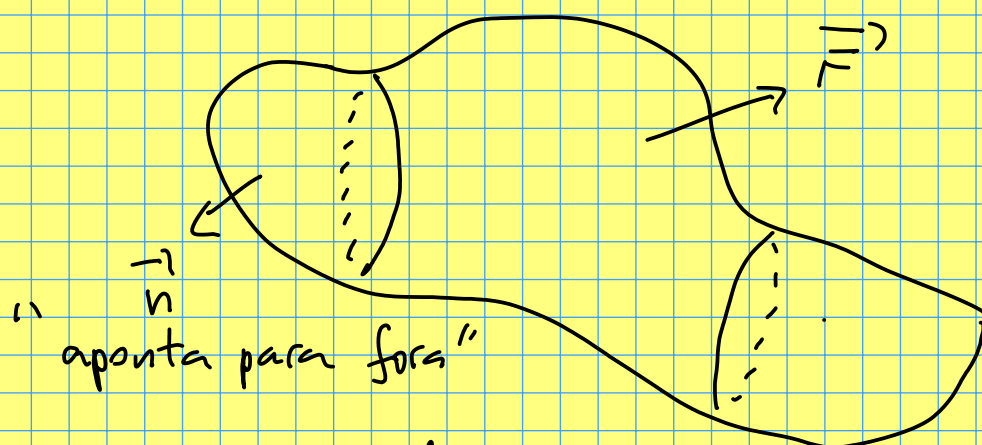


# O TEOREMA DE GAUSS

18/11/21

"Fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada"



Fórmula da divergência de Gauss

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

integral de superfície

integral de superfície

$\sigma$ : Superfície parametrizada em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$B$ : região do  $\mathbb{R}^3$  delimitada por  $\sigma$

$\vec{F}$ : campo de vetores definido em  $\Omega$  cujas componentes admitem derivadas parciais contínuas

$\vec{n}$ : normal unitária exterior

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{divergente de } \vec{F}$$

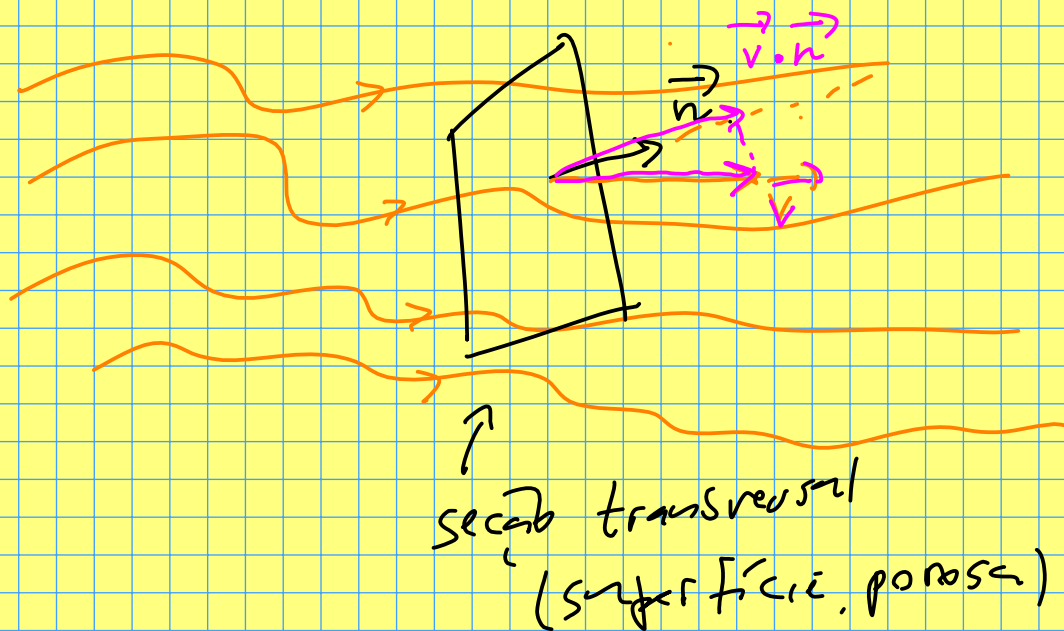
onde  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

