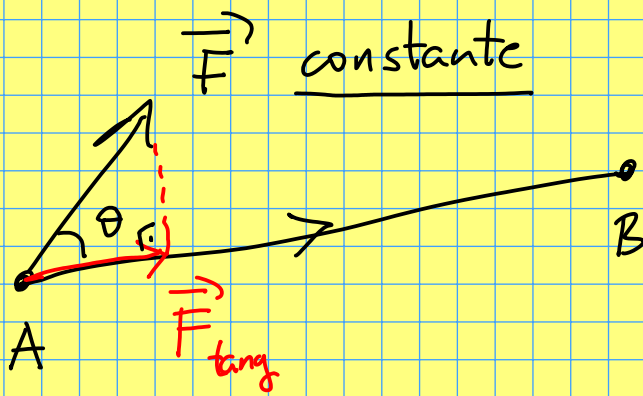


INTEGRAIS DE LINHA

18/10/21

(Cap. 21)

TRABALHO realizado por uma força em um deslocamento:



$$W = |\vec{F}_{\text{tang}}| \cdot \|B - A\|$$

$$= |\vec{F}| \cdot \cos \theta \cdot \|B - A\|$$

$$= \vec{F} \cdot (B - A)$$

↑ produto escalar

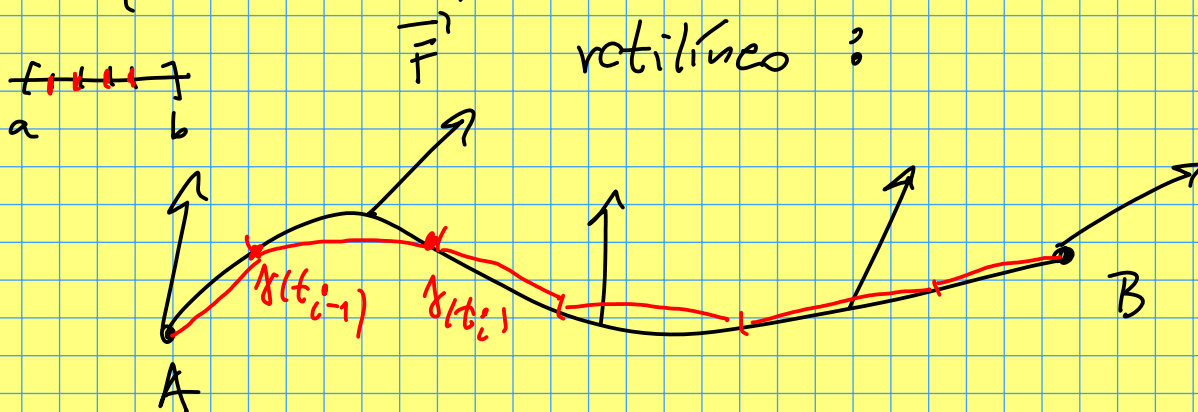
$\vec{r}$: vetor posição

$$\Delta \vec{r} = B - A$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

(deslocamento = ponto final - ponto inicial)

Força variável, deslocamento não-necessariamente retilíneo?



$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) curva diferenciável

$$\gamma(a) = A \quad \gamma(b) = B$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \begin{array}{l} x, y, z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{diferenciáveis} \end{array}$$

$\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vetorial contínuo

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$P, Q, R: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuos

Aproximamos γ por uma poligonal $\mathcal{P}$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

$\mathcal{P}$: poligonal de vértices

$$\gamma(t_0) = \gamma(a) = A, \quad \underline{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_n) = \gamma(b) = B}$$

Em cada segmento $\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)$, vamos

aproximar $\vec{F}$ por uma constante $\vec{F}(\gamma(t_i^*))$,

onde $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. Nesse caso, obtemos a

aproximação para o trabalho:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i$$

W_i : trabalho realizado
por $\vec{F}$ em $[t_{i-1}, t_i]$

$$\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i^{**})) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$\Delta \vec{r}_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$$

$$= \gamma'(t_i^{**}) (t_i - t_{i-1})$$

$$= \gamma'(t_i^{**}) \Delta t_i$$

peelo Teorema
do Valor Médio

$$\mathcal{I} \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i^{**})) \cdot \gamma'(t_i^{**}) \Delta t_i$$

