MAT2219 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 4 – 18/04/2016

Prof. Claudio Gorodski

Primeira parte

1. Calcular um potencial para os campos de vetores no plano e desenhar as suas trajetórias:

   a. $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j}$

   b. $\vec{F} = x\vec{i} + \vec{j}$

   c. $\vec{F} = \cos(x+y)\vec{i} + \cos(x+y)\vec{j}$

   d. $\vec{F} = \frac{1}{y}\vec{i} - \frac{x}{y^2}\vec{j}$

   e. $\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(2x\vec{i} + 2y\vec{j})$

2. Mostre que $\vec{F} = x\vec{j}$ não admite potencial. Como são suas trajetórias?

3. Calcule o gradiente de f e desenhe as suas curvas de nível:

   a. $f(x,y) = 3x + y$

   b. $f(x,y) = x - 3y$

   c. $f(x,y) = x + y^2$

   d. $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

   e. $f(x,y) = x^2 - y^2$

   f. $f(x,y) = \frac{y}{x}$

4. Calcular as integrais de linha:

   a. $\int_\gamma dy$, $\gamma : x = t,\ y = 2t$, $0 \leq t \leq 1$.

   b. $\int_C -y\,dx + x\,dy$, C é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ percorrido no sentido anti-horário.

   c. $\int_C dx$ e $\int_C y\,x$, C é o círculo de raio 3 centrado na origem, percorrido no sentido anti-horário.

5. Calcular as integrais de linha:

   a. $\int_\gamma ds$, $\gamma : x = t,\ y = 2t$, $0 \leq t \leq 1$.

   b. $\int_\gamma x\,ds$ e $\int_\gamma xy\,ds$, $\gamma : x = \cos t,\ y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

c. $\int_C xy\, ds$, C é a poligonal de $(0,0)$ a $(1,1)$ a $(1,0)$.

6. Determinar um potencial para o campo $\vec{F}$ e usá-lo para calcular o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre um deslocamento de $(1,0)$ a $(0,1)$:

a. $\vec{F} = \vec{i} + y\vec{j}$.

b. $\vec{F} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$.

c. $\vec{F} = e^y\vec{i} + xe^y\vec{j}$.

7. Um fio ideal em formato de círculo $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ tem densidade $\rho(x,y) = a + y$. Calcular sua massa e seu centro de massa.

8. Um fio ideal homogêneo (isto é, com densidade constante) tem formato de semi-círculo $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$, $y \geq 0$. Calcular seu centro de massa.

9. Calcular $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{R}$ onde $\gamma : x = t,\ y = t^2, z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$, é uma curva espacial e:

a. $\vec{F} = \text{grad}(xy + xz)$

b. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$.

10. Em cada um dos casos, exiba um campo de vetores $\vec{F}$ no plano tal que:

a. Seu trabalho ao redor do quadrado unitário, percorrido no sentido anti-horário seja 4.

b. Não seja conservativo e seu trabalho ao redor do círculo unitário centrado na origem seja zero.

11. Calcular a integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{R}$, onde: $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$ e:

a. $\vec{F}(x,y) = (1, -2)$

b. $\vec{F}(x,y) = (0, x^2)$

c. $\vec{F}(x,y) = (2xy^2, 2x^2y)$

d. $\vec{F}(x,y) = (x^2y, xy^2)$

12. Para quais valores de a, $b \in \mathbb{R}$ é $\vec{F} = axy\,\vec{i} + (x^2 + by)\,\vec{j}$ conservativo?

Segunda parte

1. Calcular a integral de linha do campo de vetores F ao longo do caminho indicado:

a. $F(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, de $(-1,1)$ a $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

b. $F(x,y) = (2a-y, x)$, ao longo do caminho descrito por $\gamma(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$.

c. $F(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, ao longo de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$.

d. $F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, de $(0,0)$ a $(2,0)$ ao longo da curva $y = 1 - |1-x|$.

2. Calcular a integral de linha indicada:

a. $\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, onde C é um caminho entre $(-2,4)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

b. $\int_C \dfrac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2}$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ percorrido uma vez no sentido anti-horaŕio.

c. $\int_C \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde C é o quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, percorrido uma vez no sentido anti-horário.

3. Um campo de força é dado por $F(x,y,z) = (x, y, xz - y)$. Calcular o trabalho realizado por F quando uma partícula se move de $(0,0,0)$ a $(1,2,4)$ ao longo do segmento de reta unindo esses dois pontos.

4. Um campo de força está definido em $\mathbf{R}^2$ pela equação $F(x,y) = (x+y, x-y)$.

a. Mostrar que o trabalho realizado por F durante o movimento de uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ para $a \le t \le b$ depende apenas de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$, $g(b)$.

b. Calcular o trabalho realizado quando $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $g(a) = 3$, $g(b) = 4$.

5. Determinar se o campo de vetores indicado admite um potencial e, em caso afirmativo, determiná-lo.

a. $F(x,y) = (\sin y - y\sin x + x, \cos x + x\cos y + y)$

b. $F(x,y) = (\sin(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy))$

c. $F(x,y,z) = (x, y, z)$

d. $F(x,y,z) = (x+z, -(y+z), x-y)$

e. $F(x,y,z) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$

f. $F(x,y,z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$

6. Seja $F : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ um campo de vetores contínuo. Assinalar "verdadeira" ou "falsa" para cada uma das seguintes asserções:

(a) Se $\int_\gamma F\,d\mathbf{r} = 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F é conservativo em Ω.

(b) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} = 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F *pode ser* conservativo em Ω.

(c) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} \neq 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F *pode ser* conservativo em Ω.

(d) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} \neq 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F é conservativo em Ω.

(e) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} = 0$ para *todo* caminho fechado γ em Ω, então F é conservativo em Ω.

(f) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} \neq 0$ para *todo* caminho fechado γ em Ω, então nada se pode concluir a respeito de F ser ou não conservativo em Ω.