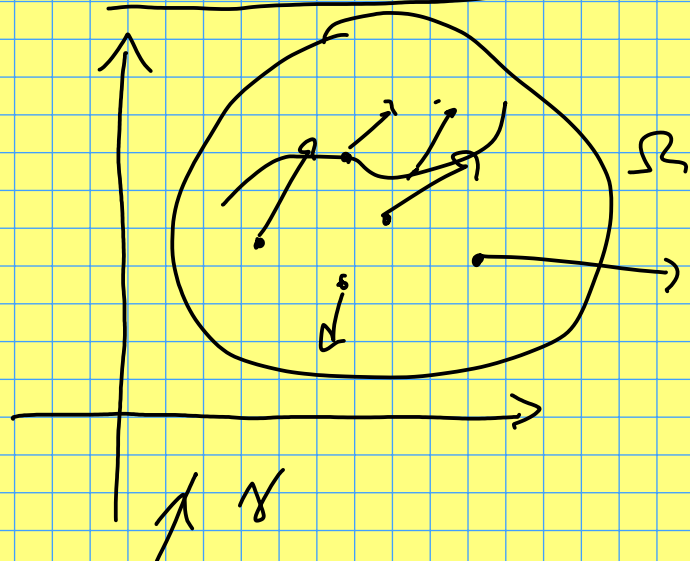


CAMPOS DE VETORES CONSERVATIVOS

21/10/21



$$\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

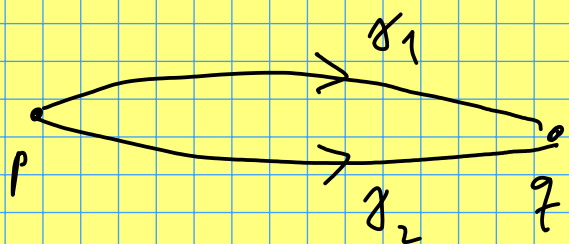
($n=2$ ou 3)

- Campo gravitacional
- Campo elétrico
- Campo eletromagnético

$$\int_a^b$$

$$Z = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

⋮
Integral de linha
(trabalho)



$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ e } \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

podem ou não ser iguais.

Quando é que um campo $\vec{F}$ tem a propriedade que $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho γ escolhido entre dois pontos fixos?

GRADIENTE DE UMA FUNÇÃO ESCALAR

$$\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n=3 \quad \varphi(x, y, z)$$

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

Exemplo $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\nabla \varphi = (x, y, z)$$
$$(-\nabla \varphi)$$

(resp. decrescimento)

$\nabla \varphi(x, y, z)$ é a direção de maior crescimento de φ no ponto (x, y, z)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \nabla \varphi \cdot v$$

$\uparrow$

derivada

$$v \in \mathbb{R}^3$$

$$\|v\| = 1$$

direccional

$$-\|\nabla \varphi\| \|v\| \leq \nabla \varphi \cdot v \leq \|\nabla \varphi\| \|v\|$$

Cauchy-Schwarz

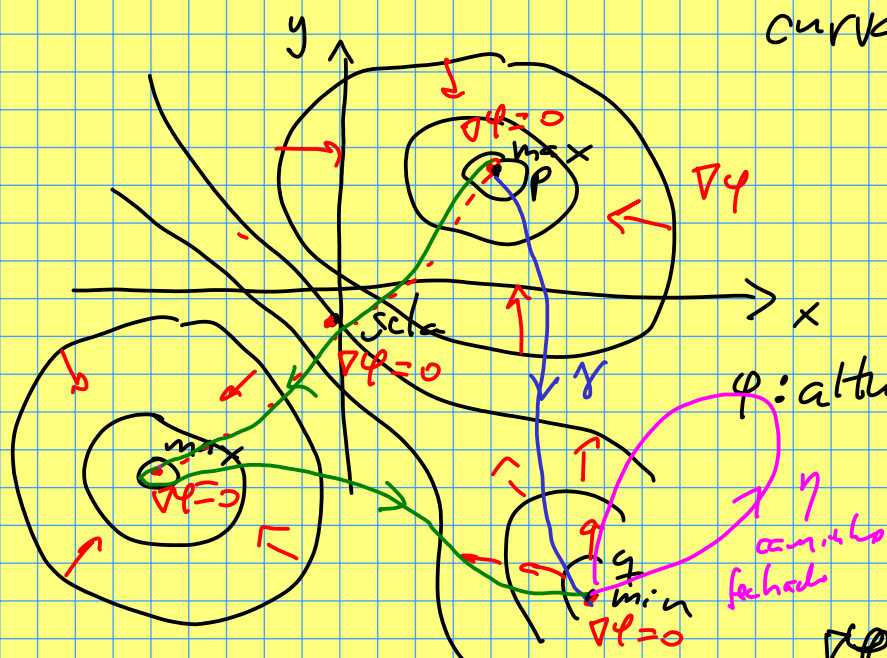
$$-\|\nabla \varphi\| \leq \frac{\partial \varphi}{\partial v} \leq \|\nabla \varphi\|$$

