Lista 5

1) Mostre que as diagonais de um quadrilátero intersectam-se. (Ex. 52)

Seja o quadrilátero $\square ABCD$ convexo de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Assim, o segmento $\overline{AC}$ é uma das diagonais de $\square ABCD$.

Como $\square ABCD$ é convexo, temos que $D \in int(A\hat{B}C)$ e, pelo Teorema das Barras Cruzadas, temos que $\overrightarrow{BD}$ intersecta $\overline{AC}$ num único ponto M, com $A-M-C$.

Da mesma forma, $B \in int(A\hat{D}C)$ e, pelo Teorema das Barras Cruzadas, temos que $\overrightarrow{DB}$ intersecta $\overline{AC}$ num único ponto N, com $A-N-C$.

Como A, B, C e D são vértices de um quadrilátero, temos que eles não são todos colineares e, assim, $l_{AC} \neq l_{BD}$. Como $M \in l_{AC} \cap l_{BD}$ e $N \in l_{AC} \cap l_{BD}$, temos que $M = N$ (caso contrário, teríamos $l_{AC} = l_{BD}$).

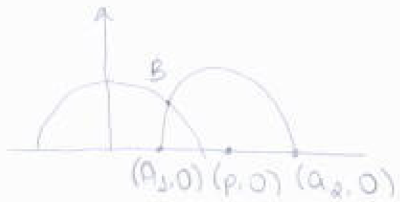
Como $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{DB} = \overline{BD}$, temos que $M \in \overline{BD}$. Como $M \in AC$ temos que as diagonais de um quadrilátero convexo se intersectam.

3) (Exercício 62) Na geometria hiperbólica, dada a linha $l_{0,5} = \{(x,y) \in \mathbb{H} : x^2 + y^2 = 25\}$ e o ponto $B = (3,4) \in l_{0,5}$, ache a linha l contendo B e perpendicular à linha $l_{0,5}$.

$$(x-p)^2 + y^2 = r^2$$

$$\left.\begin{array}{l} B=(3,4) \\ A=(0,5) \end{array}\right\} A, B \in l_{0,5}, \text{ onde } p = 0 \qquad u_{BA} = (4, p-3) = (4,-3)$$

~ x ~



$$B = (3,4) \qquad \left\{\begin{array}{l} (3-p)^2 + 16 = r^2 \\ (a-p)^2 + 0 = r^2 \end{array}\right.$$
$$Q = (a,0)$$

$$\therefore p = \frac{a^2-25}{2a-6}$$

$$u_{BQ} = (4, p-3) = \left(4, \frac{a^2-25-6a+18}{2a-6}\right) = \left(4, \frac{a^2-6a-7}{2a-6}\right)$$

Se $l_{0,5} \perp l_{BQ}$ em B, então $\langle u_{BA}, u_{BQ} \rangle = 0$

$$\left\langle (4,-3), \left(4, \frac{a^2-6a-7}{2a-6}\right) \right\rangle = 0$$

$$16 - \frac{3a^2+18a+21}{2a-6} = 0 \Rightarrow 32a - 96 - 3a^2 + 18a + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 50a + 75 = 0$$

$$\Delta = 2500 - 900 = 1600$$

$$a = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot 3} = \frac{50 \pm 40}{6}$$

$$\therefore a_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{90}{6} = 15$$

$$p = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{15 + \frac{5}{3}}{2} = \frac{45+5}{6} = \frac{25}{3}$$

$$(3-p)^2 + 16 = r^2$$
$$\left(3 - \frac{25}{3}\right)^2 + 16 = r^2$$
$$\left(-\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = r^2$$
$$\frac{16 \cdot 16 + 9 \cdot 16}{9} = r^2$$
$$\frac{25 \cdot 16}{9} = r^2$$
$$r = \frac{20}{3} \text{ ou } r = -\frac{20}{3}$$

Mas $r > 0$ e assim $r = \frac{20}{3}$

Portanto $l = l_{\frac{25}{3}, \frac{20}{3}}$ //

5) Mostre que no plano de Moulton não vale LAL (Ex. 68)

Sejam $A=(1,0)$, $B=(0,0)$ e $C=(1,1)$ pontos do plano de Moulton. Consideremos as seguintes triplas ordenadas: (A,B,C) e (A,C,B). Mostraremos que $\overline{AB}\equiv\overline{AC}$, $\overline{AC}\equiv\overline{AB}$ e $B\hat{A}C\equiv C\hat{A}B$ (ou seja, as hipóteses do Postulado LAL são satisfeitas), mas os triângulos ΔABC e ΔACB não são congruentes.

$d(A,C)=\sqrt{(1-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1}=1$

$d(A,B)=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1}=1$

$\therefore d(A,C)=d(A,B)$, ou seja $\overline{AC}\equiv\overline{AB}$.

Se $\overline{AC}\equiv\overline{AB}$, temos $\overline{AB}\equiv\overline{AC}$, pois $\equiv$ é uma relação de equivalência.