### EXEMPLO (HIDRODINÂMICA)

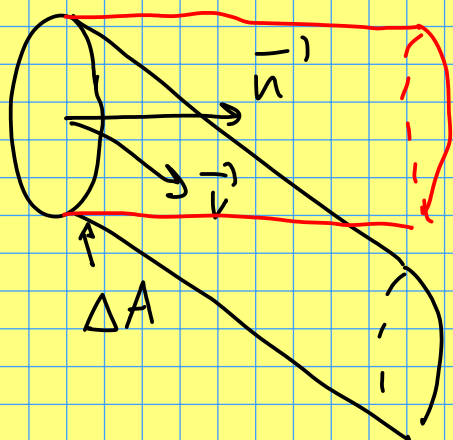
Fluido (gás ou líquido) fluindo numa região do espaço: Dens:  $\vec{v}(x, y, z)$  velocidade  
independe do tempo

$\delta(x, y, z)$ : densidade  
volumétrica

Consideramos  $\vec{F} = \delta \vec{v}$



Qual é o fluxo através da superfície,  
por unidade de tempo?



massa de fluido através  
de  $\Delta A$  no intervalo  $\Delta t$  é

$\delta$  (volume de fluido  
através de  $\Delta A$  no intervalo  $\Delta t$ )

$= \delta$  (vol. do cilindro vermelho)

$= \delta$  (área da base  $\times$  altura)

$$= \delta (\Delta A \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta t) = ((\delta v) \cdot \vec{n}) \Delta A \Delta t$$

$$= (\vec{F} \cdot \vec{n}) \Delta A \Delta t$$

Massa de fluido através de  $\Delta A$  p/ unid de tempo é

$$(\vec{F} \cdot \vec{n}) \Delta A$$

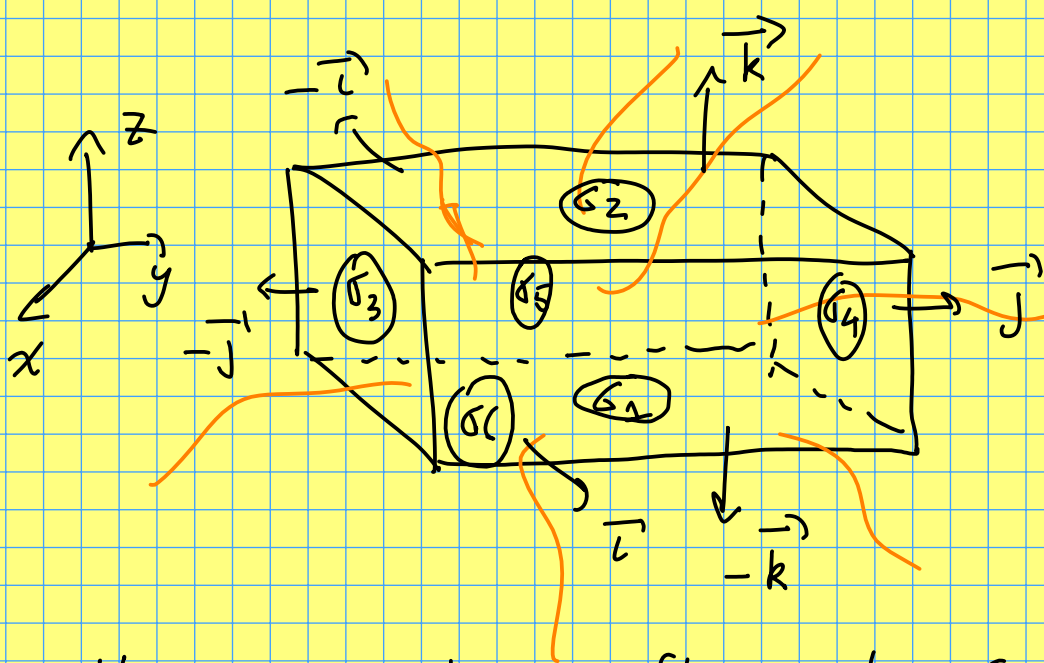
$\Delta A$  é um pedacinho da superfície

$$\text{Massa total de fluido através da superfície p/ unid de tempo} = \iint_S \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{n}}_{\substack{\text{elemento de} \\ \text{área da superfície}}} dA$$

