

13/12/21

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$c^2 \cdot \text{rot } \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Eqs. de Maxwell
da
eletrodinâmica

$\vec{E}$: campo elétrico

ρ : densidade de carga

$\vec{B}$: campo magnético

ϵ_0 : permissividade
do vácuo

c : velocidade da luz

$\vec{j}$: densidade de corrente

→

Fluxo de $\vec{E}$ através

de uma superfície

fechada σ

$$= \iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \text{div } \vec{E} \, dx \, dy \, dz$$

$$K \text{ delimitado por } \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_K \rho \, dx \, dy \, dz$$

$$= \frac{\text{Carga dentro de } \sigma}{\epsilon_0}$$

Circulação de $\vec{E}$
ao longo de um
caminho fechado C

$$= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$$

C é a fronteira de
uma superfície σ



$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\text{Fluxo de } \vec{B} \text{ através de } \sigma) \end{aligned}$$

Fluxo de $\vec{B}$
através de
uma superfície
fechada σ

$$\begin{aligned} &= \iint_{\sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \underbrace{\text{div } \vec{B}}_{=0} \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

K região
delimitada por σ

$$= 0$$

$c^2 \times$ Circulação de $\vec{B}$
ao longo de um
caminho fechado C

$$= c^2 \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

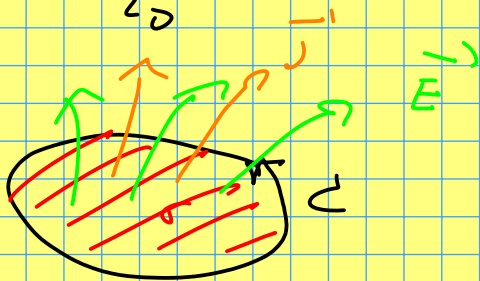
Stokes

$$= c^2 \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\sigma} \left(\frac{\vec{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS$$

σ é uma superfície
com bordo C

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} (\text{Corrente através de } \sigma) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{Fluxo de } \vec{E} \text{ através de } \sigma)$$



μ_0 : permeabilidade do vácuo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$c^2 \text{rot } \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\underbrace{\text{div rot } \vec{B}}_{=0} = \mu_0 \left(\text{div } \vec{J} + \epsilon_0 \underbrace{\text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{= \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E}} \right)$$

$\text{div rot } \vec{F} = 0$ para todo campo vetorial $\vec{F}$ de classe C^2

$$0 = \mu_0 \left(\text{div } \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{q}{\epsilon_0} \right)$$

$$\boxed{0 = \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } \vec{J}} \quad (*)$$

$$Q_K = \iiint_K q \, dx \, dy \, dz = \text{Carga total em } K$$

$$\frac{d}{dt} Q_K = \frac{d}{dt} \iiint_K q \, dx \, dy \, dz = \iiint_K \frac{\partial q}{\partial t} \, dx \, dy \, dz$$

$$\stackrel{(*)}{=} - \iiint_K \text{div } \vec{J} \, dx \, dy \, dz$$

$$Q_{\text{total}} = - \iint_{\partial K} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$= -I_{\partial K}$$

∴ Variação de carga total em $K = -$ Fluxo de corrente através da fronteira de K

Em particular, num sistema isolado a carga total é conservada.

Equações no vácuo

Numa região sem cargas ($\rho = 0$) e

sem corrente ($\vec{J} = \vec{0}$):

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Obs. Laplaciano de um campo escalar φ :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$= \text{div } \nabla \varphi$$

$$\boxed{\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \nabla(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}}$$

$$\vec{F} = (P, Q, R) \Rightarrow \Delta \vec{F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$$

$$\text{rot}(\underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}) = \nabla(\underbrace{\text{div } \vec{E}}_{= 0}) - \Delta \vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = -\Delta \vec{E}$$

$$\therefore \boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0}$$

Equação da onda para as
componentes de $\vec{E}$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi \text{ campo escalar} \\ \varphi(t, x, y, z) \end{array} \right. \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi \quad \text{Eq. da onda.}$$

Eg. do calor: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}$$

$$\underbrace{\text{rot}(\text{rot} \vec{B})}_{= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = \underbrace{\nabla(\text{div} \vec{B})}_{=0} - \Delta \vec{B}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{rot} \vec{E}}_{= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} = -\Delta \vec{B}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{B}$$

ϵ_0, μ_0 conhecidos

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$