MAT5799 – Variedades diferenciáveis e grupos de Lie
Lista de exercícios 2 – 29/08/2008

9.

a. Prove que a composta e o produto de duas imersões são também imersões.

b. Quando M e N têm a mesma dimensão, verifique que as imersões $f : M \to N$ coincidem com os difeomorfismos locais.

10. Prove que toda submersão é uma aplicação aberta.

11.

a. Prove que se M é compacta e N é conexa, então toda submersão $f : M \to N$ é sobrejetora.

b. Mostre que não existem submersões de variedades compactas em espaços Euclideanos.

12. Seja M uma subvariedade mergulhada e fechada de N. Mostre que se $g \in C^\infty(M)$, então existe $f \in C^\infty(N)$ tal que $f|_M = g$.

13. Sejam M, N variedades diferenciáveis com $M \subset N$. Dê um exemplo de uma função $g \in C^\infty(M)$ que não admite extensão a uma função $f \in C^\infty(N)$ quando:

a. M é uma subvariedade imersa, fechada de N;

b. M é uma subvariedade mergulhada de N.

14. Seja M uma variedade compacta e seja $f : M \to \mathbf{R}$ C^∞. Mostre que f possui pelo menos dois pontos críticos.

15. Seja M uma variedade compacta de dimensão n e seja $f : M \to \mathbf{R}^n$ C^∞. Mostre que f possui algum ponto crítico.

16. Mostre que todo produto de esferas pode ser mergulhado em um espaço Euclideano com codimensão um.

17. Seja M uma variedade diferenciável. Mostre que dado $p \in M$, existe uma carta local (U, φ) em torno de p tal que φ é a restrição a U de uma aplicação em $C^\infty(M, \mathbf{R}^n)$.

18. Mostre que a projeção $\pi : TM \to M$ é uma submersão.

19. Seja $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ um polinômio com coeficientes complexos e considere a aplicação polinomial associada $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Mostre que essa é uma submersão a menos de um número finito de pontos.

20. (*Generalização do teorema da função inversa.*) Seja $f : M \to N$ uma aplicação C^∞ que é injetora em uma subvariedade mergulhada compacta P de M. Suponha que, para todo $p \in P$, $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é um isomorfismo.

a. Mostre que f aplica P difeomorficamente sobre $f(P)$.

b. Prove que, de fato, f aplica uma vizinhança aberta de P em M difeomorficamente sobre uma vizinhança aberta de $f(P)$ em N. (Sugestão: é suficiente mostrar que f é injetora em alguma vizinhança de P; se esse não é o caso, então existem seqüências $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ em M ambas convergindo para um ponto $p \in P$, com $p_i \neq q_i$ mas $f(p_i) = f(q_i)$, e isso contradiz a não-singularidade de df_p.)

21. Seja p um polinômio homogêneo de grau m em n variáveis $t_1, \ldots, t_n$. Mostre que o conjunto de pontos de $\mathbf{R}^n$ onde p vale a constitui uma subvariedade mergulhada de $\mathbf{R}^n$ de dimensão $n-1$, se $a \neq 0$. Mostre que as variedades obtidas com $a > 0$ são todas difeomorfas entre si, como também o são todas com $a < 0$. (Sugestão: use a identidade de Euler:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial p}{\partial t_i} = mp.)$$

Exercicios extras

1. Dado um recobrimento aberto de uma variedade diferenciável M, existe um refinamento consistindo de conjuntos abertos cujos fechos estão cada um contidos no domínio de alguma carta local de M.

2. Estude a demonstração do Lema 1.9, p. 9, do livro do Warner. Use o exercício anterior para concluir que todo recobrimento aberto de uma variedade diferenciável M admite um refinamento localmente finito, enumerável, consistindo de conjuntos abertos e conexos cujos fechos são compactos e estão cada um contidos no domínio de alguma carta local de M.

3. (*Classificação de variedades diferenciáveis de dimensão um*) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 1.

a. Mostre que existe um atlas diferenciável $\{(U_k, \varphi_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$, onde cada $\varphi_k(U_k)$ é um intervalo aberto de $\mathbf{R}$, tal que $\{U_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ é um recobrimento localmente finito, enumerável de M por conjuntos abertos relativamente compactos, e tal que cada φ_k se estende a um homeomorfismo de uma vizinhança aberta de $\bar{U}_k$ sobre um intervalo aberto de $\mathbf{R}$.

b. Suponha que $U_k \cap U_h \neq \varnothing$ e que $U_k \not\subset U_h$, $U_h \not\subset U_k$. Mostre que há apenas duas possibilidades:

(i) $\varphi_k(U_k \cap U_h)$ é um intervalo tal que um des seus extremos é também um extremo de $\varphi_k(U_k)$, e $\varphi_h(U_k \cap U_h)$ é um intervalo tal que um des seus extremos é também um extremo de $\varphi_h(U_h)$.

(ii) $\varphi_k(U_k \cap U_h)$ é a reunião de dois intervalos, cada um dos quais tem um extremo que também é um extremo de $\varphi_k(U_k)$, e igualmente para $\varphi_h(U_k \cap U_h)$ e $\varphi_h(U_h)$. Neste caso, mostre que qualquer outro U_j está contido em $U_k \cup U_h$ e que M é difeomorfa a S^1.

c. Deduza de (b) que M é difeomorfa a $\mathbf{R}$ ou a S^1. (Assuma que M não é difeomorfa a S^1, que cada U_{k+1} intersecta $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ e que nenhum desses dois conjuntos está contido no outro. Usando (b) e indução, construa um difeomorfismo f_k de $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ sobre um aberto de $\mathbf{R}$ tal que f_{k+1} estende f_k.