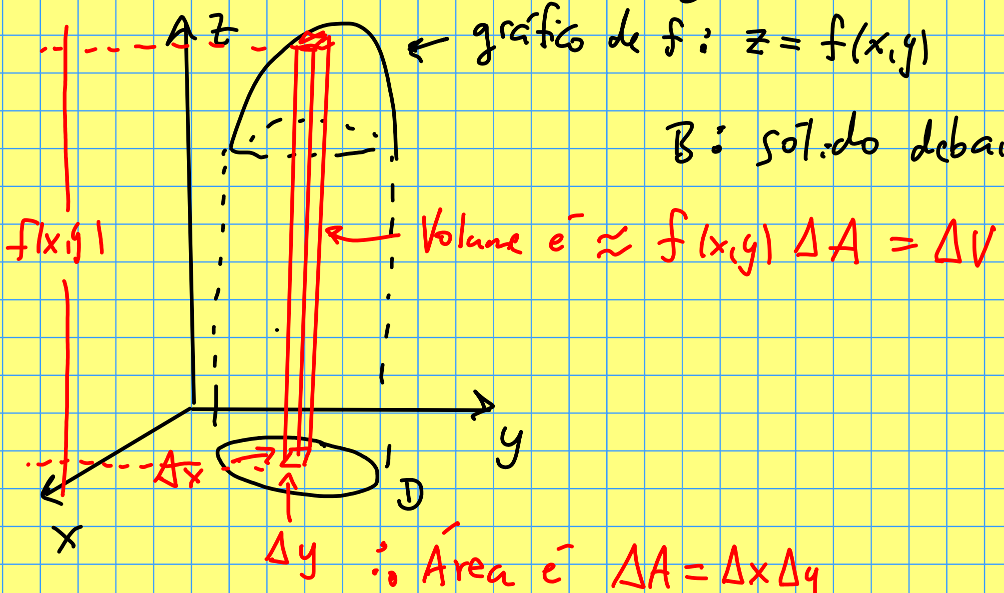
APLICAÇÕES À FÍSICA

23/08/21

1. $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

$D \subset \Omega$ domínio de integração



$Vol(B) \approx \sum \Delta V$

Passando ao limite: $Vol(B) = \iint_D dV = \iint_D f(x,y)\, dA$

dA: elemento de área

dV: elemento de volume

Nota histórica:

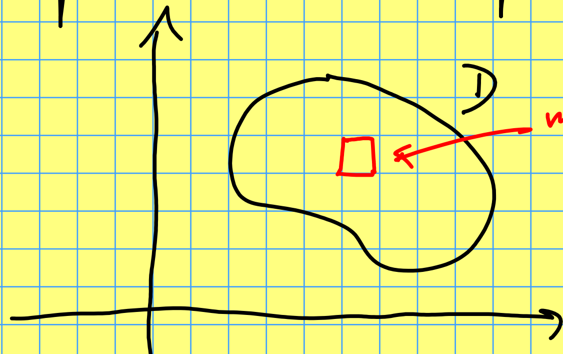
$\int$ símbolo da integral é um "S" estilizado.

O nome original é "soma integral".

(summa integralis)

2. MASSA (de uma placa infinitesimalmente fina)

A placa é modelada por $D \subset \mathbb{R}^2$.



$$\boxed{\text{Área}(D) = \iint_D dA}$$

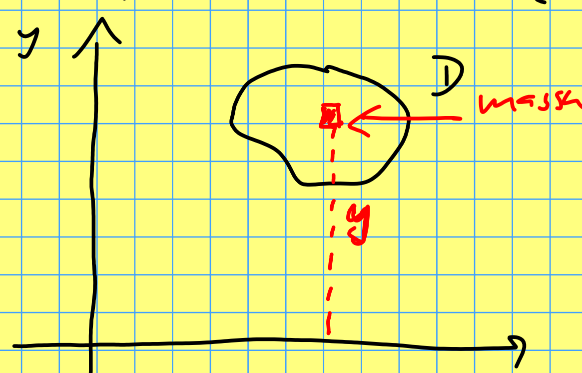
Seja $\delta : D \to (0, +\infty)$ a função densidade de área

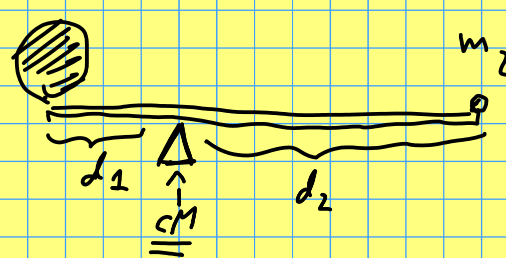
$$\boxed{\text{Massa}(D) = \iint_D \delta(x,y)\, dA}$$

