MAT220 – Cálculo Diferencial e Integral IV – IAG
Prova 2 – 06/12/2022

PROF. CLAUDIO GORODSKI

Nome: ______________________________

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

1. Calcular os valores das integrais, onde o círculo é percorrido uma vez no sentido anti-horário:

$$\text{(a)} \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^{2022}}\,dz; \qquad \text{(b)} \int_{|z|=1} ze^{2/z}\,dz.$$

(Sugestão: em (a), usar a fórmula integral de Cauchy; em (b), usar uma série de potências.)

(a) $f(z) = \sin z$ é inteira. Pela F.I.C.

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^{2022}}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(2021)}(0)}{(2021)!} = 2\pi i \frac{f'(0)}{(2021)!}$$

(pela periodicidade das derivadas de $\sin z$)

$$= 2\pi i \frac{\cos 0}{(2021)!} = \frac{2\pi i}{(2021)!} \quad //$$

(b) A série de Taylor $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad |z| < \infty$

$$\Rightarrow e^{2/z} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2 \cdot 2} + \frac{2^3}{z^3\, 3!} + \cdots \quad 0 < |z| < \infty$$

$$\Rightarrow z e^{2/z} = z + 2 + \frac{2^2}{z \cdot 2} + \frac{2^3}{3!\, z^2} + \cdots \quad 0 < |z| < \infty$$

$$\int_{|z|=1} ze^{2/z} = 2\pi i \operatorname{Res}_0 (ze^{2/z}) \quad (0 \text{ é sing isolada})$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{2^2}{2} = 4\pi i \quad //$$

1

2. Seja C um círculo percorrido uma vez no sentido anti-horário que não passa pelos pontos 1 e -1. Determinar todos os possíveis valores de

$$\int_C \frac{1}{z^2-1}\,dz$$

em função da posição relativa de 1 e -1 em relação a C. (Sugestão: Usar frações parciais.)

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{z+1}$$

$$\int_C \frac{dz}{z-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \notin \text{int}(C) \quad (\text{T. de Cauchy}) \\ 2\pi i, & \text{se } 1 \in \text{int}(C) \quad (\text{F. Int. de Cauchy}) \end{cases}$$

$$\int_C \frac{dz}{z+1} = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \notin \text{int}(C) \\ 2\pi i, & \text{se } -1 \in \text{int}(C) \end{cases}$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z^2-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } \pm 1 \in \text{int}(C) \text{ ou } \pm 1 \notin \text{int}(C) \\ \pi i, & \text{se } 1 \in \text{int}(C) \text{ e } -1 \notin \text{int}(C) \\ -\pi i, & \text{se } 1 \notin \text{int}(C) \text{ e } -1 \in \text{int}(C). \end{cases}$$

//

3. Representar a função

$$f(z) = \frac{z^2}{2 - 3z^3}$$

por uma série de potências em z. Qual é o raio de convergência?

$$\frac{z^2}{2-3z^3} = \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^3}\right) = \frac{z^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}z^3\right)^n \quad \text{se} \quad \left|\frac{3}{2}z^3\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^{3n+2} \quad \text{para} \quad |z| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

e o raio de convergência é $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ //

4. Calcular a integral imprópria real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

por meio de resíduos.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$ P, Q polinômios com $\deg Q \geq \deg P + 2$

e Q não tem raízes reais

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1+i} \frac{1}{z^2+2z+2}$$

Sings isoladas: $z^2+2z+2=0 \Leftrightarrow z = -1 \pm i$

Pólos simples

$Q(z) = (z+1-i)(z+1+i)$

Apenas $-1+i$ tem $\operatorname{Im} > 0$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \left. \frac{1}{z+1+i} \right|_{z=-1+i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \quad //.$$