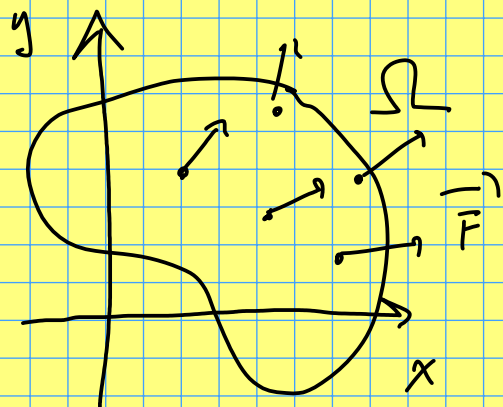


CAMPOS CONSERVATIVOS, CONTINUAÇÃO

25/10/21

$$\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n=2 \text{ ou } 3)$$



$\vec{F}$ é dito conservativo se vale qualquer uma das condições equivalentes:

- $\vec{F}$ é um campo gradiente, $\vec{F} = \nabla \varphi$ para

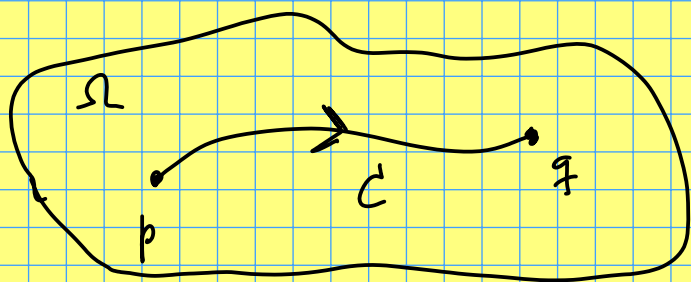
$$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

- $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho em Ω .

- $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ao longo de caminhos fechados em Ω .

Interpretação

$$\tau = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{trabalho}$$



$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ parametrização de C

$$\text{(Trabalho)} \quad \mathcal{L} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad (1)$$

γ : trajetória de uma partícula com massa m

2.ª Lei de Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} & \vec{v} &= \gamma' \\ \text{(aceleração)} & & \text{(velocidade)} & \end{aligned}$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{v}$$

$$= m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{produto} \\ \text{escalar e} \\ \text{comutativo} \end{array} \right)$$

$$= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$\left(\begin{array}{l} \text{regra da} \\ \text{derivada do} \\ \text{produto} \end{array} \right)$

$$= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2 \quad (\vec{v} = \vec{v}(t))$$

(2)

Substituindo (2) em (1), vem:

$$Z = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2 dt$$

$$= \frac{m}{2} \left[\|\vec{v}\|^2 \right]_{t=a}^{t=b}$$

$$= \frac{m}{2} (v(b)^2 - v(a)^2)$$

$$= \frac{mv(b)}{2} - \frac{mv(a)}{2}$$

$$= E_{\text{cin}}(b) - E_{\text{cin}}(a)$$

$$= \Delta E_{\text{cin}} \quad (\text{variação de energia cinética}) \quad (3)$$

(Teorema Fundamental
do Cálculo)

$$v = \|\vec{v}\|$$

velocidade
escalar

E_{cin} : energia cinética

Supondo agora que $\vec{F}$ é um campo conservativo,
podemos escrever $\vec{F} = \nabla \varphi$ onde $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Por razões de Física, seja $\bar{V} = -\varphi$: função
potencial de $\vec{F}$.

$$Z = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = - \int_C \nabla \bar{V} \cdot d\vec{r}$$

$$= - (\bar{V}(b) - \bar{V}(a))$$

$$= - \Delta \bar{V} \quad \underline{\text{diferença de potencial}} \quad (4)$$

$\bar{V}(t)$: energia potencial da partícula no instante t

Comparando (3) e (4), temos:

$$-\Delta E_{\text{pot}} = -\Delta V = Z = \Delta E_{\text{cin}}$$

$$\Rightarrow \Delta(E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}) = \Delta E_{\text{cin}} + \Delta E_{\text{pot}} = 0$$

$$E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \text{Energia mecânica}$$

Princípio de conservação da energia mecânica

Uma partícula material que sofre a ação apenas de campos de forças conservativos tem a sua energia mecânica conservada.