Por exemplo, se δ é constante, $\delta(x,y) = k$, $\forall (x,y) \in D$ (placa homogênea), então

$$\text{Massa}(D) = \iint_D k \cdot dA = k \iint_D dA = k\, \text{Área}(D).$$

3. MOMENTO (LINEAR)





$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \qquad (*)$$

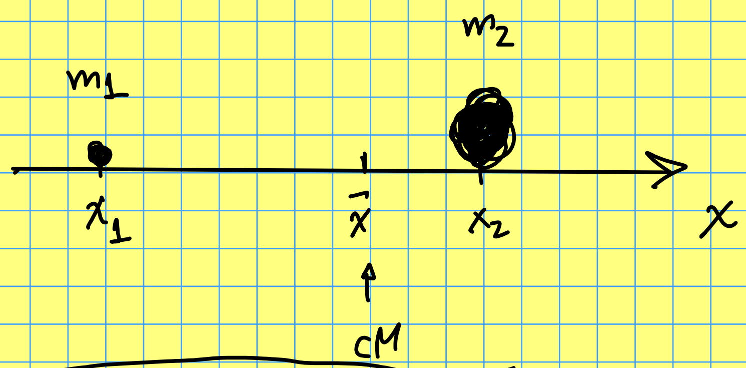
$$\boxed{M_x = \iint_D y\, \delta(x,y)\, dA}$$

↑
momento total da placa em relação ao eixo x

$$\boxed{M_y = \iint x\,\delta(x,y)\,dA}$$

↑
momento rel eixo y

4. CENTRO DE MASSA



$$\boxed{\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$$

$$d_1 = \bar{x} - x_1 = \frac{\cancel{m_1 x_1} + m_2 x_2 - (\cancel{m_1} + m_2) x_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = \frac{(m_1 + \cancel{m_2}) x_2 - m_1 x_1 - \cancel{m_2 x_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow m_1 d_1 = \frac{m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} = m_2 d_2 \checkmark \quad (*)$$

Outra maneira:

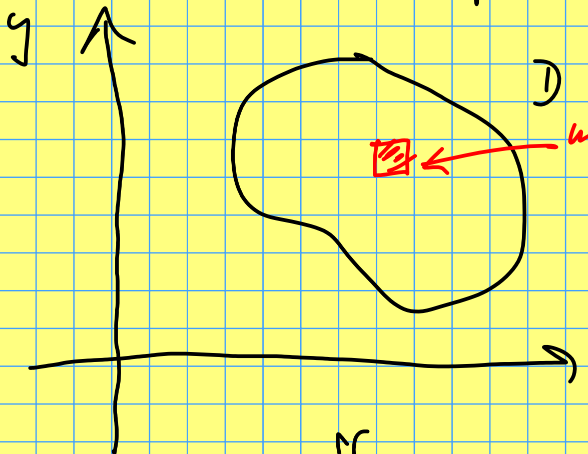
Momento em relação a $\bar{x}$:

$$m_2 (x_2 - \bar{x}) + m_1 (x_1 - \bar{x}) = m_2 d_2 + m_1 (-d_1) = 0$$

$$m_2 x_2 - m_2 \bar{x} + m_1 x_1 - m_1 \bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Caso de uma placa $D \subset \mathbb{R}^2$:



$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_D \delta(x,y)\,dA} = \frac{M_y}{M}$$

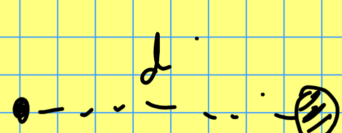
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\,dA}{\iint_D \delta(x,y)\,dA} = \frac{M_x}{M}$$

$\rightarrow \; M_y = M \cdot \bar{x}$ $\qquad$ $\rightarrow \; M_x = M \cdot \bar{y}$

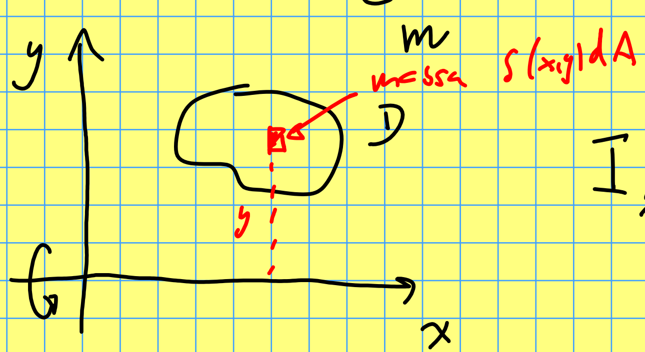
$(\bar{x}, \bar{y})$: centro de massa de D

