

MAT 2352 - DISCUSSÃO E EXERCÍCIOS 06/12/21

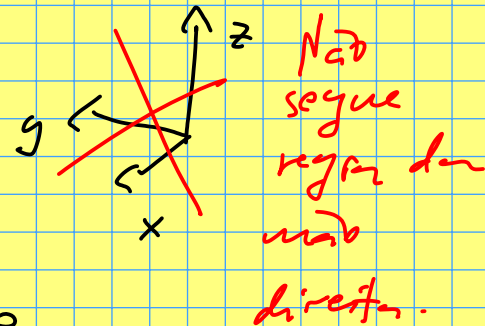
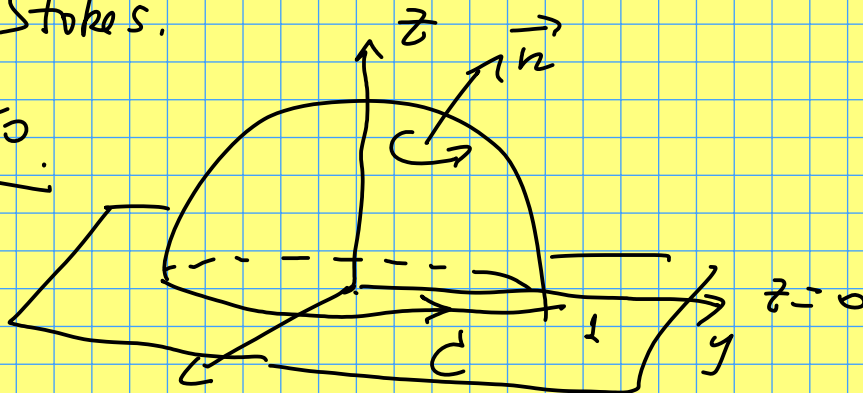
L11 $I = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = ?$

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz) \quad \sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

$\vec{n}$ normal unitária com comp $z \geq 0$

Usar Stokes.

Resolução.



Por Stokes, $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C y^2 dx + xy dy + \underline{xz dz} = (*)$

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(orientação correta)

$$(*) = \int_0^{2\pi} \underbrace{-\sin^3 t}_{= \sin t(1 - \cos^2 t)} + \sin t \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t + 2 \sin t \cos^2 t \, dt$$

$$= \cos t - 2 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0 //$$

Questão adicional: Será que ~~$\vec{F}$~~ é conservativo?

$\vec{F}$ / plano xy

$$= (y^2, xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} = y \neq \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (y^2)}{\partial y} = 2y$$

Não é conservativo.

— η —

L10 $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^1 dS = ?$ Usar Gauss.

$$\vec{F}^1(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

S : superfície do cubo

unidade

$\vec{n}^1$: normal unitária exterior.

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$0 \leq z \leq 1$$

Resolução.

Por Gauss: $I = \iiint_B \text{div } \vec{F}^1 dx dy dz$ B é o cubo.

$$= 2 \iiint_B x + y + z dx dy dz$$

Região de integração
e integrando são
simétricos em x, y, z

$$= 6 \iiint_B x \, dx \, dy \, dz = 6. \quad \text{momento linear} \\ \text{rel plano } x=0$$

$$= 6 \cdot x_{cm} \cdot \text{Vol}(B) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 3 //$$

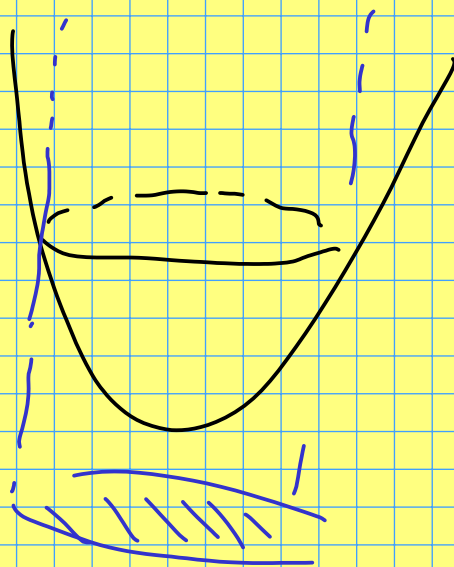
→

L9 Área do parabolóide elíptico

$$z = x^2 + 2y^2$$

dentro do cilindro $4x^2 + 16y^2 = 1$.

Resolução.



