8.a secção: 5out (resumo)

8.1 Uma curva C em $\mathbb{C}$ é dita *fechada* se existe uma parametrização $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de C com $\gamma(a) = \gamma(b)$. Uma curva fechada C é dita *simples* se ela não tem auto-intersecções.

8.2 Teorema de separação de Jordan. *Uma curva fechada simples no plano divide o plano em exatamente dois domínios, sendo um deles limitado e o outro ilimitado.*

Esses domínios são respectivamente chamados de *interior* e *exterior* de C.

8.3 Teorema de Cauchy-Goursat. *Seja f uma função holomorfa em todos os pontos no interior e sobre uma curva fechada simples C. Então*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Faremos uma demonstração no caso especial em que f é holomorfa em uma bola aberta $B = B(z_0, r)$ e C é uma curva fechada simples em B. Usaremos o seguinte lema.

8.4 Lema integral de Goursat. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Então*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

para todo triângulo $\Delta \subset \Omega$, onde $\partial\Delta$ denota a fronteira de Δ.

Dem. Notação:

$$a(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz.$$

Conectando os pontos médios dos lados de Δ, nós o subdividimos em quatro triângulos congruentes Δ_ν, $\nu = 1, \ldots, 4$, e

$$a(\Delta) = \sum_{\nu=1}^{4} a(\Delta_\nu),$$

pois os segmentos conectando os pontos médios são percorridos duas vezes, em sentidos opostos, causando o cancelamento das integrais correspondentes, enquanto que a união dos lados remanescentes dos Δ_ν é Δ.

Dentre $a(\Delta_\nu)$, selecionamos aquele com o maior módulo, e denotamos o triñgulo correspondente Δ^1. Obtemos

$$|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)|.$$

Continuando o processo de subdivisão, obtemos uma seqüência

$$\Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \cdots \supset \Delta^n \supset \cdots$$

de triângulos satisfazendo

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)|, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Além disso,

$$L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Os triângulos Δ^n convergem para um ponto $z_0 \in \Omega$ no sentido de que estarão contidos numa bola aberta $|z - z_0| < \delta$ de raio $\delta > 0$ prescrito para n suficientemente grande. Como f é holomorfa em Ω, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

ou

$$\left|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\right| < \epsilon|z - z_0| \tag{3}$$

para $|z - z_0| < \delta$.

Como 1 e z admitem as primitivas z e $z^2/2$, temos

$$\int_{\partial\Delta^n} dz = \int_{\partial\Delta^n} z\,dz = 0$$

e portanto

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\,dz.$$

Segue de (3) que

$$|a(\Delta^n)| \leq \epsilon \int_{\partial\Delta^n} |z - z_0|\,|dz| \leq \epsilon L(\partial\Delta_n)^2.$$

Usando (1) e (2) vem que

$$|a(\Delta)| \leq \epsilon L(\Delta)^2.$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, isso mostra que $a(\Delta) = 0$, como desejado. q.e.d.

8.5 *Dem. de (8.3) (caso especial)* Suponhamos que f é holomorfa na bola aberta $B = B(z_0, r)$ e seja C uma curva fechada simples em B. Por (7.2) e (7.3) basta mostrar que f tem uma primitiva em B. Vamos mostrar que

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi$$

é uma primitiva de f em B, onde $[z_0, z]$ denota o segmento de extremos z_0 e z.

Temos

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z_0,z+\Delta z]-[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(\xi)\,d\xi,$$

onde usamos (8.4) aplicado ao triângulo de vértices z_0, z e $z + \Delta z$ para escrever a última igualdade. Agora mostramos que

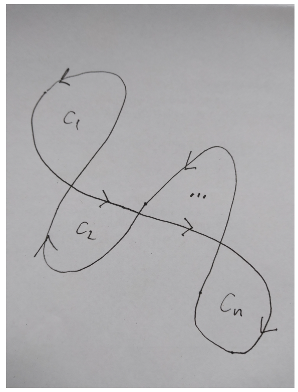
$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(\xi)\,d\xi = f(z)$$

exatamente como foi feito em (7.3). q.e.d.

8.6 Domínios simplesmente conexos. Um domínio Ω é dito *simplesmente conexo* se o interior de qualquer curva fechada simples C em Ω está inteiramente contido em Ω. Essa propriedade se traduz informalmente dizendo que o domínio não possui "buracos". Por exemplo, uma bola aberta é simplesmente conexa, mas a região anular entre dois círculos concêntricos não é simplesmente conexa.