Exemplos de campos conservativos na Física:

- Campo elétrico causado por uma distribuição de carga elétrica.
- Campo gravitacional causado pela Terra.

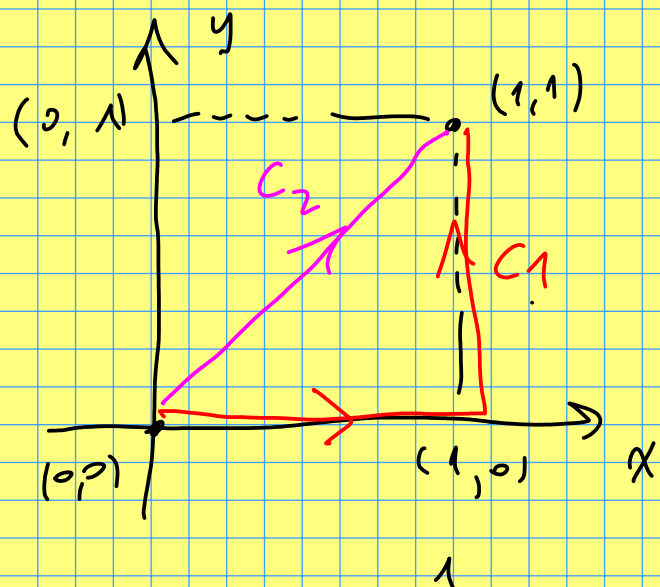
Exemplo de uma força não-conservativa
(= dissipativa):

- Atrito.

Voltando à Matemática:

Exemplo. Verificar que o campo $\vec{F}(x,y) = (xy, xy^2)$ não é conservativo. especificar C_1, C_2

Resolução. Vamos tomar dois caminhos entre $(0,0)$ e $(1,1)$ e verificar que $\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r}$.



$$C_1: \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^1 \underbrace{\vec{F}(t,0)}_{=(0,0)} \cdot (1,0) dt + \int_0^1 \underbrace{\vec{F}(1,t)}_{=(t,t^2)} \cdot (0,1) dt \\ &= 0 + \int_0^1 t^2 dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^1 \underbrace{\vec{F}(t,t)}_{=(t^2,t^3)} \cdot (1,1) dt \\ &= \int_0^1 t^2 + t^3 dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned} \quad \neq$$

Exemplo acima, cont.

Outra estratégia seria mostrar que não existe função potencial φ para $\vec{F}^1$, isto é, φ com $\nabla\varphi = \vec{F}^1$ (i.e. $\vec{F}^1$ não é campo gradiente)

$$\text{Se } \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x,y) = xy \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x,y) = xy^2 \end{cases} \quad \text{então}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) = y^2 \end{aligned} \right] \neq$$

o que viola $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$ (para funções com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas).

Observação. Se $\vec{F}^1(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ é

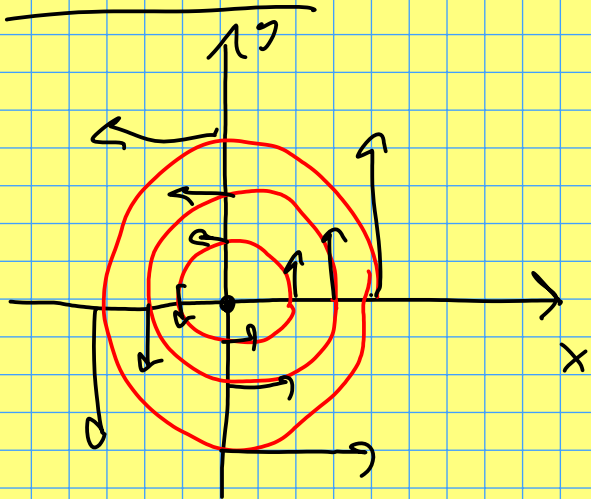
conservativo, $\vec{F}^1 = \nabla\varphi$, então

$$P = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \therefore \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Condição necessária
para $\vec{F}$ ser conservativo.

