte diagráma ilustra à construção feita acima.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^{\Gamma^\mu}(\mathbb{H}) \arrow[d] & \mathcal{B}^{\Gamma}(\mathbb{H}) \arrow[l, "\widetilde{\beta_\mu}"'] \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\widehat{\Phi}"] \\
\mathcal{T}(\Gamma^\mu) \arrow[d, "\Phi_\mu"'] & \mathcal{T}(\Gamma) \arrow[l, "\beta_\mu"'] \arrow[d, "\Phi"] \\
V_\mu \subset \mathcal{Q}^{\Gamma^\mu}(\mathbb{H}^*) \arrow[r, "\Phi\circ\beta_\mu^{-1}\circ\Phi_\mu^{-1}"'] \arrow[uu, bend left=60, "\sigma_\mu"] & \mathcal{Q}^{\Gamma}(\mathbb{H}^*)
\end{tikzcd}
$$

Para finalizar, consideremos um cobremento de $\mathcal{T}(\Gamma)$ pelas bolas U_μ de raio $\frac{1}{2}\log 2$ e centro $[\mu]$. É facil ver que a coleção $\left\{\left(U_\mu, \Phi_\mu \circ \beta_\mu\right)\right\}_\mu$ resulta um atlas holomorfo do espaço de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$. Assim concluimos que $\mathcal{T}(\Gamma)$ (e pelo tanto $\mathcal{T}_\mathcal{S}$) é uma variedade complexa de dimensão $3g - 3 + n$.

Referências

[1] A. Fletcher, V. Markovic, *Quasiconformal Maps and Teichmüller Theory.* Oxford University Press, 2007.

[2] F. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials.* Wiley-Interscience, 1987.

[3] J. Hubbard, *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology and Dynamics, Vol 1.* Matrix Editions, 2006.

[4] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Theory.* Springer-Verlach, New york, 1973.