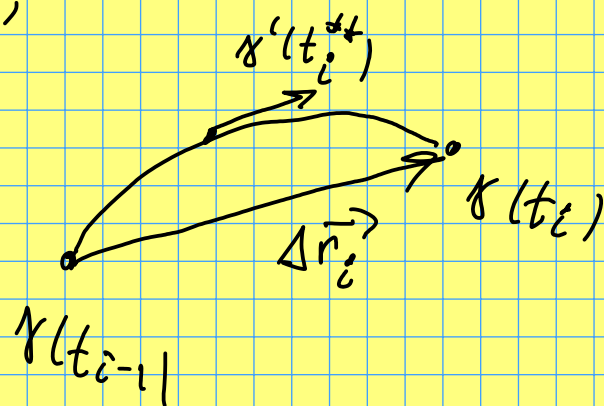
Fazendo $\Delta t_i \rightarrow 0 \quad \forall i=1, \dots, n$,

mostra-se que o membro da

lado direito converge para

a integral

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$



def = Integral de linha de $\vec{F}$ ao
longo de γ ,

e denota-se com $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\therefore \mathcal{I} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\text{prod escalar}} dt$$

Substituindo nesta fórmula os componentes de $\vec{F}$ e γ , vem:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (P, Q, R) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} dt$$

Notação

$$= \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

para
integral
de linha

Exemplos

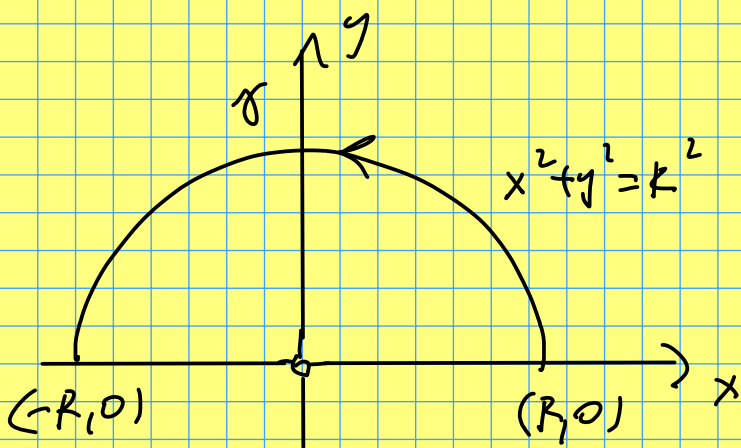
1. Calcular o trabalho realizado pela força

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \text{ ao longo do}$$

deslocamento de $(R, 0)$ até $(-R, 0)$ ao

longo da semi-circunferência $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$.

Resolução



$$\mathcal{C} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\gamma: \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

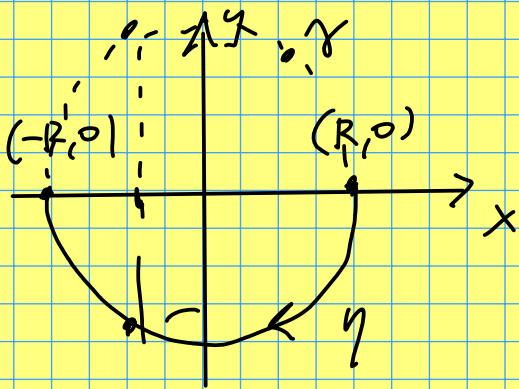
$$\vec{F}(\gamma(t)) = \left(\frac{-R \sin t}{\underbrace{(R \cos t)^2 + (R \sin t)^2}_{= R^2}}, \frac{R \cos t}{\underbrace{(R \cos t)^2 + (R \sin t)^2}_{= R^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{R} (-\sin t, \cos t)$$

$$\mathcal{C} = \int_0^\pi \frac{1}{R} (-\sin t, \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt$$

$$= \int_0^\pi \cancel{\frac{1}{R}} \underbrace{R (\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} dt = \pi \quad (\text{Indépendant de } R)$$

2 - Repetir o cálculo, substituindo γ pela semi-circunferência inferior $x^2 + y^2 = R^2, y \leq 0$.