← Membro do lado  
esq. da fórmula

# Fluxo através da superfície

Sobre o membro do lado dir:



Bloco  $\mathcal{B}$ :

$$a_1 \leq x \leq b_1$$

$$a_2 \leq y \leq b_2$$

$$a_3 \leq z \leq b_3$$

Vamos calcular o fluxo através das paredes da "caixa", diretamente.

$$\text{Fluxo através de } \sigma_1 = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\sigma_1: \begin{cases} x = a_1 \\ y = v \\ z = a_3 \end{cases} \quad \vec{n} = -\vec{i} \quad \|\vec{n}\| = 1$$

$$a_1 \leq u \leq b_1$$

$$a_2 \leq v \leq b_2$$

$$= \iint_{\sigma_1} (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) \, dS$$

$$= \iint_{\sigma_1} -R \, dS = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} -R(u, v, a_3) \, dv \, du$$

$$= \iint_{\sigma_1} -R \, dS$$

$$\text{Fluxo através de } \sigma_2 = \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\sigma_2} R \, dS$$

$$\sigma_2: \begin{cases} x = u & a_1 \leq u \leq b_1 \\ y = v & a_2 \leq v \leq b_2 \\ z = b_3 \end{cases}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{n}\| = 1$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} R(u, v, b_3) \, dv \, du$$

Agora:

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS' = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} R(x, y, b_3) - R(x, y, a_3) \, dy \, dx$$

$$\text{T.F.C.} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right) dy \, dx$$

$$= \iiint_B \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \quad (1)$$

Analogamente:

$$\iint_{\sigma_3 \cup \sigma_4} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS' = \iiint_B \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \quad (2)$$

$$\iint_{\sigma_5 \cup \sigma_6} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS' = \iiint_B \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \quad (3)$$

Adicionando (1), (2) e (3), vem?

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{F}} \, dx dy dz$$

Suponhamos agora que  $B$  tem arestas "pequenas":

$$b_1 = a_1 + \Delta x$$

$$b_2 = a_2 + \Delta y$$

$$b_3 = a_3 + \Delta z$$



$$\iiint_B \text{div } \vec{F} \, dx dy dz \approx \text{div } \vec{F}(P) \cdot \text{volume}(B)$$

( $P$  centro do bloco)

$$= \text{div } \vec{F}(P) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \approx \text{div } \vec{F}(P) \cdot \text{Vol}(B)$$

$$\sigma = \partial B \quad (\text{fronteira de } B)$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{F}(P) \approx \frac{1}{\text{Vol}(B)} \iint_{\partial B} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Fazendo  $B$  diminuir:

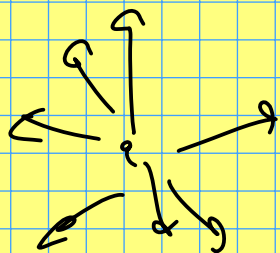
$$\text{div } \vec{F}(P) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\text{Fluxo de } \vec{F} \text{ através de } \partial B}{\text{Vol}(B)}$$

onde  $B$  é um bloco de arestas  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  centrado em  $P$ .

### Exemplos

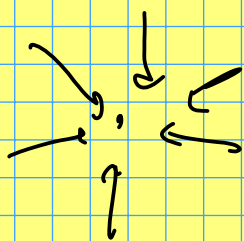
1.  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  campo radial

