MAT 2352

16/08/21

- Página da disciplina
  www.ime.usp.br/~gorodski/teaching/mat2352/main.html
- Provas : E-disciplinas
- Listas : E-disciplinas
- Livro-texto : G. F. Simmons, vol. 2
  (dois últimos capítulos)

—//—

Cálculo Integral (muitas variáveis)

Integrar funções de duas ou três variáveis

—//—

$f(x,y)$ contínua

$$\longrightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad \underline{\text{integral dupla}}$$

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

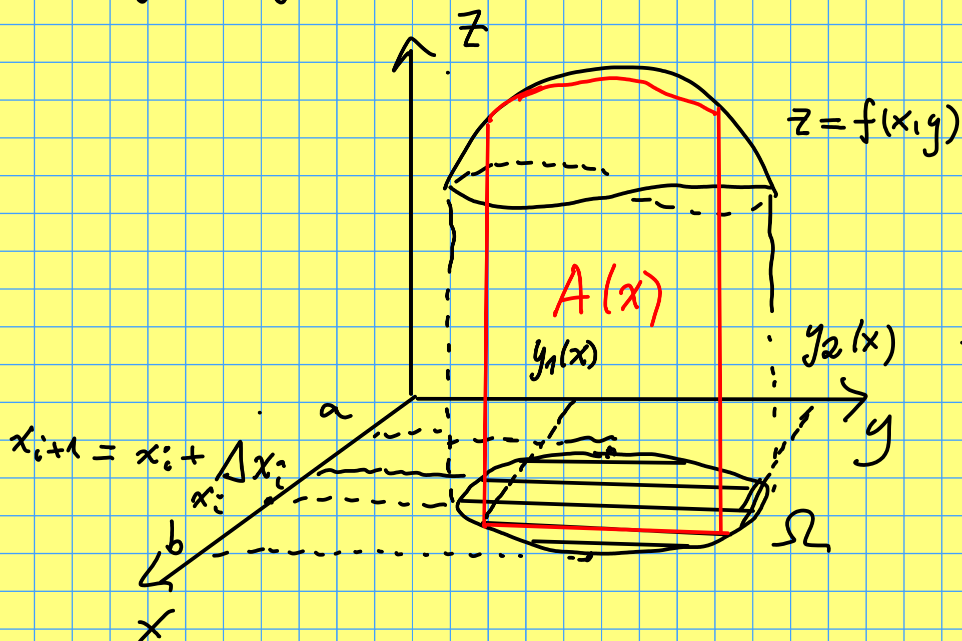


Gráfico de $f = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega\}$

B : sólido debaixo do gráfico

$B = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq f(x,y),\ (x,y) \in \Omega\}$

$$\text{Volume}(B) \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\, \Delta x_i$$

$$\text{Vol}(B) = \lim \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\, \Delta x_i = \int_a^b A(x)\, dx \quad (1)$$

$n \to \infty$

$\Delta x_i \to 0 \quad \forall i$

Soma de Riemann

$A(x)$: área debaixo do gráfico da função

$g_x(y) = f(x,y) \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g_x(y)\, dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy \quad (2)$$

x fixado, integração rel y

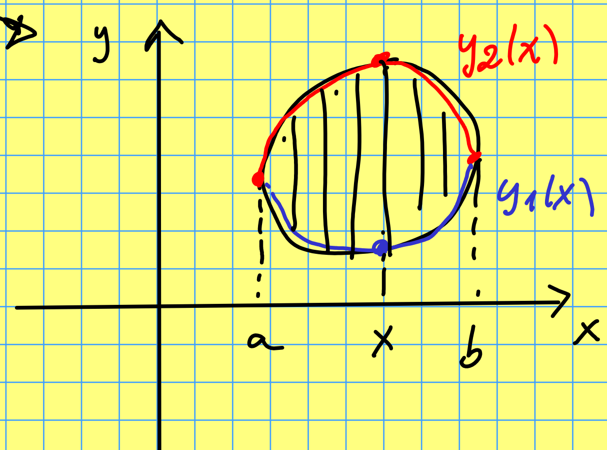
Substituindo (2) em (1), vem:

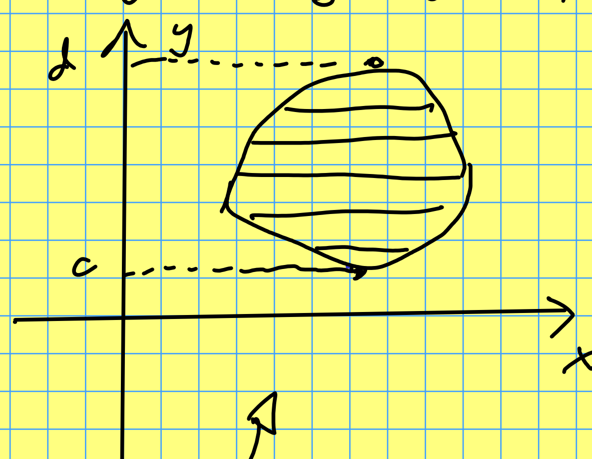
$$\mathrm{Vol}(B) = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Integral <u>iterada</u> de f

$$\Omega = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ e } y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$





$$\Omega = \{ (x,y) \mid c \leq y \leq d \text{ e } x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \}$$

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

integral iterada de f

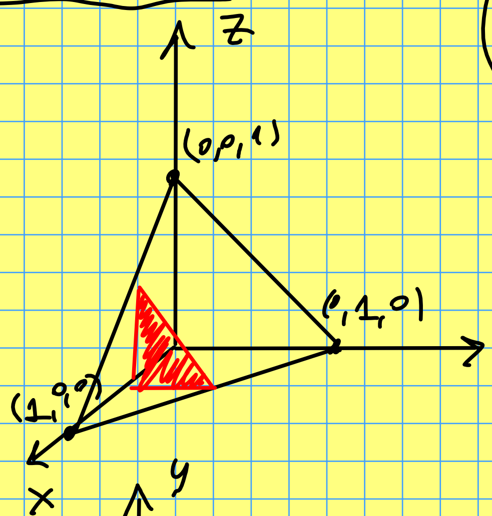
Notamos que existem <u>duas</u> ordens de integração.

<u>Exemplo 1</u> Calcular o volume do tetraedro B delimitado pelos planos coordenados e pelo plano <u>$x+y+z=1$</u>.

<u>Resolução.</u>

$z=0 \rightarrow x+y=1$

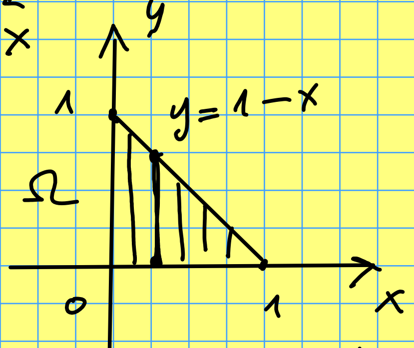
$z = 1-x-y$



$f(x,y) = 1-x-y$

$Gr(f)$: "tampa" superior de B

face sup. do tetraedro.



$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 1-x$

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y\; dy\, dx \qquad (3)$$

$$\int_0^{1-x} 1-x-y \, dy = \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x}$$

$$= (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} - 0 = \frac{(1-x)^2}{2} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{6}\left(0 - 1\right) = \frac{1}{6} \; //$$

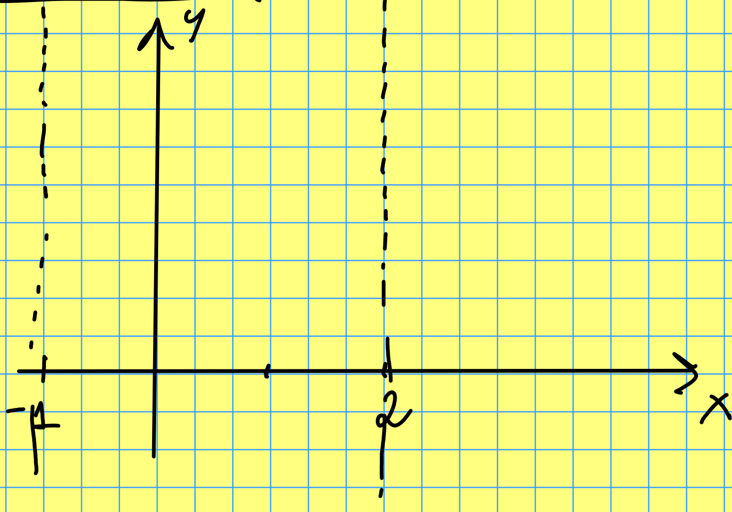
Exemplo 2. Desenhar a região de integração na integral iterada:

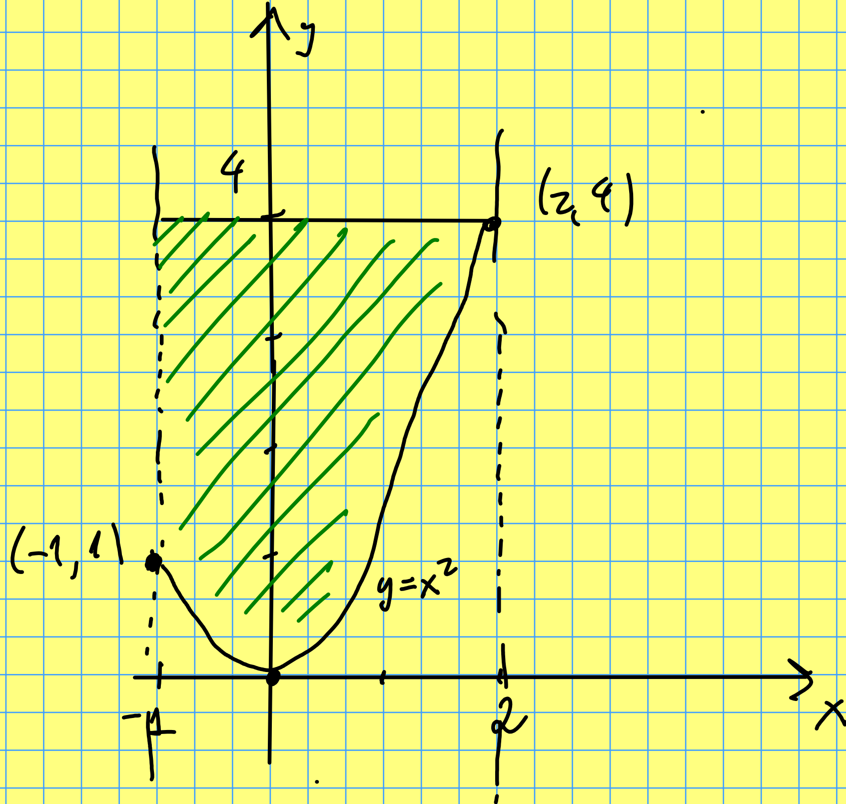
$$\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{4} f(x,y) \, dy \, dx.$$

Resolução.

$-1 \leq x \leq 2$

$x^2 \leq y \leq 4$



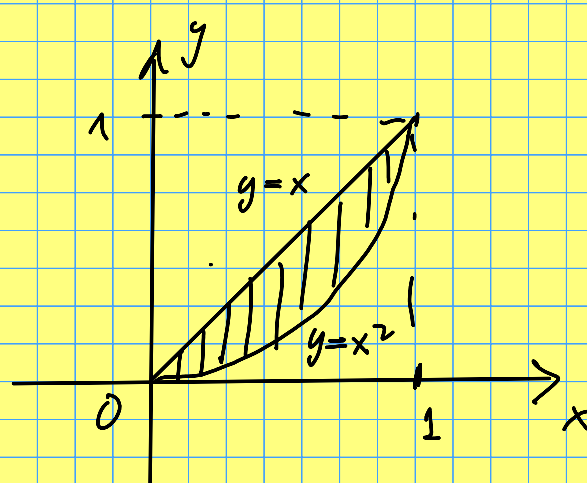


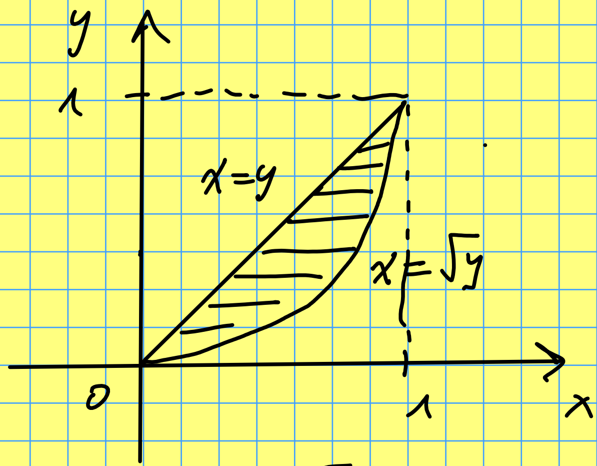
Exemplo 3. Inverter a ordem de integração na integral iterada:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx .$$

Resolução.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$





$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Problemas da seção 20.1, versão em inglês