$$v = -\nabla \varphi$$

$(\Rightarrow) \text{ " " } v = \nabla \varphi$

$\uparrow$ igualdade vale $\Leftrightarrow v = \nabla \varphi$

$n=2$ $\varphi(x,y)$



curvas de nível
de φ

"mapa topográfico"

φ : altura
cada linha
representa uma
altura constante

$\nabla\varphi(p)=0 \Rightarrow p$ pto. crítico de φ

$\vec{F} = \nabla\varphi$ é um campo de vetores.

$n=3$

$$Z = \int_{\gamma} \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \int_a^b \underbrace{\nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\substack{\text{(Regra da cadeia)} \\ = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t))}} dt$$

$\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ $\gamma(a)=p$ $\gamma(b)=q$
 $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) dt$$

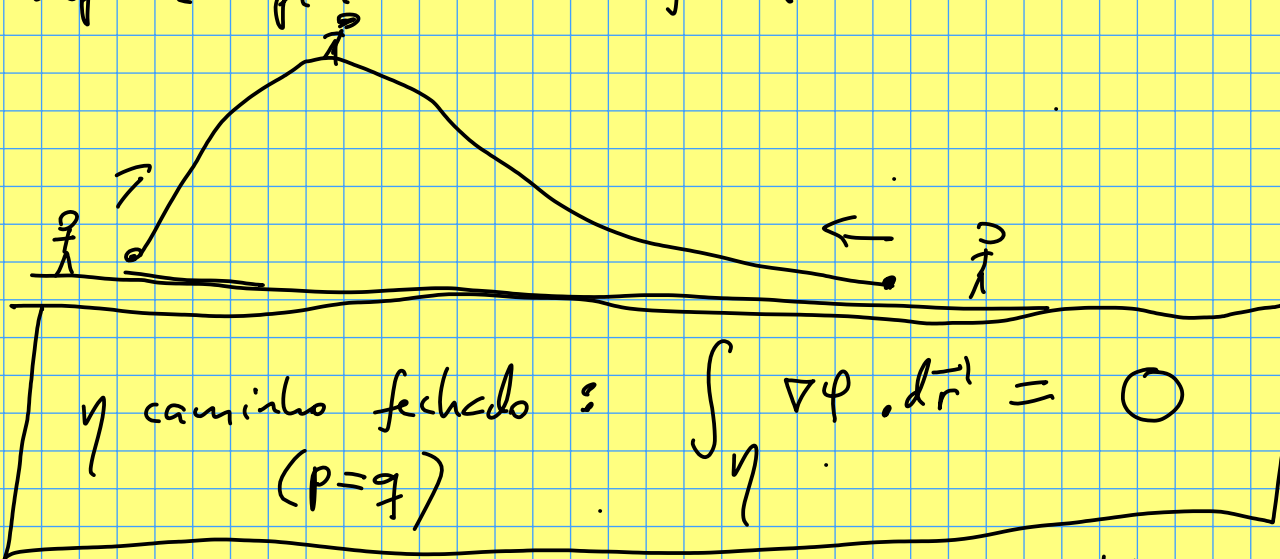
TFC

$$= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(q) - \varphi(p)$$

$$= \Delta\varphi \Big|_p^q$$

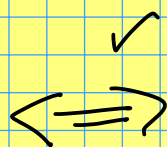
$\therefore \int_{\gamma} \nabla\varphi d\vec{r}$ independe do caminho γ
entre p e q

O gradiente da altura é um campo conservativo, e o trabalho realizado por ele sobre um deslocamento depende apenas da diferença de altura



(b)

(a) CAMPO GRADIENTE

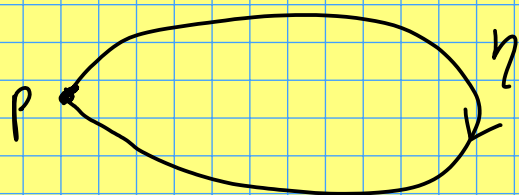


INTEGRAL INDEPENDENTE DO CAMINHO



INTEGRAL NULA AO LONGO DE UM CAMINHO FECHADO (c)

