MAT5751 – Geometria Diferencial
Lista de exercícios 4 – 07/11/2009

1. Exercícios 1, 2, 5, 9, 15, 17, 18, 19 [do Carmo, p. 260].

2. Mostre que uma superfície é mínima se e somente se as direções assintópticas são perpendiculares.

3. Considere as superfícies parametrizadas

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, a\text{arccosh}\left(\frac{u}{a}\right)) \qquad \text{(o catenóide)}$$

e

$$\bar{\varphi}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u}\cos\bar{v}, \bar{u}\sin\bar{v}, a\bar{v}) \qquad \text{(o helicóide).}$$

Mostre que a aplicação $\bar{u} = \sqrt{u^2 - a^2}$, $\bar{v} = v$ define uma isometria entre essas superfícies.

4. Existe uma superfície parametrizada com

$$E = 1,\ F = 0,\ G = e^u, \quad \ell = e^u,\ m = 0, n = 1?$$

5. Supoha que $K(p) = 0$ para todo $p \in W$, W uma aberto de uma superfície S, e que $H(p) \neq 0$ para todo $p \in W$. Mostre que a única curva assintóptica por cada ponto $p \in W$ é uma reta em $\mathbf{R}^3$, e que o plano tangente ao longo dessa reta é constante.

6. Seja $f : S \to \tilde{S}$ uma isometria entre duas superfícies. Suponha que $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ é uma geodésica. Mostre, em detalhe, que $f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \tilde{S}$ também é uma geodésica.

7. Seja S uma superfície em $\mathbf{R}^3$ e seja Π um plano que intersecta S ao longo de uma curva γ. Mostre que γ é uma geodésica se Π é um plano de simetria de S, i.e. se S é invariante pela reflexão de $\mathbf{R}^3$ em Π. Aplique este reultado à esfera e ao elipsóide de rotação.

8. Seja γ um segmento de reta em $\mathbf{R}^3$ parametrizado proporcionalmente ao comprimento de arco contido numa superfície S. Mostre que γ é uma geodésica de S.