$$\text{div } \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3 > 0$$



2.  $\vec{F}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

$$\text{div } \vec{F} = -3 < 0$$

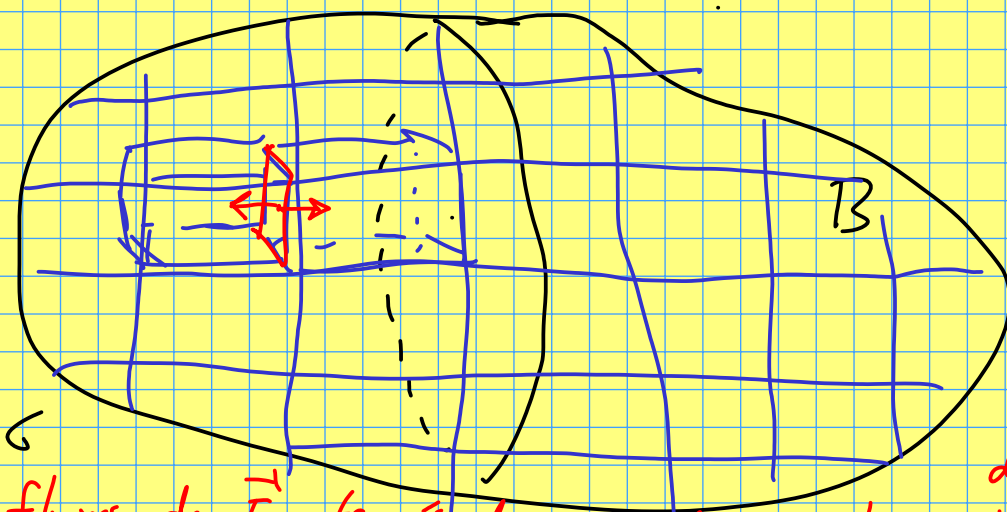


3.  $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$

$$\text{div } \vec{F} = 0$$



# "Demonstração" do T. Gauss



Os fluxos de  $\vec{F}$  através das paredes internas se cancelam  
 Os fluxos de  $\vec{F}$  " " " externas dos  $G_i$  dão o fluxo através de  $\partial B$

$$B = \bigcup_i B_i \quad B_i \text{ bloquinhos}$$

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \sum_i \iiint_{B_i} \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

$$= \sum_i \iint_{\sigma_i} \vec{F} \cdot \vec{n}_i \, dS = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS //$$

$$\sigma_i = \partial B_i$$

$$\sigma = \partial B$$

—h—

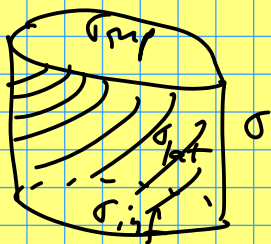
Exemplo. Calcular o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) =$

$(x, y, z^2)$  através da fronteira do cilindro

$B: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , orientada pela normal exterior.

# Resolução      Cálculo direto

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = ?$$



$$\sigma_{\text{lat}} : \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq t \leq 1 \end{matrix}$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \sigma_{\text{lat}}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \sigma_{\text{lat}}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\iint_{\sigma_{\text{lat}}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \|\vec{N}\| \, d\theta \, dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos \theta, \sin \theta, t^2) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0)}_{= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1} \, d\theta \, dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta \, dt = 2\pi$$

$$\sigma_{\text{sup}} : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \quad \vec{n} = \vec{k}$$

$$\iint_{\sigma_{\text{sup}}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\sigma_{\text{sup}}} (x, y, z^2) \cdot (0, 0, 1) \, dS = \iint_{\sigma_{\text{sup}}} \overset{\substack{\uparrow \\ z=1}}{z^2} \, dS$$

$$= \iint_{\sigma_{\text{sup}}} dS = \text{Área}(\sigma_{\text{sup}}) = \pi$$

$$\sigma_{\text{inf}} \quad \vec{n} = -\vec{k}$$

$$\iint_{\sigma_{\text{inf}}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\sigma_{\text{inf}}} (x, y, z^2) \cdot (0, 0, -1) dS$$

$$= \iint_{\sigma_{\text{inf}}} \underbrace{-z^2}_{z=0} dS = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{\sigma_{\text{lat}}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\sigma_{\text{sup}}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\sigma_{\text{inf}}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= 2\pi + \pi + 0 = 3\pi \end{aligned}$$

Fórmula de Gauss

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \\ &= 1 + 1 + 2z = 2 + 2z \end{aligned}$$

$$\iiint_B (2 + 2z) dx dy dz$$

$$= 2 \iiint_B dx dy dz + 2 \underbrace{\iiint_B z dx dy dz}$$

$$= 2 \operatorname{Vol}(B) + 2 z_{\text{cm}} \cdot \operatorname{Vol}(B)$$

$$= 2 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = 3\pi //$$