Resolução

$$\gamma: \begin{cases} x = R \cos t \\ y = -R \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\mathcal{C} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \frac{1}{R^2} (-(-R \sin t), R \cos t) = \frac{1}{R} (\sin t, \cos t)$$

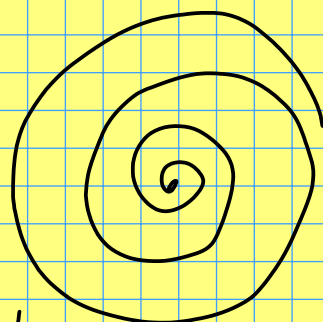
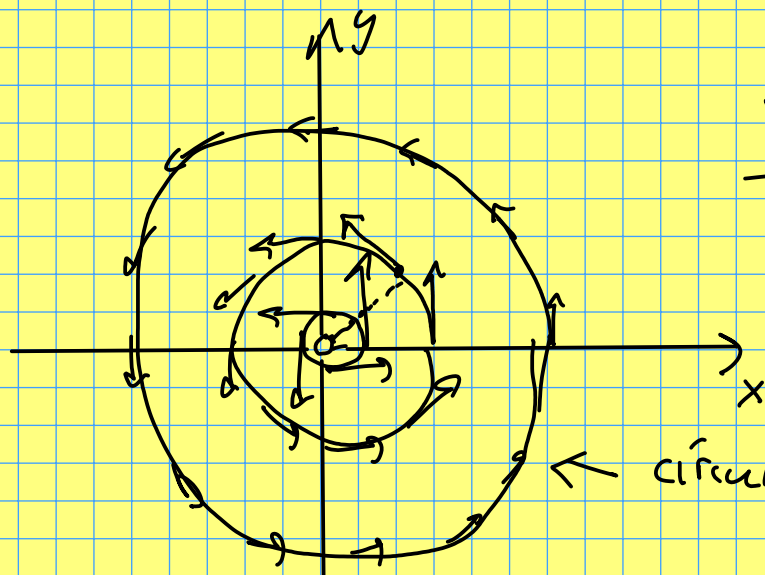
$$\mathcal{C} = \int_0^{\pi} \frac{1}{R} (\sin t, \cos t) \cdot (-R \sin t, -R \cos t) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{\cancel{R}} \cancel{R} \underbrace{(-\sin^2 t - \cos^2 t)}_{=-1} dt = -\pi$$

Em particular, o trabalho realizado por $\vec{F}$ depende do caminho escolhido entre $(R, 0)$ e $(-R, 0)$.

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

vórtice



← círculos: trajetórias do campo de vetores

$$x^2 + y^2 = \underbrace{\| (x,y) \|^2}$$

$$(-y, x) \cdot (x, y) = -yx + xy = 0$$

$$\vec{F}(1,0) = (0, 1)$$

Exemplo 3 Calcular $\int_{\gamma} y dx + (x + zy) dy$

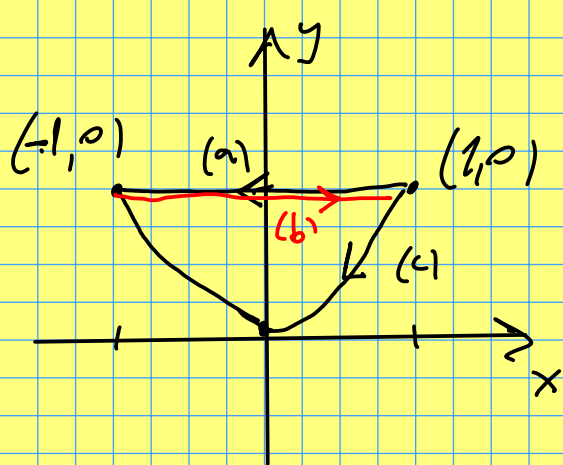
onde γ é:

a. O segmento de $(1, 1)$ até $(1, -1)$.

b. O segmento de $(1, -1)$ até $(1, 1)$.

c. O arco de parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ até $(1, -1)$.

Resolução.



$$a. \quad \gamma: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$dx = -dt$$

$$dy = 0$$

$$\int_{\gamma} y dx + (x + zy) dy$$

$$= \int_0^2 1(-1) + (1-t + 2 \cdot 1) 0 dt$$

$$= \int_0^2 -1 dt = -2$$

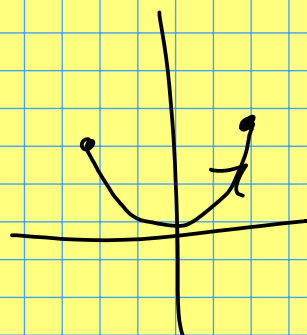
$$b. \quad \gamma: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$dx = dt$$

$$dy = 0$$

$$\int_{\gamma} y dx + (x + zy) dy = \int_{-1}^1 1 dt = 2 \quad \text{[sign opposite to (a)]}$$