8.7 Teorema. *Se f é holomorfa em um domínio simplesmente conexo Ω, então $\int_C f(z)\,dz = 0$ para toda curva fechada em Ω.*

Dem. Se C é simples então, devido a Ω ser simplesmente conexo, o interior de C está contido em Ω e podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Goursat (8.3). Se C tem um número finito de auto-intersecções, subdividimos C em um número finito de curvas fechadas simples:



Então a integral em cada C_j é zero por (8.3) e

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)\,dz = 0.$$

O resultado vale mesmo que C tenha um número infinito de auto-intersecções, mas requer outro argumento. q.e.d.

8.8 *(Exemplo)* Se C é uma curva fechada na bola aberta $|z| < 2$ então

$$\int_C \frac{ze^z}{(z^2+9)^5}\,dz = 0,$$

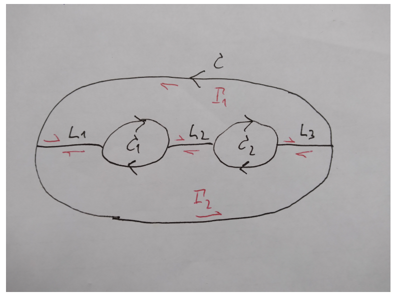
pois a bola é simplesmente conexa e os zeros do denominador do integrando $z = \pm 3i$ encontram-se no exterior da bola.

8.9 Teorema (domínios multiplamente conexos). *Sejam C, $C_1, \ldots, C_n$ são curvas fechadas simples mutuamente disjuntas, onde $C_1, \ldots, C_n$ estão no interior de C e os interiores das $C - j$ são mutuamente disjuntos. Suponhamos que f é uma função holomorfa sobre essas curvas e na região interior a C e exterior a todas as C_j. Então*

$$\int_C f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)\,dz = 0,$$

onde C está orientada no sentido anti-horário e cada C_j está orientada no sentido horário.

Dem. Basta introduzir um número finito de segmentos $L_1, L_2, \ldots, L_{n+1}$ unindo C a C_1, C_1 a C_2 etc., até unir C_n a C.



Isso decompõe C em duas curvas fechadas simples Γ_1 e Γ_2, cada uma das quais consistindo de alguns L_j ou $-L_j$ e pedaços de C e dos C_j. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, a integrais sobre Γ_1 e Γ_2 são zero. Visto que as integrais sobre L_j e $-L_j$ se cancelam, restam apenas as integrais sobre C e os C_j. q.e.d.

8.10 Corolário (princípio de deformação de caminhos). *Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas simples, orientadas no sentido anti-horário, com C_1 interior a C_2. Se f é holomorfa na região fechada consistindo dessas curvas e nos pontos interiores a C_2 e interiores a C_1, então*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

8.11 *(Exemplo)* Se C é qualquer curva fechada simples contendo a origem no seu interior, então

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_{|z|=\epsilon} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Ex. 8.1 Mostre que $\int_C \frac{1}{z}\,dz \neq 0$, onde C é o círculo $|z| = R$, $R > 0$. Note que o integrando é uma função holomorfa no plano perfurado $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por que este resultado não contradiz (8.3)?

Ex. 8.2 Mostre que $\int_C f(z)\,dz = 0$ onde $C : |z| = 1$ e: (a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$; (b) $f(z) = z^3 e^{-2z}$; (c) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$; (d) $f(z) = \mathrm{sech} z$; (e) $f(z) = \tan z$; (f) $f(z) = \mathrm{Log}(z+2)$.

Ex. 8.3 Mostre que $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ onde C_1 é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$ e $C_2 : |z| = 4$, ambos orientados no sentido anti-horário, onde: (a) $f(z) = \frac{1}{3z^2+1}$; (b) $f(z) = \frac{z+2}{\sin(z/2)}$; (c) $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$.

Ex. 8.4 (a) Mostre que $\int_{[1,z]} \frac{1}{z}\,dz$ é uma primitiva de $\frac{1}{z}$ no plano recortado $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \leq 0,\ \Im z = 0\}$. (b) Calcule essa integral usando como caminho entre 1 e $z = re^{i\theta}$ o segmento $[1, r]$ seguido do arco circular W de r até z. (c) Conclua que $\mathrm{Log}\, z = \int_{[1,z]} \frac{1}{z}\,dz$.