Exemplo $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$



$$\vec{F}(x,y) \cdot (x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} \perp \vec{r} \quad \begin{array}{l} \text{veto,} \\ \text{posição} \end{array}$$

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{r}\|$$

$$\vec{r}(x,y) = (x,y)$$

$$P = -y \quad Q = x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$\neq$

$\therefore \vec{F}$ não
é conservativo.

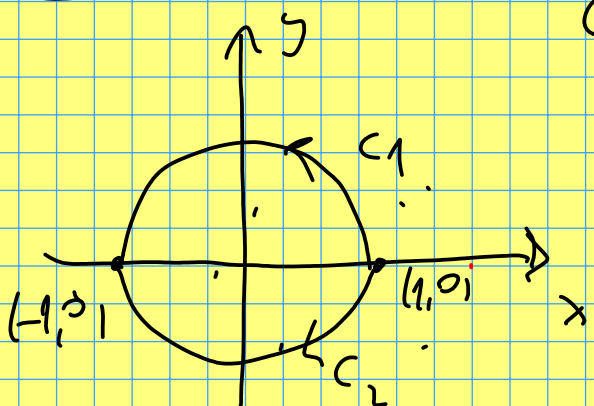
É claro que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$ ao longo de uma
circunferência C centralizada em $(0,0)$ e orientada
no sentido anti-horário.

Exemplo. Ex. 5, § 21.2

Mostrar que $\int_C 2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy$ não é

independente do caminho.

Resolução.



$$C_1: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$C_2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_{C_1} 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = \int_0^\pi 2 \cos t \sin t (-\sin t) + (\sin^2 t - \cos^2 t) \cos t dt$$

$$= \int_0^\pi -2 \cos t \sin^2 t + \cos t \sin^2 t - \cos^3 t dt$$

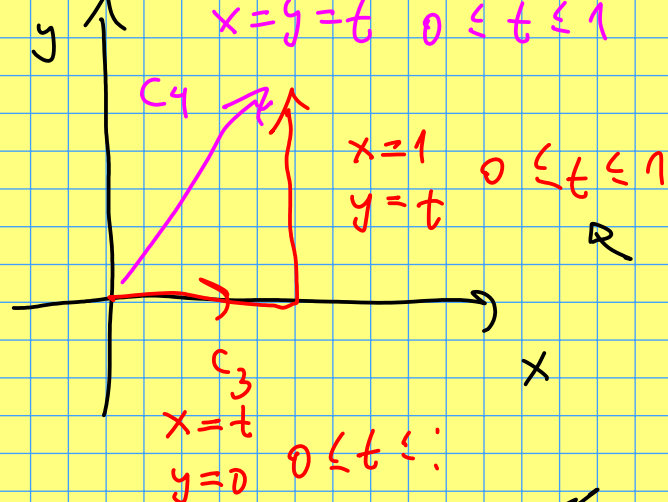
$$= \int_0^\pi -\cancel{\sin^2 t \cos t} - \cos^3 t dt$$

$$= -\cos t (1 - \sin^2 t) = -\cos t + \cancel{\cos t \sin^2 t}$$

$$= \int_0^\pi -\cos t dt = -\sin t \Big|_0^\pi = 0$$

$$\int_{C_2} 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = - \int_{C_2} 2x(-y) dx + (1-y^2 - x^2) d(-y)$$

$$= - \int_{C_1} 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = 0$$



$$\int_{C_3} 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = \int_0^1 (t^2 - 1) dt = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

1.º trecho $y=0$ $dy=0$ 2.º trecho $dx=0$

$$\int_{C_4} 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$x=y=t$

ou seja, $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2 - y^2)$ é conservativo.

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\varphi(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3}$$

é uma função
potencial.

$$\int_{C_4} (2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy)$$