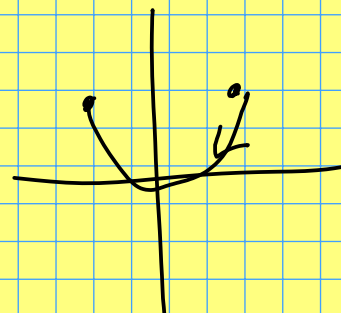
~~$$c. \quad \gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$~~



$$\gamma: \begin{cases} x = -t \\ y = t^2 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$dx = -dt$$

$$dy = 2t dt$$



$$\int_0^1 y dx + (x + 2y) dy = \int_{-1}^1 t^2(-1) + (-t + 2t^2)(2t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 -t^2 - 2t^2 + 4t^3 dt = 2 \int_0^1 -3t^2 dt$$

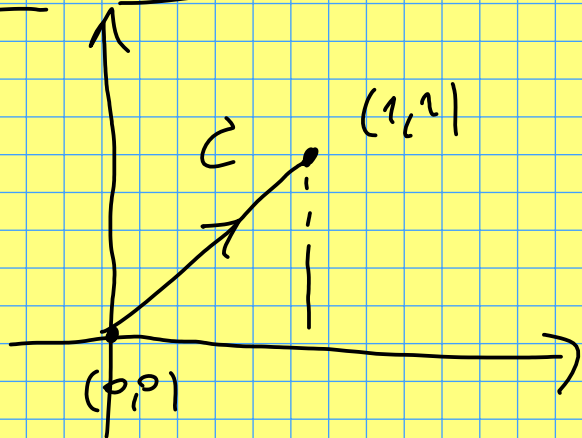
$$\int_{-1}^1 4t^3 dt = 0$$

$$= 2 \left[-t^3 \right]_0^1 = -2 \quad (\text{o mesmo valor que em (a)}).$$

—||—

A integral de linha independe da parametrização do caminho, mantido o sentido do percurso.

Por exemplo:



$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\eta: \begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$$

C : segmento de reta entre $(0,0)$ e $(1,1)$

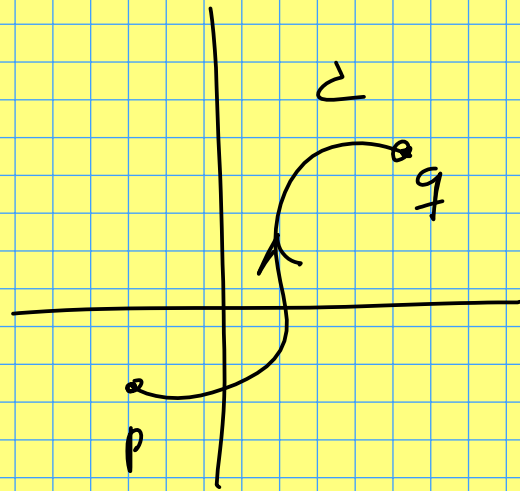
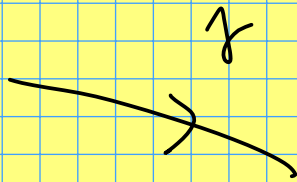
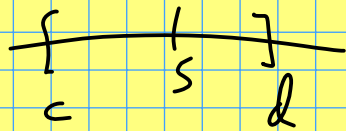
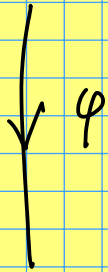
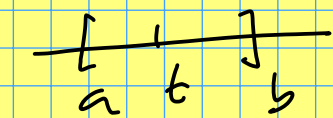
$$\zeta: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

γ, η, ζ são três parametrizações do mesmo caminho C , com a mesma orientação, que vai de $(0,0)$ até $(1,1)$. Afirmamos que

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\eta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\zeta} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para qualquer $\vec{F}$ contínuo.

Demonstração.



$$p = \gamma(a) = \eta(c)$$

$$q = \gamma(b) = \eta(d)$$

$$\varphi(a) = c$$

$$\varphi(b) = d$$

$$s = \varphi(t)$$

$$\eta(s) = \gamma(t)$$

$$\underline{\eta(\varphi(t))}$$

Regra da Cadeia

$$\gamma'(t) = \underbrace{\eta'(\varphi(t))}_{\text{vetor}} \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{escalar}}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b \vec{F}(\eta(\varphi(t))) \cdot \eta'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$= \int_c^d \vec{F}(\eta(s)) \cdot \eta'(s) ds$$

$$= \int_{\eta} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Mudança de
variável

$$s = \varphi(t)$$

$$ds = \varphi'(t) dt$$

Então faz sentido denotar essa integral de

linha por $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\text{Obs } \int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde $-C$ é o caminho C com a orientação trocada.