## SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 9 DA SEÇÃO 1.C

**LEMA:** Se $x \notin \mathbb{Z}$ então $\{x\} + \{-x\} = 1$.

**PROVA:** Se $x \notin \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < x < n + 1$ (o que implica $[x] = n$), daí temos que $-(n + 1) < -x < -n$ (então $[-x] = -(n + 1)$). Como $u = [u] + \{u\}$ $\forall u \in \mathbb{R}$, temos que $\{x\} = x - n$, e que $\{-x\} = -x + (n + 1) = -(x - n) + 1$, logo, somando essas duas equações membro a membro, temos o resultado desejado. □

**SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO:** Sejam f e g duas funções periódicas definidas por:

$$f(x) = \{x\},\ p_f = 1;$$

$$g(x) = \sin(\sqrt{2}\,\pi x),\ p_g = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{2}.$$

Seja $h = f + g$. Supondo que h seja periódica de período $p_h = p > 0$, temos:

$$\{-p\} - \sin(\sqrt{2}\,\pi p) = \{-p\} + \sin(-\sqrt{2}\,\pi p) = h(-p) = h(-p + p) = h(0) = h(0 + p) = h(p) = \{p\} + \sin(\sqrt{2}\,\pi p)$$

Como $h(0) = 0$, temos que $\{p\} + \sin(\sqrt{2}\,\pi p) = 0 = \{-p\} - \sin(\sqrt{2}\,\pi p)$. Supondo $p \in \mathbb{N}^*$, essas equações equivalem a $\sin(\sqrt{2}\,\pi p) = 0$, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{2}\,\pi p = k\pi$, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{k}{p} \in \mathbb{Q}$, absurdo. Caso contrário, se p não for inteiro, considerando as duas equações já obtidas anteriormente:

$$\begin{cases} \{p\} + \sin(\sqrt{2}\pi p) = 0 \\ \{-p\} - \sin(\sqrt{2}\pi p) = 0 \end{cases},$$

e fazendo a soma membro a membro, concluímos que $1 \overset{LEMA}{=} \{p\} + \{-p\} = 0$, isto é, $1 = 0$, um absurdo. Logo, h não é periódica e portanto o conjunto de todas as funções reais a valores reais que são periódicas, por não ser fechado para a soma, não é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. □

Apresentamos abaixo um pequeno esboço do gráfico de h: