9.a secção: 10out (resumo)

9.1 Fórmula integral de Cauchy. *Seja f uma função holomorfa sobre uma curva fechada simples C e no seu interior. Se z_0 é um ponto interior a C então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

onde C está orientada no sentido anti-horário.

Dem. Seja C_R o círculo $|z - z_0| = R$, onde $R > 0$ é suficientemente pequeno de modo a ter C_R contido no interior de C. Pelo princípio de deformação de caminhos (8.10),

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Então

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \int_{C_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + f(z_0) \int_{C_R} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{C_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + 2\pi i f(z_0).\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}\left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i f(z_0) \right| &= \left| \int_{C_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \\ &\leq \int_{C_R} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}\, |dz| \\ &= \frac{1}{R} \int_{C_R} |f(z) - f(z_0)|\, |dz|.\end{aligned}$$

Finalmente, como f é contínua em z_0, tomando R suficientemente pequeno podemos garantir que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno. Segue que

$$\frac{1}{R} \int_{C_R} |f(z) - f(z_0)|\, |dz| \leq \frac{\epsilon}{R} \int_{C_R} |dz| = 2\pi\epsilon.$$

Como o membro do lado esquerdo é um número arbitrariamente pequeno, segue que a fórmula desejada é válida. q.e.d.

9.2 (*Exemplos*) (i) $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$ já que $f(z) = e^z$ é inteira.

(ii) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{z-i} - \int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{z+i} \right) = \frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i) = 0$ já que $f(z) = 1$ é inteira e $\pm i$ pertencem a $B(0,2)$.

9.3 (*Exemplo*). Seja R o retângulo de vértices $-a$, a, $a + i\sqrt{b}$, $-a + i\sqrt{b}$, onde $a > 0$, $0 < b < 1$. O teorema integral de Cauchy dá $\int_{\partial R} \frac{dz}{z^2+1} = 0$.

Parametrizando R, obtemos $\sum_{j=1}^4 I_j = 0$, onde

$$I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{dt}{t^2+1}, \; I_2 = \int_0^{\sqrt{b}} \frac{i\,dt}{(a+it)^2+1},$$

$$I_3 = -\int_{-a}^{a} \frac{dt}{(t+i\sqrt{b})^2+1}, \; I_4 = -\int_0^{\sqrt{b}} \frac{i\,dt}{(-a+it)^2+1}.$$

Note que

$$|I_2| \leq \int_0^{\sqrt{b}} \left| \frac{i}{(a+it)^2+1} \right| dt \leq \frac{\sqrt{b}}{a^2} \to 0$$

quando $a \to +\infty$, e similarmente $I_4 \to 0$. Além disso,

$$-I_3 = \int_{-a}^{a} \frac{1-b+t^2-2i\sqrt{b}t}{(1-b+t^2)^2+4bt^2}\, dt$$

onde a integral da parte ima ginária é zero pela função ser ímpar. Segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-b+t^2}{(1-b+t^2)^2+4bt^2}\, dt &= \lim_{a\to+\infty} -I_3 \\
&= \lim_{a\to+\infty} I_1 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

9.4 Desigualdade do valor médio. Se f é holomorfa em z_0, então para $r > 0$ suficientemente pequeno, podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy 9.1 ao círculo $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para obter

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Segue que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta, \tag{1}$$

isto é, o valor de $|f|$ no centro do círculo de raio r não excede o valor médio ao longo do círculo.

Seja M o valor máximo de f sobre o disco de centro z_0 e raio r. Suponha agora que $|f|$ assume o valor M em z_0. Como o valor médio não pode exceder M, segue de (1) que $|f|$ é constante igual a M ao longo do círculo de raio r. Aplicando o mesmo argumento aos círculos de raio $s < r$, vemos que $|f|$ é constante sobre todo o disco de raio r. Mas se o módulo de uma função holomorfa é constante, então a própria função é constante (por (3.6)).

Acabamos de mostrar que se uma função não-constante é holomorfa em um ponto z_0, então toda bola aberta $B(z_0, r)$ contida no domínio de holomorfia de f contém pontos z tais que $|f(z)| > |f(z_0)|$.

9.5 Princípio do Módulo Máximo. *Se f é holomorfa num domínio limitado Ω e contínua no fecho $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, então o valor máximo de $|f|$ em $\bar{\Omega}$ só pode ser assumido num ponto da fronteira $\partial\Omega$, a não ser que f seja constante.*

Dem. (esboço) Seja M o valor máximo de $|f|$ em $\bar{\Omega}$. Suponha que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| = M$. Como Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$. Aplicando (9.4) deduzimos que $|f|$ é constante e igual a M num disco $B[z_0, r]$ centrado em z_0. Aplicando o mesmo argumento a um disco centrado em outro ponto de $B[z_0, r]$, obtemos que $|f|$ também vale M nesse outro disco. Prosseguindo assim, vemos que $|f|$ vale M em todo $\bar{\Omega}$. Finalmente, segue f é constante por causa de (3.6). q.e.d.

Ex. 9.1 Usar a fórmula integral de Cauchy para calcular: (a) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{z}{2z+1}\, dz$; (b) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{\cos z}{z(z+8)}\, dz$; (c) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{e^z\, dz}{(z+1)(z-3)^2}$; (d) $\int_{\partial B(-2i,2)} \frac{dz}{z^2+1}$; (e) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin z}{z+i}\, dz$; (f) $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^z}{(z-2)^3}\, dz$.

Ex. 9.2 Calcular
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 + a^4}\, dt,$$
onde $a > 0$, integrando $(a^2 + z^2)^{-1}$ ao longo do triângulo de vértices 0, R, $Re^{\frac{\pi i}{4}}$ e tomando o limite quando $R \to \infty$.