MAT5799 – Variedades diferenciáveis e grupos de Lie
Lista de exercícios 3 – 11/09/2008

22. Seja $M = \mathbf{R}^2$ (com coordenadas x, y). Determinar o campo de vetores X em M que possui o fluxo $X_t(x, y) = (xe^{2t}, ye^{-3t})$.

23. Sejam $M = \mathbf{R}^2$ (com coordenadas x, y) e X um campo de vetores em M. Determinar o fluxo de X quando:

a. $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

b. $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

25. Dados os campos de vetores em $\mathbf{R}^3$ (com coordenadas x, y, z),

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

calcular os colchetes entre esses campos de vetores.

26. Mostre que a restrição do campo de vetores em $\mathbf{R}^{2n}$

$$X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots - x_{2n}\frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} + x_{2n-1}\frac{\partial}{\partial x_{2n}}$$

à esfera unitária S^{2n-1} define um campo de vetores C^∞ em S^{2n-1} que nunca se anula.

27. Considere o sistema de equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x, y, z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y, z).$$

Sejam $X = \frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial z}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}$. Mostre que:

a. Se $z = f(x, y)$ é uma solução, então X e Y geram o espaço tangente ao gráfico de f em cada ponto.

b. A distribuição gerada por X e Y é involutiva se e somente se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

28. Sejam $X \in \mathcal{X}(M)$, $Y \in \mathcal{X}(N)$ e $f : M \to N$ C^∞. Mostre que X e Y são f-relacionados se e somente se os fluxos $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ satisfazem $f \circ X_t = Y_t \circ f$.

29. Mostre que se N é uma subvariedade mergulhada e fechada de M, então todo campo de vetores C^∞ em N pode ser estendido a um campo de vetores C^∞ em M.

30. Mostre que numa variedade diferenciável compacta todo campo de vetores é completo.