MAT5851 – Geometria Riemanniana
Lista de exercícios 5 – 25/05/2004

1.

a. Seja G um grupo de Lie equipado com uma métrica bi-invariante. Seja H um subgrupo de Lie de G equipado com a métrica induzida. Mostre que H é *totalmente geodésico* em G, i.e. toda geodésica de H é também uma geodésica de G.

b. Equipe $\mathbf{SU}(3)$ com uma métrica bi-invariante. Seja $T^2 \subset \mathbf{SU}(3)$ o subgrupo das matrizes diagonais. Mostre que T^2 é um 2-toro plano hexagonal totalmente geodésico.

2. Seja G um grupo de Lie equipado com uma métrica bi-invariante cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tem centro trivial. Mostre que G e seu recobrimento universal $\tilde{G}$ são compactos. (Sugestão: use o teorema de Bonnet-Myers e o Ex.2 da Lista 4.)

3. Considere a imersão $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ dada por $\varphi(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$.

a. Mostre que $e_1 = (-\sin u, \cos u, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, -\sin v, \cos v)$ é um referencial tangente e $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, -\cos v, -\sin v)$, $e_4 = \varphi$ é um referencial normal.

b. Mostre que $\bar{\nabla}_{e_1} e_3 = e_1$, $\bar{\nabla}_{e_2} e_3 = -e_2$, $\bar{\nabla}_{e_1} e_4 = e_1$, $\bar{\nabla}_{e_2} e_4 = e_2$, onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão de $\mathbf{R}^4$.

c. Conclua que a imersão induzida de $T^2 = S^1(1/\sqrt{2}) \times S^1(1/\sqrt{2})$ em $S^3(1)$ é mínima (este é o chamado *toro de Clifford*).

d. Use a fórmula de Gauss em $\mathbf{R}^4$ e em S^3 para mostrar que a curvatura seccional de T^2 é zero. Conclua que se trata de um toro plano e identifique o reticulado associado em $\mathbf{R}^2$.

4. Um *campo de Killing* X em uma variedade Riemanniana M é um campo de vetores cujos fluxos locais consistem de isometrias locais de M.

a. Mostre que em $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ com a métrica induzida, os campos

$$x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde $1 \leq i, j \leq n+1$, são campos de Killing.

b. Mostre que X é um campo de Killing se e somente se

$$\langle \nabla_U X, V \rangle + \langle \nabla_V X, U \rangle = 0$$

para todos campos de vetores U, V em M.

c. Mostre que a restrição de um campo de Killing a uma geodésica γ é um campo de Jacobi ao longo de γ.