MAT5799 – Variedades diferenciáveis e grupos de Lie
Lista de exercícios 5 – 24/10/2008

41. Sendo $\omega \in \Omega^k(M)$ e $X_1, \ldots, X_k \in \chi(M)$, prove que

$$d\omega(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, X_i \, \omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \, \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k).$$

42. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e seja $f : M \to \mathbf{R}^{n+1}$ uma imersão. Prove que M é orientável se e somente se existe uma campo de vetores normal suave X ao longo de f que nunca se anula.

43. Prove que $\mathbf{R}P^n$ é orientável se e somente se n é ímpar.

44. Se α e β são formas diferenciais fechadas, prove que $\alpha \wedge \beta$ também é fechada. Se, além disso, β é exata, porve que $\alpha \wedge \beta$ é exata.

45. Considere a 1-forma $\alpha = (x^2 + 7y)\, dx + (-x + y \sin y^2)\, dy$ em $\mathbf{R}^2$. Calcule sua integral sobre o 1-ciclo z que é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$ orientado no sentido anti-horário.

46. Seja $\alpha = (2x + y \cos xy)\, dx + (x \cos xy)\, dy$ em $\mathbf{R}^2$. Mostre que α é fechada. Mostre que α é exata exibindo uma função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ com $\alpha = df$. Qual é a integral de α sobre o ciclo do ex. 45?

47. Seja

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}.$$

Prove que α é uma 1-forma fechada em $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcular a integral de α sobre S^1. Por que esse resultado mostra que α não é exata? Por que esse resultado mostra que $\iota^*\alpha$ não é exata, onde $\iota : S^1 \to \mathbf{R}^2$ é o mergulho canônico?

48.

a. Prove que toda 1-forma fechada em S^2 é exata.

b. Seja

$$\sigma = \frac{r_1\, dr_2 \wedge dr_3 - r_2\, dr_1 \wedge dr_3 + r_3\, dr_1 \wedge dr_2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{3/2}}$$

em $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$. Prove que σ é fechada.

c. Calcular $\int_{S^2} \sigma$. Como isso mostra que σ não é fechada?

d. Seja

$$\alpha = \frac{r_1\, dr_1 + \cdots + r_n\, dr_n}{(r_1^2 + \cdots + r_n^2)^{n/2}}$$

em $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Calcular $*\alpha$, e provar que $*\alpha$ é fechada.

e. Calcular $\int_{S^{n-1}} *\alpha$. É $*\alpha$ exata?

49. Usando co-homologia de de Rham, prove que o toro T^2 não é difeomorfo à esfera S^2.

50.

a. Prove que toda 1-forma fechada na região aberta

$$1 < \left(\sum_{i=1}^{3} r_i^2 \right)^{1/2} < 2$$

em $\mathbf{R}^3$ é exata.

b. Exiba uma 2-forma na região do item (a) que é fechada mas não exata.

c. Prove que a região do item (a) não é difeomorfa à bola aberta de $\mathbf{R}^3$.