Lista 6

2) Exercício 88) Mostre que se duas mediatrizes se encontram num ponto P, então a terceira mediatriz também passa por P.

Considere o triângulo ΔABC e os pontos R, S, T médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Vamos supor que as mediatrizes dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ se encontram em um ponto P. Agora considere a linha que passa por P e R. Vamos mostrar que l_{PR} é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Considere o triângulo ΔAPC. Temos que $\overline{TA} \equiv \overline{TC}$, $\overline{TP} \equiv \overline{TP}$ e $m(A\hat{T}P) = m(C\hat{T}P) = 90°$, assim, pelo Postulado LAL, temos que $\Delta ATP \equiv \Delta CTP$ e, portanto, $\overline{AP} \equiv \overline{PC}$.

Considere agora o triângulo ΔBPC. Temos que $\overline{SB} \equiv \overline{SC}$, $\overline{SP} \equiv \overline{SP}$ e $m(C\hat{S}P) = m(B\hat{S}P) = 90°$, e, assim, pelo Postulado LAL, temos que $\Delta BPS \equiv \Delta CPS$ e, portanto, $\overline{BP} \equiv \overline{PC}$.

Como $\overline{AP} \equiv \overline{PC}$ e $\overline{BP} \equiv \overline{PC}$, temos que $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$.

Considere o triângulo ΔAPB. Temos que $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$, $\overline{RP} \equiv \overline{RP}$ e $\overline{AR} \equiv \overline{RB}$ (pois R é ponto médio de $\overline{AB}$). Logo, $\Delta APR \equiv \Delta BPR$. Assim, $m(A\hat{R}P) = m(B\hat{R}P)$ e como A-R-B, temos, pelo Exercício 59, que $m(A\hat{R}P) = m(B\hat{R}P) = 90°$. Portanto a linha l_{PR} é perpendicular a l_{AC}, passando pelo ponto médio do segmento $\overline{AC}$, ou seja, l_{PR} é mediatriz de $\overline{AC}$.

Assim temos que se duas mediatrizes se encontram em um ponto P, a terceira mediatriz também passa por P.

3) No plano hiperbólico, considere o triângulo ΔABC, onde $A=(0,2)$, $B=(-1,1)$, $C=(1,1)$

a) Escreva as equações das linhas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$.

$(x-p)^2+y^2=r^2$

$\overleftrightarrow{AB}$

$$\begin{cases}(0-p)^2+4=r^2\\(-1-p)^2+1=r^2\end{cases}$$

$$\cancel{p^2}+4=\cancel{p^2}+1+2p+1$$

$$2p=4-2$$

$$\boxed{p=1} \rightsquigarrow p_{AB}$$

$$(0-1)^2+4=r^2$$

$$r^2=5$$

$$\boxed{r=\sqrt{5}}$$

$$\boxed{(x-1)^2+y^2=5}$$

$\overleftrightarrow{BC}$

$$\begin{cases}(-1-p)^2+1=r^2\\(1-p)^2+1=r^2\end{cases}$$

$$\cancel{p^2}+2p+\cancel{1}=\cancel{p^2}-2p+\cancel{1}$$

$$4p=0$$

$$\boxed{p=0} \rightsquigarrow p_{BC}$$

$$(-1-0)^2+1=r^2$$

$$r^2=1+1$$

$$\boxed{r=\sqrt{2}}$$

$$\boxed{x^2+y^2=2}$$

$\overleftrightarrow{CA}$

$$\begin{cases}(1-p)^2+1=r^2\\(0-p)^2+4=r^2\end{cases}$$

$$\cancel{p^2}-2p+1+1=\cancel{p^2}+4$$

$$2p=-4+2$$

$$\boxed{p=-1} \rightsquigarrow p_{CA}$$

$$(0+1)^2+4=r^2$$

$$r^2=5$$

$$\boxed{r=\sqrt{5}}$$

$$\boxed{(x+1)^2+y^2=5}$$

b) Mostre que $m(\angle BAC) > 90$

$u_{AC} = (2, -1-0) = (2,-1)$, $|u_{AC}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\Rightarrow v_{AC} = \dfrac{u_{AC}}{|u_{AC}|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$u_{AB} = (2, 1-0) = (2,1)$, $|u_{AB}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\Rightarrow v_{AB} = -\dfrac{u_{AB}}{|u_{AB}|} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$v_{AC} \cdot v_{AB} = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$$

