MAT2219 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 1 – 05/03/2016

Prof. Claudio Gorodski

Primeira parte

1. Calcular as seguintes integrais iteradas:

a. $\int_0^1 \int_0^2 x^2 dx\, dy$ e $\int_0^1 \int_0^2 y^2 dx\, dy$.

b. $\int_2^{2e} \int_1^{2e} 2xy dx\, dy$ e $\int_{y=2}^{2e} \int_{x=1}^{2e} dxdy/xy$.

c. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sin(x+y) dx\, dy$ e $\int_1^2 \int_0^2 \frac{dy\, dx}{(x+y)^2}$.

d. $\int_0^1 \int_1^2 ye^{xy} dx\, dy$ e $\int_{-1}^1 \int_0^3 \frac{dy\, dx}{\sqrt{3+2x+y}}$.

2. Esboçar um desenho da região de integração e calcular sua área através da integral iterada indicada:

a. $\int_1^2 \int_1^{2x} dy\, dx$

b. $\int_0^1 \int_{x^3}^{x} dy\, dx$

c. $\int_0^\infty \int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} dy\, dx$

d. $\int_{-1}^0 \int_y^{|y|} dx\, dy$

3. Mudar a ordem de integração das integrais iteradas no exercício 2.

4. Determinar os limites de integração das integrais iteradas $\int\int dy\, dx$ e $\int\int dx\, dy$. Esboçar um desenho da região de integração $\mathcal{R}$ e calcular sua área.

a. $\mathcal{R}$: triângulo contido nas retas $y = x,\ y = -x,\ y = 3$.

b. $\mathcal{R}$: triângulo contido nas retas $x = -1,\ y = 0,\ x + y = 0$.

c. $\mathcal{R}$: triângulo contido nas retas $y = x,\ y = 2x,\ y = 4$.

d. $\mathcal{R}$: triângulo de vértices $(0,0),\ (4,4),\ (4,8)$.

e. $\mathcal{R}$: triângulo de vértices $(0,0),\ (2,0),\ (1,b)$. Aqui $b > 0$.

f. $\mathcal{R}$: triângulo de vértices $(0,0),\ (a,b),\ (c,d)$. Os lados são $y = bx/a$, $y = dx/c$ e $y = b(x-a)(d-b)/(c-a)$. Determinar $A = \int\int dy\, dx$ quando $0 < a < c$, $0 < d < b$.

5.

a. Calcular $\int_0^b \int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy$.

b. Calcular $\int_0^b \int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy$.

6. Subdivida o quadrado unitário $\mathcal{R}$ em dois triângulos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ e verifique que $\int\int_{\mathcal{R}} f dA = \int\int_{\mathcal{S}} f\, dA + \int\int_{\mathcal{T}} f\, dA$ nos seguintes casos:

a. $f(x, y) = 2x - 3y + 1$.

b. $f(x, y) = xe^y - ye^x$.

7. A área da região do plano xy delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ é uma integral simples de a at b ou uma integral dupla. Determinar os limites de integração: $\int_a^b f(x)dx = \int\int 1dy\, dx$.

8. Uma cidade dentro do círculo $x^2 + y^2 = 100$ tem densidade populacional $\rho(x, y) = 10(100 - x^2 - y^2)$. Qual a população da cidade?

9. Calcular o volume da regiao delimitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $ax + by + cz = 1$.

10. O retângulo de vértices $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$ tem densidade $\rho(x, y) = x^2$. Os momentos em relação aos eixos são $M_y = \int\int x\rho dA$ e $M_x = \int\int y\rho dA$.

a. Calcular sua massa.

b. Determinar seu centro de massa.

11. Considere a região circular de raio 1 entre as retas $y = x$ e $y = -x$. Calcular sua área e as coordenadas de seu centróide $(\bar{x}, \bar{y})$.

Segunda parte

1. Calcular as integrais duplas através de integrais iteradas:

a. $\int_Q \sin^2 x \sin^2 y\, dxdy$, onde $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

b. $\int_Q \sin(x + y)\, dxdy$, onde $Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

c. $\int_Q |\cos(x + y)|\, dxdy$, onde $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

2. Calcular a integral dupla

$$\int_S e^{x+y}\, dxdy,$$

onde $S = \{(x, y)||x| + |y| \leq 1\}$, através de uma integral iterada.

3. Calcular por meio de uma integral dupla o volume da região debaixo do gráfico de $f : S \to \mathbf{R}$, onde:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad S = \{(x, y)||x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

4. Esboçar um desenho da região de integração e inverter a ordem de integração:

a. $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dydx$

b. $\int_{-6}^2 \int_{(x^2-4)/4}^{2-x} f(x,y)\,dydx$

c. $\int_1^e \int_0^{\log x} f(x,y)\,dydx$

5. Calcular o centro de massa de uma chapa retangular $ABCD$ sabendo que a densidade superficial de massa em um ponto é proporcional ao produto das distâncias desse ponto aos lados adjacentes AB e AD.