$M = \text{Massa}(D)$

5. MOMENTO DE INÉRCIA

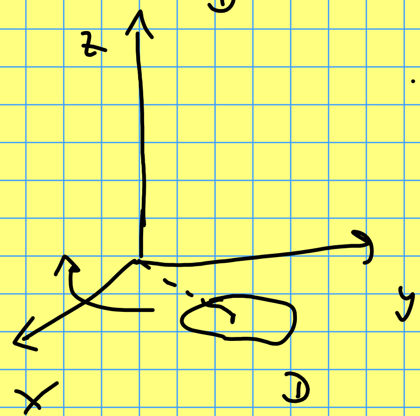


$$I = m d^2$$



$$I_x = \iint_D y^2\,\delta(x,y)\,dA$$

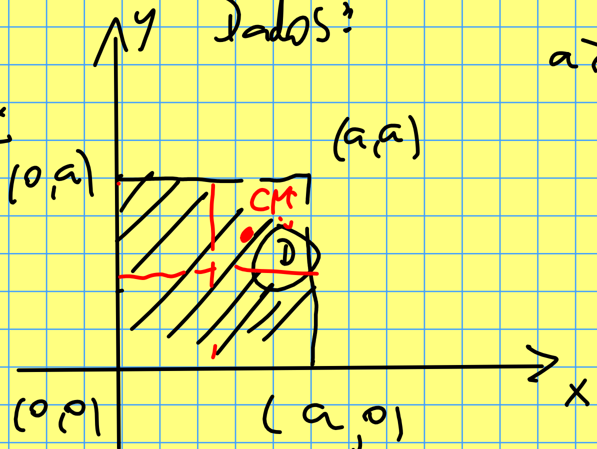
$$I_y = \iint_D x^2 \, \delta(x,y) \, dA$$



$$I_z = \iint_D (x^2+y^2)\, \delta(x,y)\, dA = I_x + I_y$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exemplo:



Dados: $a > 0$

$\delta(x,y) = x.y$

Calcular A, M, $(\bar{x},\bar{y})$, I_x, I_y, I_z.

$$A = a^2$$

$$M = \iint_D \delta \, dA = \iint_D xy \, dA = \int_0^a \int_0^a xy \, dx \, dy$$

$$= \int_0^a \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=0}^{x=a} dy = \int_0^a \frac{a^2}{2} y \, dy$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^a = \frac{a^4}{4}$$

$$M_y = \iint_D x\delta\, dA = \iint_D x^2 y\, dA = \int_0^a\int_0^a \underbrace{x^2 y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a x^2 \underbrace{\left(\int_0^a y\,dy\right)} dx = \left(\int_0^a y\,dy\right)\left(\int_0^a x^2\,dx\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\frac{a^3}{3} = \frac{a^5}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{a^5/6}{a^4/4} = \frac{2}{3}a$$

D e δ são invariantes por troca de x e y

Por simetria, $\bar{y} = \frac{2}{3}a$

$$I_x = \iint_D y^2\delta\, dA = \iint_D x y^3\, dA$$

$$= \left(\int_0^a x\,dx\right)\left(\int_0^a y^3\,dy\right) = \frac{a^2}{2}\,\frac{a^4}{4} = \frac{a^6}{8}$$

$$I_x = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{a^2}{2} = M\frac{a^2}{2}$$

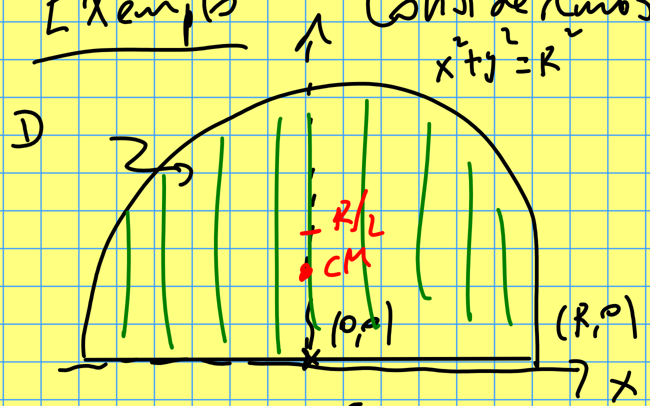
Por simetria, $I_y = M\frac{a^2}{2}$

$I_z = M a^2$ //.

Exemplo

Consideremos um semi-disco homogêneo de raio R.

Calculemos seu centro de massa.



Resolução $\delta(x,y) = k$

Por simetria, $\bar{x} = 0$.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\,\delta\,dA}{\iint_D \delta\,dA} = \frac{\cancel{k}\iint_D y\,dA}{\cancel{k}\iint_D dA} = \frac{\iint_D y\,dA}{\text{Área}(D)}$$

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$\iint_D y\,dA = \int_{-R}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy\,dx$$

$$D: \begin{cases} -R \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2} \end{cases}$$

$$= 2\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^R \left[y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^R R^2 - x^2\,dx = R^2x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4}{3\pi} R \quad //$$

$$\frac{4}{3\pi} < \frac{1}{2} \iff 8 < 3\pi \quad \checkmark$$