

INTEGRAIS DUPLAS

19/08/21

(Aula passada: §20.1; hoje: §20.2 [versão em português])

→ Integral iterada : $\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$

Integral dupla : $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ↑
ordem de
integração

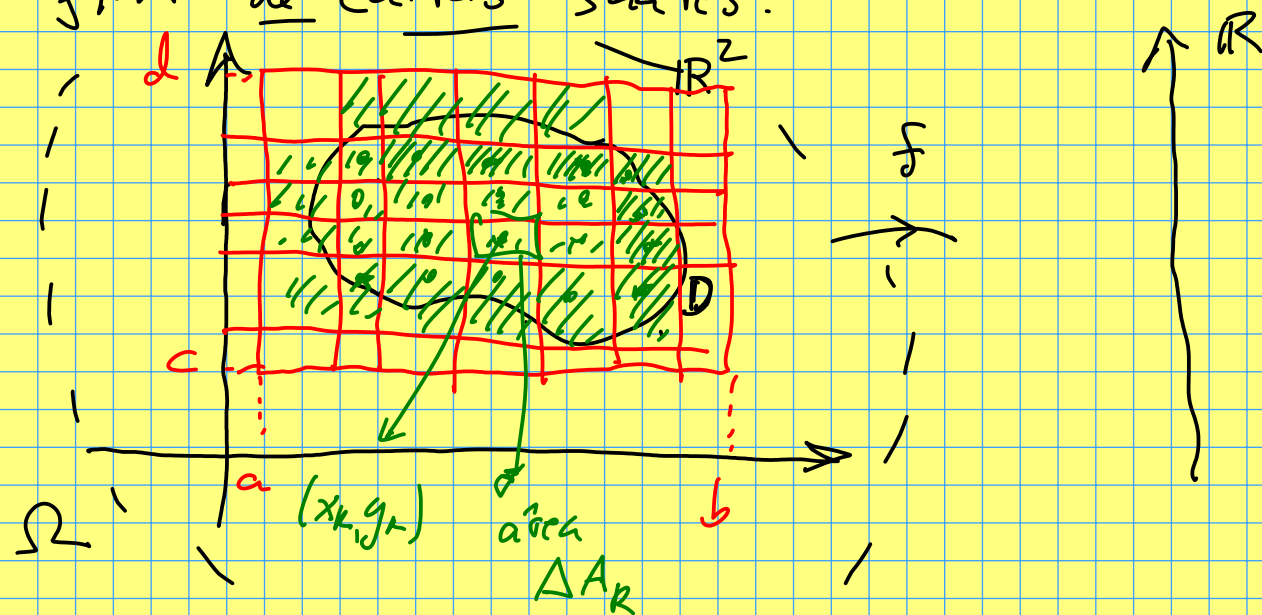
$D \subset \Omega$

$\iint_D f(x,y) dA$

domínio de integração

tipicamente D é uma região limitada (isto é, contida em um retângulo de $\mathbb{R}^2$), D contém a sua fronteira, e sua fronteira se decompõe em um número