Portanto $m(\angle BAC) = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 126{,}87 > 90$

c) Escreva as equações das alturas do ΔABC

Altura relativa ao lado $\overline{AB}$: é o segmento $\overline{CD}$, onde D é o pé da perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$ passando por $C = (1,1)$

Como $C \in \ell_1$ e $p_{AB} = 1$, temos que a perpendicular à linha $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C é a linha ℓ_1.

Assim $D = \overleftrightarrow{AB} \cap \ell_1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (1-1)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5} \text{ (pois } y > 0)$$

$\therefore D = (1, \sqrt{5})$

$\overline{CD} = (1, t)$, $1 < t < \sqrt{5}$

Altura relativa ao lado $\overline{CA}$: é o segmento $\overline{BE}$, onde E é o pé da perpendicular à $\overleftrightarrow{CA}$ passando por $B = (-1,1)$

Como $B \in \ell_{-1}$ e $p_{CA} = -1$, temos que a perpendicular à linha $\overleftrightarrow{CA}$ passando por B é a linha ℓ_{-1}

Assim $E = \overleftrightarrow{CA} \cap \ell_{-1}$.

$$\begin{cases} x = -1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (-1+1)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

$\therefore E = (-1, \sqrt{5})$

$\overline{BE} = (-1, t),\ 1 \leq t \leq \sqrt{5}$

Altura relativa ao lado $\overline{BC}$: é o segmento $\overline{AF}$, onde F é o pé da perpendicular à $\overleftrightarrow{BC}$ passando por $A = (0, 2)$.

Como $A \in \ell_0$ e $p_{BC} = 0$, temos que a perpendicular à linha $\overleftrightarrow{BC}$ passando por A é a linha ℓ_0

Assim $F = \overleftrightarrow{BC} \cap \ell_0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$\therefore F = (0, \sqrt{2})$

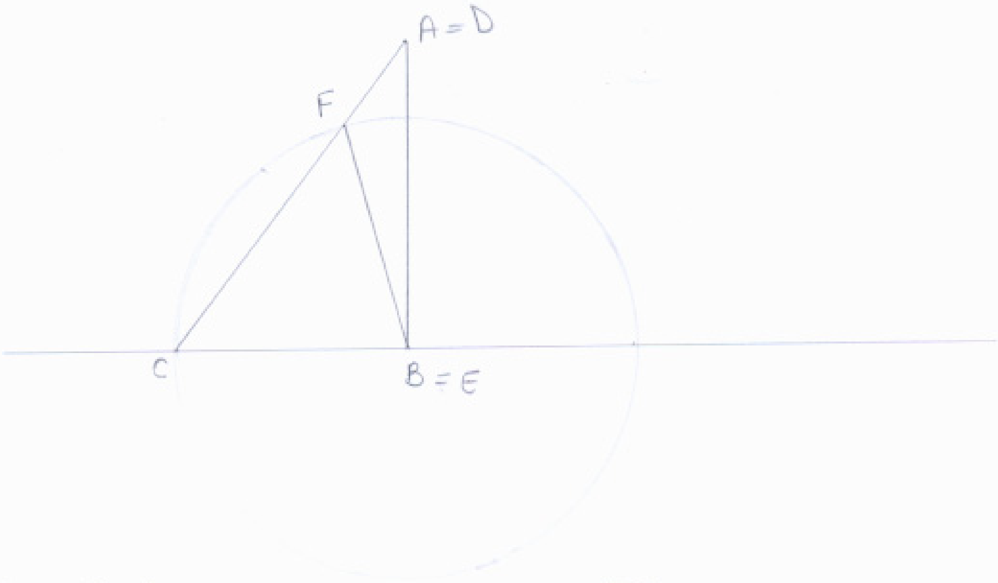
$\overline{AF} = (0, t),\ \sqrt{2} < t < 2$

d) Verifique que as alturas não se encontram em um ponto.

