MAT2219 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 7 – 04/06/2016

Prof. Claudio Gorodski

1. Calcular o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície fechada usando o teorema de Gauss nos casos indicados:

a. $\vec{F} = x(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b. $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, S é a superfície do cubo unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

c. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, S é a esfera unitária.

d. $\vec{F} = x^2\vec{i} + 8y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, S é a superfície do cubo unitário.

e. $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$, S a superfície do tetraedro delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

f. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

g. $\vec{F} = z^2\vec{k}$, S é a fronteira da região $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

h. $\vec{F} = \text{grad}(xe^y \sin z)$, $S : x^2 + y^2 + x^2 = a^2$.

i. $\vec{F} = x\vec{i} + z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$, S é a fronteira da região $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

j. Mesmo $\vec{F}$ do item anterior, S é a superfície da pirâmide com vértices em $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

2. Assinalar "verdadeira" ou "falsa" para cada uma das seguintes asserções:

a. Se $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 0$ para toda superfície fechada S, então $\vec{F}$ é constante.

b. Se $\vec{F} = \text{grad} f$, então $\text{div}\vec{F} = 0$.

c. Se $||\vec{F}|| \leq 1$ em todos os pontos, então $\iiint_V \text{div}\vec{F}\, dxdydz \leq \text{area}(S)$ onde S é uma superfície fechada e V é o seu interior.

d. Se $||\vec{F}|| \leq 1$ em todos os pontos, então $|\text{div}\vec{F}| \leq 1$ em todos os pontos.

3. Calcular $\text{rot}\vec{F}$ para os seguintes campos de vetores:

a. $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$

b. $\vec{F} = \text{grad}(xe^y \sin z)$

c. $\vec{F} = (x + y + z)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

d. $\vec{F} = (x+y)(\vec{i} - \vec{k})$

e. $\vec{F} = r^n(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$ onde $r = ||x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}||$.

f. $\vec{F} = (\vec{i} + \vec{j}) \times \vec{R}$ onde $\vec{R} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

4. Calcular um potencial para os campos do exercício 3, sempre que possível.

5. Calcular a circulação do campo $\vec{F}$ ao longo da curva C usando o teorema de Stokes nos seguintes casos, explicando a orientação escolhida:

a. $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$, C é o círculo $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$.

b. $\vec{F} = \vec{i} \times \vec{R}$, C o círculo anterior.

c. $\vec{F} = (\vec{i} + \vec{j}) \times \vec{R}$, C o círculo $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$.

d. $\vec{F} = (y\,\vec{i} - x\,\vec{j}) \times (x\,\vec{i} + y\,\vec{j})$, C o círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

6. Prove que para toda superfície fechada S e todo campo de vetores $\vec{F}$ definido sobre S e no interior de S, vale que o fluxo de rot$\vec{F}$ através de S é zero.

7. Suponha que $\vec{F}$ é um campo de vetores definido em $\mathbf{R}^3$ tal que rot$\vec{F} = \vec{0}$ e div$\vec{F} = 0$. Mostre que existe φ tal que grad$\varphi = \vec{F}$ e $\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$.

8. Calcular um potencial para os campos de vetores, se possível.

a. $\vec{F} = z\,\vec{i} + \vec{j} + x\,\vec{k}$.

b. $\vec{F} = 2xyz\,\vec{i} + x^2z\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$.

c. $\vec{F} = e^{x-z}\,\vec{i} - e^{x-z}\,\vec{k}$.

d. $\vec{F} = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + (xy + z^2)\,\vec{k}$.

9. Seja $\vec{F}$ um campo de vetores em $\mathbf{R}^3$ tal que rot$\vec{F} = \vec{i}$.

a. Determinar um exemplo de um tal $\vec{F}$.

b. Determinar todas as possibilidades para $\vec{F}$.

10. Seja $\vec{S} = \vec{a} \times \vec{R}$ um campo spin, onde $\vec{a}$ é um vetor constante e $\vec{R}$ é o vetor posição. Calcular $\vec{F} = \vec{b} \times \vec{S}$ ($\vec{b}$ constante) e determinar seu rotacional.

11. Suponha que dois campos de vetores definidos em $\mathbf{R}^3$ têm o mesmo rotacional em todos os pontos. Assinalar "verdadeira" ou "falsa" para cada uma das seguintes asserções:

a. Sua diferença é um campo constante.

b. Sua diferença é um campo conservativo.

c. Eles têm o mesmo divergente.

12. Calcular o fluxo de rot$\vec{F}$ através do hemisfério superior $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientado pela normal que aponta para cima, nos seguintes casos:

a. $\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$.

b. $\vec{F} = \vec{R}/r^2$ onde $r = ||\vec{R}||$.

c. $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{R}$.

d. $\vec{F} = (\vec{a} \times \vec{R}) \times \vec{R}$.

13. O círculo C no plano $x + y + z = 6$ tem raio a e centro em $(1, 2, 3)$, e está orientado de modo que sua projeção sobre o plnao xy é precorrida no sentido anti-horário. Calcular a circulação do campo $\vec{F} = 3z\,\vec{j} + 2y\,\vec{k}$ ao longo de C.

14. Calcular o fluxo rot$\vec{F}$ através do hemisfério superior da esfera unitária, onde $\vec{F} = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$. Qual foi a orientação escolhida?

15. Decompôr o campo $\vec{F} = xy\,\vec{i}$ numa soma $\vec{G} + \vec{H}$ onde rot$\vec{G} = \vec{0}$ e div$\vec{H} = 0$. É a decomposição única?