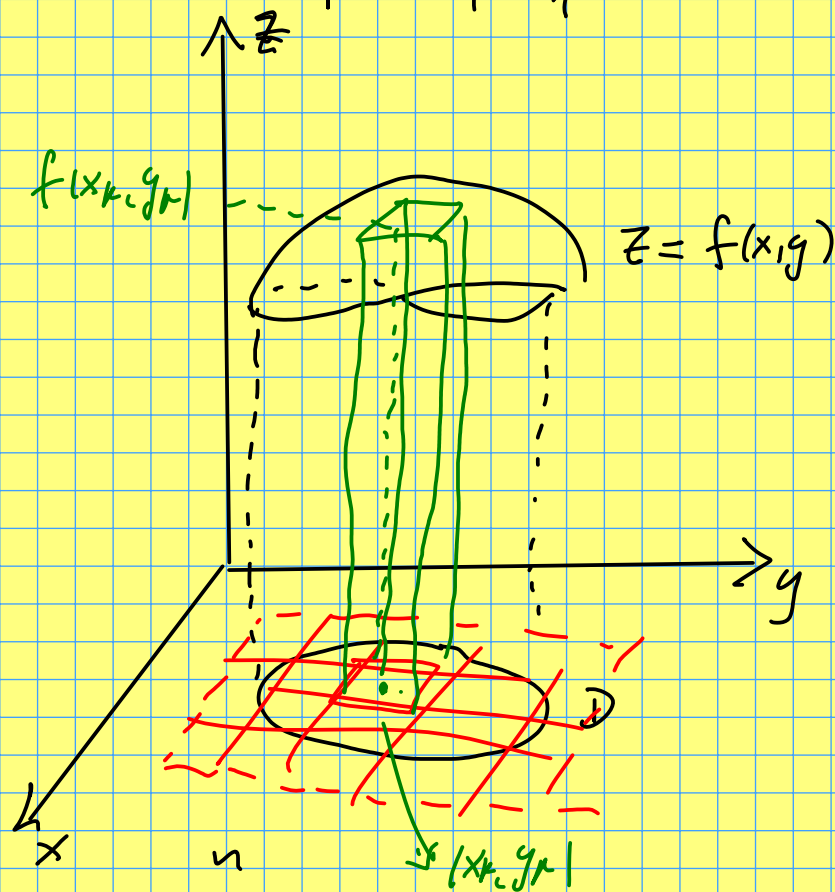
finito de curvas suaves.



$$D \subset [a, b] \times [c, d]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k =: \iint_D f(x, y) dA$$

Sobre todas as maneiras possíveis de dividir o retângulo e escolher pontos, quando $\Delta A_k \rightarrow 0, \forall k$



$$f(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D$$

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \text{soma dos volumes dos paralelepípedos}$$

é uma aproximação do volume do sólido abaixo do gráfico de f , tão melhor quanto as áreas das bases ΔA_k sejam pequenas.

No caso de uma função integrável, o

limite

$$\lim_{\substack{\Delta A_k \rightarrow 0, \\ \forall k}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

existe e é igual ao volume do sólido B
debaixo do gráfico de f .

$$\therefore \iint_D f(x, y) \, dA = \text{Volume}(B)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{integral dupla}}$

Outra notação:

$$\iint_D f(x, y) \, \underline{\underline{dx dy}}$$

→

Normalmente, uma integral dupla é
calculada reduzindo-a a uma integral
iterada. (Teorema de Fubini):

Suponhamos que D pode ser escrito na
forma

$$\hookrightarrow D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{array} \right\}$$

Então

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy dx$$

Similarmente, se

$$\hookrightarrow D = \{ (x,y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \}$$

então

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx dy$$

Exemplo 1. Calcular a integral dupla

$$\iint_D 2xy dA$$

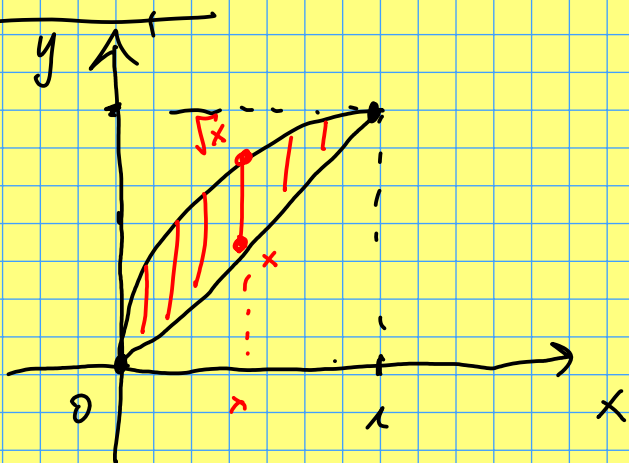
onde D é a região delimitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x$.