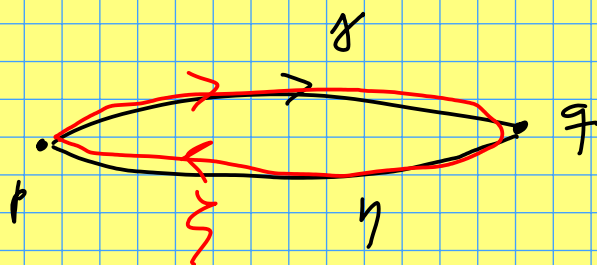
(b) $\Rightarrow$ (c)



γ caminho constante igual a p

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{(b)}{=} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(c) $\Rightarrow$ (b)



$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{?}{=} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\zeta = \gamma \cup (-\eta)$: concatenação de γ com $-\eta$
 $\uparrow$
 η com orientação oposta.

ζ é um caminho fechado
 Para (c) : $0 \stackrel{(c)}{=} \int_{\zeta} \vec{F} d\vec{r}$

$$= \int_{\gamma \cup (-\eta)} \vec{F} d\vec{r}$$

$$= \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \int_{-\eta} \vec{F} d\vec{r}$$

$$= \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\eta} \vec{F} d\vec{r}$$

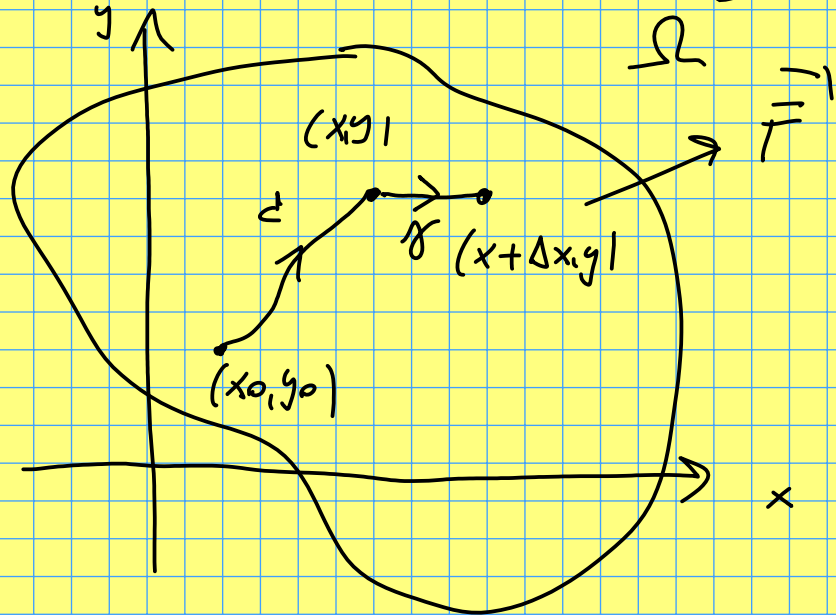
$$\therefore \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\eta} \vec{F} d\vec{r} //$$

(b) $\Rightarrow$ (a) !!!

Se $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ independe do caminho, então

$\vec{F}$ é um campo gradiente.

Vamos construir uma função escalar φ cujo gradiente será $\vec{F}$.



$n=2$ $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z))$

Fixemos $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dado $(x, y) \in \Omega$, tomamos um caminho C entre (x_0, y_0) e (x, y) e definimos

$$\varphi(x, y) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(aqui usamos a independência do caminho de $\int \vec{F} d\vec{r}$ para ter φ bem definida, pois há muitos caminhos entre (x_0, y_0) e (x, y)).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{\text{cur}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\Delta x}$$

γ segmento
de reta entre
 (x,y) e $(x+\Delta x, y)$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \left(\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma} P dx + Q dy$$

$$\gamma: \begin{aligned} y &= \text{constante} \\ dy &= 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_0^{\Delta x} P(x+t, y) dt$$

p : primitiva
de $P(\cdot, y)$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(\Delta x) - p(0)}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dt} p(t) = P(x+t, y)$$

$$= p'(0) = P(x, y)$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$$

Analogamente, mostra-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$$

$$\therefore \nabla \varphi = \vec{F}$$

Def. Um campo de vetores $\vec{F}$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito conservativo em Ω se ele satisfaz qualquer uma das três condições equivalentes (a), (b), (c) acima.