Como as alturas $\overline{CD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{AF}$ são segmentos de retas verticais distintas, temos que $\overline{CD} \cap \overline{BE} = \emptyset$, $\overline{CD} \cap \overline{AF} = \emptyset$ e $\overline{BE} \cap \overline{AF} = \emptyset$ e, portanto, as alturas não se encontram.

4) Sejam ΔABC e ΔDEF dois triângulos dados. Suponha que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$. É verdade que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$?

Não. Sejam $A = D$, $B = E$, C e F pontos do plano da geometria analítica os pontos representados abaixo:



Temos que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{BF}$ e $\angle BAC = \angle EDF$, mas vemos claramente que os triângulos ΔABC e ΔDEF não são congruentes.

5) Seja $\overrightarrow{BD}$ a bissetriz de $\angle ABC$ e sejam $E \in \overrightarrow{BA}$ e $F \in \overrightarrow{BC}$ os pés das perpendiculares passando por D. É verdade que $\overline{DE} \equiv \overline{DF}$?

Se valer o critério LAA_o sim, pois teremos $\angle EBD \equiv \angle CBD$ (pois $\overrightarrow{BD}$ é bissetriz de $\angle ABC$, o que implica que $\overrightarrow{BD}$ é bissetriz de $\angle EBF$, pois $E \in \overrightarrow{BA}$ e $F \in \overrightarrow{BC}$), $\angle DEB \equiv \angle DFB = 90°$ e $\overline{DB} \equiv \overline{DB}$, ou seja, $\Delta EBD \equiv \Delta FBD$, o que implica $\overline{DE} \equiv \overline{DF}$.

6) Escreva a equação da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 na geometria do taxista. Justifique.

A circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 na geometria do taxista é o conjunto $C_{0,1} = \{X=(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(X,(0,0)) = 1\}$

Como na geometria do taxista temos

$d((a,b),(c,d)) = |a-c| + |b-d|$, temos

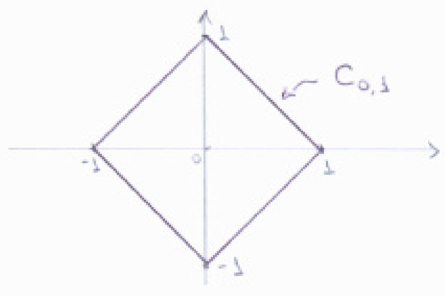
$C_{0,1} = \{X=(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$

Para resolver $|x|+|y|=1$, vamos dividir em casos.

1º caso: $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert = 1 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = -x+1$ $x \in [0,1]$	2º caso: $x \geq 0$ e $y < 0$ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert = 1 \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x-1$ $x \in [0,1]$
3º caso: $x < 0$ e $y \geq 0$ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert = 1 \Rightarrow -x+y=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x+1$ $x \in [-1,0]$	4º caso: $x < 0$ e $y < 0$ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert = 1 \Rightarrow -x-y=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = -x-1$ $x \in [-1,0]$

Ou seja, $C_{0,1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x+1 \text{ ou } y = x-1,\ x \in [0,1]\} \cup$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1 \text{ ou } y = -x-1,\ x \in [-1,0]\}$

Graficamente teríamos:



7) Seja ΔABC um triângulo retângulo, isto é, com um ângulo reto. Suponha, por exemplo, que $\angle ABC$ é reto.

a) Mostre que na geometria analítica vale o Teorema de Pitágoras: $m(\overline{AC})^2 = m(\overline{AB})^2 + m(\overline{BC})^2$.

Sejam $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ e $C=(c_1,c_2)$

Como $m(\angle ABC)=90$, temos $(A-B)\cdot(C-B)=0$.

$(A-B)\cdot(C-B)=0 \Rightarrow (a_1-b_1, a_2-b_2)\cdot(c_1-b_1, c_2-b_2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1c_1 - a_1b_1 - b_1c_1 + b_1^2 + a_2c_2 - a_2b_2 - b_2c_2 + b_2^2$.