Resolução.

$$y = \sqrt{x}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$x \leq y \leq \sqrt{x}$$



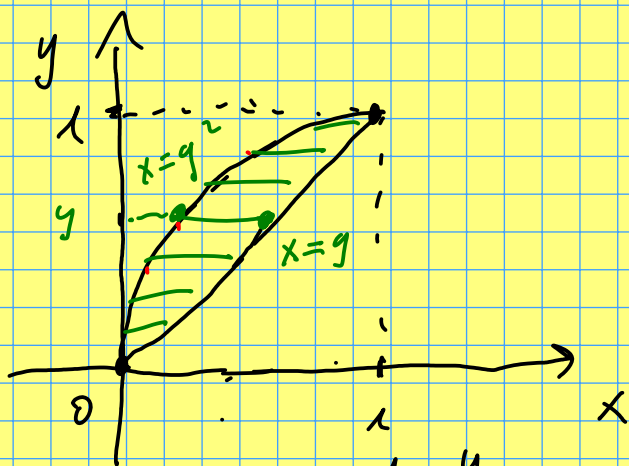
$$\iint_D 2xy \, dA = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} 2xy \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 x(x - x^2) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Alternativamente:



$$D = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 \leq x \leq y \end{cases}$$

$$\iint_D 2xy \, dA = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y 2xy \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[2y \frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=y} dy$$

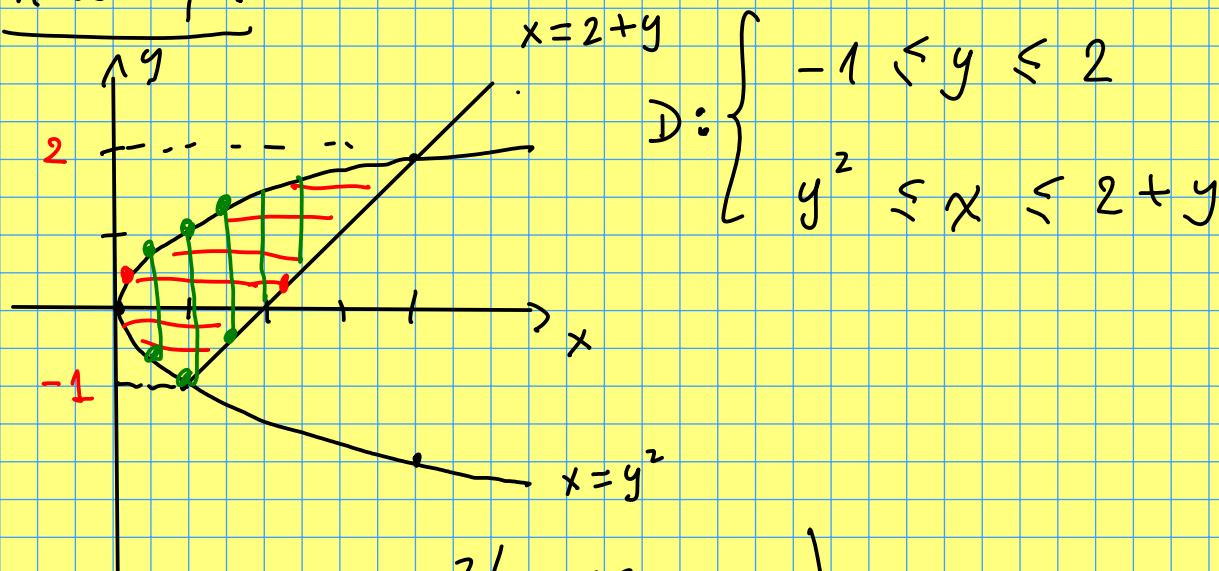
$$= \int_0^1 y (y^2 - y^4) dy = \int_0^1 y^3 - y^5 dy$$

$$= \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{6-4}{24} = \frac{1}{12}$$

Exemplo 2. Calcular $\iint_D 1+2x \, dA$ onde

D é delimitada por $x=y^2$ e $x-y=2$.