A superfície em questão é um gráfico sobre um domínio limitado. Mais precisamente, é o gráfico de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, f definida

$$\text{em } D: 4x^2 + 16y^2 \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2} dx dy \end{aligned}$$

Coords polares modificados:

$$\begin{cases} 2x = r \cos \theta \\ 4y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \quad \begin{cases} x = \frac{r}{2} \cos \theta \\ y = \frac{r}{4} \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cos \theta & -\frac{r}{2} \sin \theta \\ \frac{1}{4} \sin \theta & \frac{r}{4} \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{r}{8}$$

$$dx dy = \frac{r}{8} dr d\theta$$

$$\text{Área} = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1 + (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} dr d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^1 r (1 + r^2)^{1/2} dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1 + r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12} (2^{3/2} - 1)$$

$$= \frac{\pi}{12} (2\sqrt{2} - 1) //$$

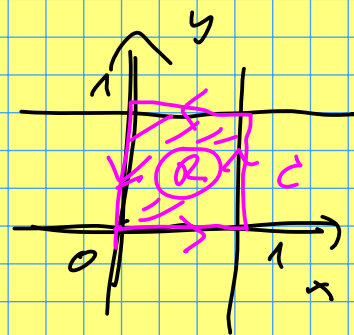
L8 $I = \oint_C \frac{-x^2 y}{1+x^2} dx + \underbrace{\arctan x}_{\text{Q}} dy = ?$

C: caminho fechado formado por

$$y=0, x=1, y=1, x=0$$

Usar Green.

Resolucão. Por Green:



$$I = \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

C orientada no sentido anti-horário.

$$I = \iint_R \frac{1}{1+x^2} - \frac{-x^2}{1+x^2} dx dy$$

$$= \iint_R 1 dx dy = \text{Área}(R) = 1 //$$

L7 $I = \int_{(-2, -1)}^{(1, 5)} 2y dx + 2x dy$ e independente do

construir e calcular (qualquer método).

Resolução

$\int_C Pdx + Qdy$ int do caminho

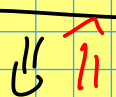


$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}' = \nabla \varphi$$

$\forall$ caminho fechado

$\vec{F}$ campo
cons.



se dom $\vec{F}'$ é simplesmente conexo.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\vec{F}'(x,y) = (2y, 2x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x \end{cases}$$

$\varphi(x,y) = 2xy$ é um
potencial para $\vec{F}'$

$\therefore \int_C \vec{F}' d\vec{r}$ int do caminho

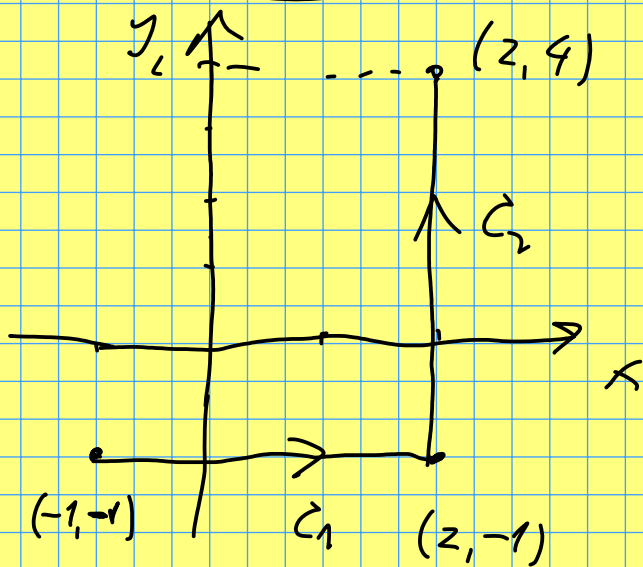
$$\int_{(-2,-1)}^{(1,5)} \vec{F}' d\vec{r} = \varphi(1,5) - \varphi(-2,-1) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 6 //$$

L6 $I = \int_C xy^2 dx + x^3 y dy$ onde

C é a poligonal formada pelos segmentos

de $(-1, -1)$ a $(2, -1)$ e $(2, -1)$ a $(2, 4)$.

Resolução.



$$C = C_1 \cup C_2$$

$$C_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 5t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$I = \int_{C_1} xy^2 dx + \underbrace{x^3 y}_{=0} dy + \int_{C_2} \underbrace{xy^2}_{=0} dx + x^3 y dy$$

$$= \int_0^1 (-1 + 3t) 3 + 8(5t - 1) 5 dt$$

$$= \int_0^1 209t - 43 dt = \frac{209t^2}{2} - 43t \Big|_0^1$$

$$= \frac{209}{2} - 43 = \frac{209 - 86}{2} = \frac{123}{2} //$$

→

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 2 \quad C_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 4$$

$$I = \int_{C_1} xy^2 dx + \cancel{x^3 y dy} + \int_{C_2} \cancel{xy^2 dx} + x^3 y dy$$

$$= \int_{-1}^2 t dt + \int_{-1}^4 8t dt$$

$$= \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-1}^2 + \left. 4t^2 \right|_{-1}^4 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) + (64 - 4)$$

$$= \frac{3}{2} + 60 = \frac{123}{2} //$$