MAT5799 – Variedades diferenciáveis e grupos de Lie – Exame para casa

19-20/09/2023

Prof. Claudio Gorodski

- *Resolver todas as questões abaixo, enviar as soluções num arquivo PDF ao professor por email até 20 de setembro, ao meio-dia, e esperar confirmação de recebimento.*
- *As soluções podem estar manuscritas ou em Latex. Se manuscritas, devem estar legíveis.*
- *A prova é individual. É permitido consultar suas notas de aula e o livro-texto. Não é permitido consultar outros colegas nem outras pessoas.*

Questão 1 Seja N uma variedade diferenciável e seja (M, f) uma subvariedade imersa de N com $\dim M \leq \dim N - 2$. Demonstre que $N \setminus f(M)$ é conexo.

Questão 2 Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva definida numa variedade diferenciável. Construa uma função $g \in C^\infty(M)$ tal que $0 < g(x) < f(x)$ para todo $x \in M$. (Sugestão: Use uma partição da unidade.)

Questão 3 Considere $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, y). Em cada caso, para o par de campos de vetores X, Y em $\mathbb{R}^2$ indicado, calcular $[X, Y]$ e deduzir se existe um sistema de coordenadas (u, v) definido em algum aberto de $\mathbb{R}^2$ tal que $X = \frac{\partial}{\partial u}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial v}$; em caso afirmativo, determinar tal (u, v).

a. $X = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

b. $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

c. $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

Questão 4 Consideremos $\mathbb{R}^4$ com coordenadas (x, y, z, w). Sejam

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad Y = \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w}.$$

Existe uma subvariedade M de $\mathbb{R}^4$ de **dimensão** 3 que passa por $(0, 0, 0, 0)$ e é tangente a X e Y em todo ponto de M? Em caso afirmativo, construir tal subvariedade; em caso negativo, mostrar que ela não existe.