Resolução.



$$\iint_D 1+2x \, dA = \int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} 1+2x \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^2 [x + x^2]_{x=y^2}^{x=y+2} dy$$

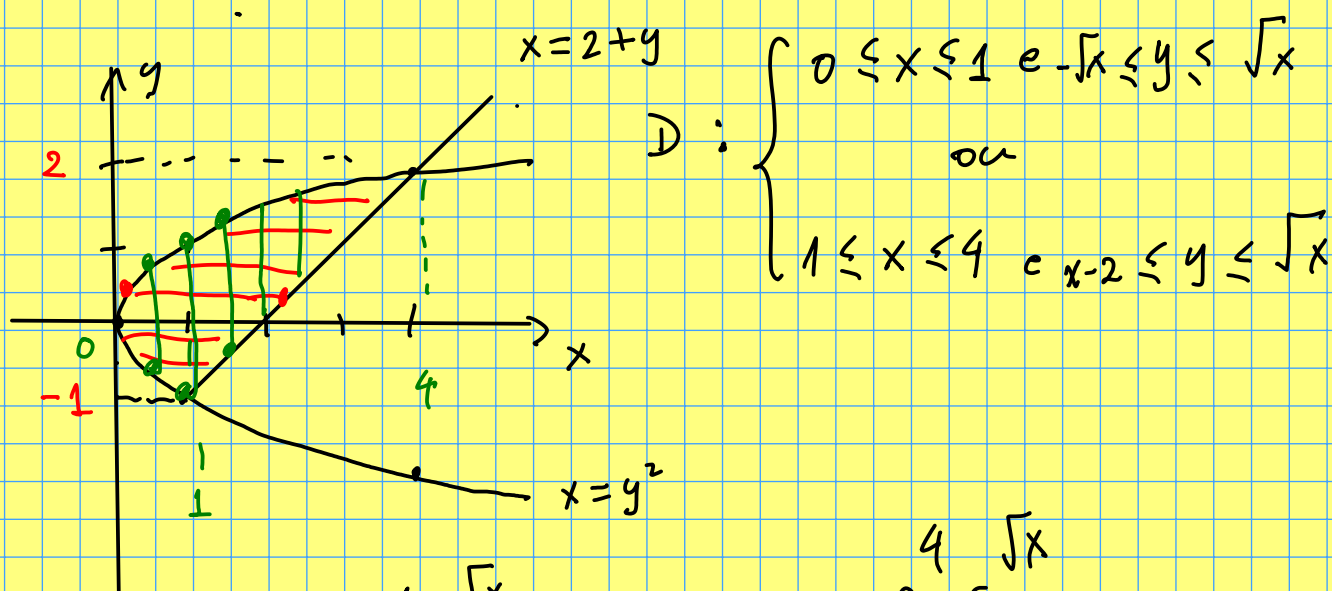
$$= \int_{-1}^2 (y+2) + (y+2)^2 - (y^2 + y^4) dy$$

$$= \int_{-1}^2 \underbrace{y+2}_{=6} + \underbrace{y^2}_{=5y} + \underbrace{4y+4}_{=5y} - \underbrace{y^2}_{=y^2} - \underbrace{y^4}_{=y^4} dy$$

$$= \int_{-1}^2 6 + 5y - y^4 dy = 6y + \frac{5y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \Big|_{-1}^2$$

$$= \frac{189}{10}$$

Alternativamente:



$$\iint_D 1+2x dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1+2x dy dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} 1+2x dy dx$$

Exemplo 3. Calcular a integral iterada

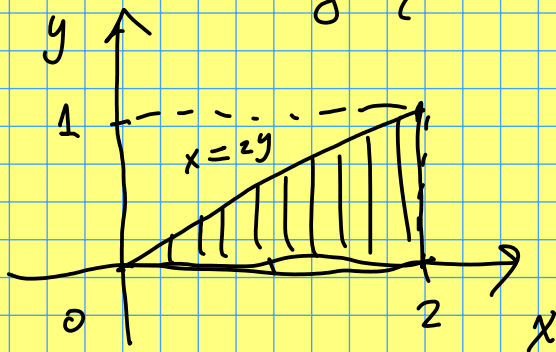
$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2} dx dy.$$

$$\int e^{x^2} dx = ??? \quad \underline{(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x}$$

e^{x^2} não tem primitiva expressa em termos de funções elementares.

Invertamos a ordem de integração?

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 2y \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D 4e^{x^2} dA &= \int_0^2 \int_0^{x/2} 4e^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^2 [4e^{x^2} y]_{y=0}^{y=x/2} dx = \int_0^2 2x e^{x^2} dx \\ &= e^{x^2} \Big|_0^2 = e^4 - 1 // \end{aligned}$$