Temos que

$m(\overline{AC}) = d(A,C) = \sqrt{(a_1-c_1)^2 + (a_2-c_2)^2} \therefore m(\overline{AC})^2 = (a_1-c_1)^2 + (a_2-b_2)^2$

$m(\overline{AB}) = d(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} \therefore m(\overline{AB})^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2$

$m(\overline{BC}) = d(B,C) = \sqrt{(b_1-c_1)^2 + (b_2-c_2)^2} \therefore m(\overline{BC})^2 = (b_1-c_1)^2 + (b_2-c_2)^2$

$m(\overline{AB})^2 + m(\overline{BC})^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (b_1-c_1)^2 + (b_2-c_2)^2 =$

$= a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 =$

$= (a_1-c_1)^2 + (a_2-c_2)^2 + 2(a_1c_1 + a_2c_2 - a_1b_1 - a_2b_2 - b_1c_1 - b_2c_2 + b_1^2 + b_2^2)$

$m(\overline{AB})^2 + m(\overline{BC})^2 = (a_1-c_1)^2 + (a_2-c_2)^2 + 2(A-B)\cdot(C-B) =$

$= m(\overline{AC})^2 + 2\cdot 0$

$\therefore m(\overline{AC})^2 = m(\overline{AB})^2 + m(\overline{BC})^2$

Logo vale o Teorema de Pitágoras na geometria Analítica

b) Mostre que na geometria hiperbólica não vale o referido teorema.

Considere os pontos $A=(0,5)$, $B=(0,7)$ e $C=(3,4)$. Vamos encontrar as linhas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

Como A e B estão numa mesma vertical, $\overleftrightarrow{AB} = l_0$.

$\overleftrightarrow{BC}$

$$\begin{cases} (0-p)^2 + 49 = r^2 \\ (3-p)^2 + 16 = r^2 \end{cases}$$

$$\cancel{p^2} + 49 = \cancel{p^2} - 6p + 9 + 16$$

$$6p = 25 - 49$$

$$p = -4$$

$$(0+4)^2 + 49 = r^2$$

$$r^2 = 49 + 16$$

$$r = \sqrt{65}$$

$\overleftrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} (0-p)^2 + 25 = r^2 \\ (3-p)^2 + 16 = r^2 \end{cases}$$

$$\cancel{p^2} + \cancel{25} = \cancel{p^2} - 6p + \cancel{9 + 16}$$

$$p = 0 \rightsquigarrow p_{AC}$$

$$(0-0)^2 + 25 = r^2$$

$$r = 5$$

Como $p_{AC} = 0$, temos que a perpendicular à $\overleftrightarrow{AC}$ é a linha l_0, ou seja, o ΔABC é retângulo, com $\angle BAC$ reto.

Agora vamos calcular $m(\overline{AB})$, $m(\overline{BC})$ e $m(\overline{AC})$ e verificar que $m(\overline{BC})^2 \neq m(\overline{AB})^2 + m(\overline{AC})^2$.

$$m(\overline{BC})^2 = d(B,C)^2 = \left|\ln\left(\frac{4(0+4+\sqrt{65})}{7(3+4+\sqrt{65})}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{16+4\sqrt{65}}{49+7\sqrt{65}}\right)\right|$$

$$m(\overline{AB})^2 = d(A,B)^2 = \left|\ln\left(\frac{7}{5}\right)\right|$$

$$m(\overline{AC})^2 = d(A,C)^2 = \left|\ln\left(\frac{4(0-0+5)}{5(3-0+5)}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

Fazendo as contas, temos que $\left[\ln\left(\frac{7}{5}\right)\right]^2 < 0,12$ e $\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 < 0,49$, ou seja, $\left[\ln\left(\frac{7}{5}\right)\right]^2 + \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 < 0,61$ e $\left|\ln\left(\frac{16+4\sqrt{65}}{49+7\sqrt{65}}\right)\right| > 0,61$.

Portanto $m(\overline{BC})^2 > m(\overline{AB})^2 + m(\overline{AC})^2$

Com isso, temos que não vale o Teorema de Pitágoras na geometria hiperbólica.