Como $A\notin Oy$, $med(B\hat{A}C)=\alpha$, e

$$\cos\alpha=\frac{(B-A)\cdot(C-A)}{\|B-A\|\,\|C-A\|}$$

Como $A\notin Oy$, $med(C\hat{A}B)=\beta$, e

$$\cos\beta=\frac{(C-A)\cdot(B-A)}{\|C-A\|\,\|B-A\|}=\frac{(B-A)\cdot(C-A)}{\|B-A\|\,\|C-A\|}=\cos\alpha$$

Como $0<\alpha<180°$ e $0<\beta<180°$, temos que $\alpha=\beta$ e portanto $med(B\hat{A}C)=med(C\hat{A}B)$, ou seja, $B\hat{A}C\equiv C\hat{A}B$.

Assim temos as hipóteses do postulado LAL satisfeitas. Para termos $\Delta ABC\equiv\Delta ACB$, temos que ter $C\hat{A}B\equiv B\hat{A}C$, $A\hat{C}B\equiv A\hat{B}C$, $\overline{BC}\equiv\overline{CB}$ e $\overline{AB}\equiv\overline{AC}$.

Vamos calcular $A\hat{C}B \equiv A\hat{B}C$

Como $C \notin Oy$, temos $med(A\hat{C}B) = \gamma$, e

$$\cos\gamma = \frac{(A-C)\cdot(B-C)}{\|A-C\|\,\|B-C\|} = \frac{(0,-1)\cdot(-1,-1)}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{0+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore \gamma = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $B \in Oy$, temos $med(A\hat{B}C) = med(A_b\hat{B}C_b) = \varphi$, onde

$A_b = (1, 2.0 - 0) = (1,0)$
$C_b = (1, 2.1 - 0) = (1,2)$

e $\cos\varphi = (A_b - B)\cdot(C_B - B) = \dfrac{(1,0)\cdot(1,2)}{1\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1+0}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \varphi = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\gamma \neq \varphi$ e assim $med(A\hat{C}B) \neq med(A\hat{B}C)$ e, portanto, os triângulos ΔABC e ΔACB não são congruentes.

Como as hipóteses do Postulado LAL valem, mas a tese não, temos que não vale o Postulado LAL no plano de Moulton.

6) (Exercício 70) Na geometria hiperbólica, sejam $A=(-1,1)$, $B=(0,1)$, $C=(1,1)$, $D=(-2,2)$, $E=(0,2)$ e $F=(2,2)$. Mostre que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

l_{AB}

$$\begin{cases}(-1-p)^2+1=r^2\\(0-p)^2+1=r^2\end{cases}$$

$$1+2p+p^2=p^2$$

$$2p=-1$$

$$p=-\frac{1}{2}$$

$$\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+1=r^2$$

$$\frac{1}{4}+1=r^2$$

$$r=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

l_{BC}

$$\begin{cases}(0-p)^2+1=r^2\\(1-p)^2+1=r^2\end{cases}$$

$$p^2=1+p^2-2p$$

$$p=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+1=r^2 \therefore r=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

l_{DE}

$$\begin{cases}(-2-p)^2+4=r^2\\(0-p)^2+4=r^2\end{cases}$$

$$p^2=p^2+4p+4$$

$$p=-1$$

$$(0+1)^2+4=r^2$$

$$5=r^2$$

$$r=\sqrt{5}$$

l_{EF}

$$\begin{cases}(0-p)^2+4=r^2\\(2-p)^2+4=r^2\end{cases}$$

$$\cancel{p^2}=\cancel{p^2}-4p+4$$

$$p=1$$

$$(-1)^2+4=r^2$$

$$5=r^2$$

$$r=\sqrt{5}$$

$$d(B,A)=\left|\ln\left(\frac{1\left(0+1/2+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1\left(-1+1/2+\sqrt{5}/2\right)}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)\right|$$

$$d(E,D)=\left|\ln\left(\frac{\cancel{2}(0+1+\sqrt{5})}{\cancel{2}(-2+1+\sqrt{5})}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)\right|$$

$\therefore$ $d(B,A)=d(E,D)$, ou seja, $\overline{BA}\equiv\overline{ED}$.

$$d(B,C)=\left|\ln\left(\frac{1\left(0-1/2+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1\left(1-1/2+\sqrt{5}/2\right)}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)\right|$$

$$d(E,F)=\left|\ln\left(\frac{2(0-1+\sqrt{5})}{2(2-1+\sqrt{5})}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)\right|$$

$\therefore$ $d(B,C)=d(E,F)$, ou seja, $\overline{BC}\equiv\overline{EF}$

$u_{BA} = \left(0, -\frac{1}{2} - 1\right) = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

$v_{BA} = -(0, -1) = (0, 1)$

$u_{BC} = \left(0, \frac{1}{2} - 1\right) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$v_{BC} = (0, -1)$

$u_{ED} = (0, -1 - 2) = (0, -3)$

$v_{ED} = -(0, -1) = (0, 1)$

$u_{EF} = (0, 1 - 2) = (0, -1)$

$v_{EF} = (0, -1)$

Como $v_{BA} \cdot v_{BC} = \langle (0,1), (0,-1) \rangle = v_{ED} \cdot v_{EF}$, temos que $m(A\hat{B}C) = m(D\hat{E}F)$, ou seja, $A\hat{B}C \equiv D\hat{E}F$.

Como $\overline{BA} \equiv \overline{ED}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $A\hat{B}C \equiv D\hat{E}F$ temos, pelo Postulado LAL, que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.