Resolução

1. SPG, $a=0$, $b=1$, $\gamma:[0,1]\to M$

Unic. Se J_1, J_2 são Jacobi ao longo de γ coincidindo em $t=0$ e $t=1$ então J_1-J_2 é Jacobi e se anula em $t=0$, $t=1$.

Como p, q não são conjugados, $J_1-J_2\equiv 0 \Rightarrow J_1\equiv J_2$.

Exist. q não é conjugado a $p \Rightarrow d(\exp_p)_{\gamma'(0)}: T_pM\to T_qM$ é isomorfismo $\Rightarrow v = d(\exp_p)_{\gamma'(0)}(w)$ para algum $w\in T_pM$

Assim $J_1(t) := d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tw)$ é Jacobi ao longo de γ com $J_1(0)=0$, $J_1'(0)=w$, $J_1(1)=v$. Similarmente, construímos J_2 com $J_2(1)=0$, $J_2(0)=u$. Logo, J_1+J_2 é Jacobi e satisfaz as condições.

2. a. Seja $\gamma:\mathbb{R}\to M$ geodésica p.c.a. com $\gamma|[0,d(p,q)]$ minimizante unindo p a q (M é completa, pois é compacta).

γ não minimiza em $[0, d(p,q)+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, pois

$L(\gamma|[0,d(p,q)+\varepsilon]) = d(p,q)+\varepsilon > \operatorname{diam}(M) \geq d(p,\gamma(d(p,q)+\varepsilon))$.

Logo, $q\in Cut(p)$.

b. Não precisam ser conjugados. Por exemplo, toro flat.

3. a. Não existe por Hadamard-Cartan.

b. Toro flat.

c. Não existe por Bonnet-Myers.

4. Seja g a métrica dada em M e tome $\tilde{g} = \exp_p^* g$, métrica em T_pM. $\tilde{g}$ está bem definida e é completa (pois as geodésicas por 0 são retas)

$\exp_p : (T_pM, \tilde{g}) \to (M, g)$ isometria local $\therefore$ recobrimento.

5. $\nabla_X Y = X(Y) - \langle X(Y), p \rangle p$ etc.

6. $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = \langle Z, Z \rangle = 1$
$\langle X, Y \rangle = \langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle = 0$

$0 = X\langle X, X \rangle = 2\langle \nabla_X X, X \rangle \cdots \Rightarrow \nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_Z Z = 0.$

Também: $\langle \nabla_X Y, X \rangle = \langle \nabla_Y X + \underbrace{[X, Y]}_{= Z}, X \rangle = \langle \nabla_Y X, X \rangle = \frac{1}{2} Y\langle X, X \rangle = 0.$

$\langle \nabla_X Y, Y \rangle = 0$

Mas: $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle Y, \nabla_X Z \rangle = -\langle Y, \nabla_Z X \rangle = \langle \nabla_Z Y, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle$

$= \langle \nabla_Y X + Z, Z \rangle = 1 - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \quad \therefore \quad \langle \nabla_Y Z, X \rangle = \frac{1}{2}$

$\therefore \nabla_Y Z = \nabla_Z Y = \frac{1}{2} X, \quad \nabla_X Z = \nabla_Z X = -\frac{1}{2} Y, \quad \nabla_X Y = -\nabla_Y X = \frac{1}{2} Z$

Logo: $R(X, Y)X = \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_Z X = -\frac{1}{2} \nabla_X Z + \frac{1}{2} Y = \frac{3}{4} Y$

$R(X, Z)X = \nabla_X \nabla_Z X = -\frac{1}{2} \nabla_X Y = -\frac{1}{4} Z$

$R(Y, Z)Y = \nabla_Y \nabla_Z Y = \frac{1}{2} \nabla_Y X = -\frac{1}{4} Z$

$K(X, Y) = -\langle R(X, Y)X, Y \rangle = -3/4 \qquad K(X, Z) = 1/4 = K(Y, Z)$

$Ric(X, X) = \frac{1}{2}(K(X, Y) + K(X, Z)) = -1/4 = Ric(Y, Y) \qquad Ric(Z, Z) = 1/4$

A curvatura escalar é constante porque a métrica é homogênea.

— // —