7.a secção: 3out (resumo)

7.1 Existe também a integração em relação ao *comprimento de arco*. A definição é
$$\int_C f(z)\,|dz| := \int_a^b f(z(t))|z'(t)|\,dt$$
onde $z(t)$, $t \in [a,b]$, é uma parametrização de C. Note que
$$\int_{-C} f(z)\,|dz| = \int_C f(z)\,|dz|$$
e que
$$\int_C |dz|$$
é o comprimento de C. Além disso, segue de (6.1) que
$$\begin{aligned} \left|\int_C f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\right| \\ &\le \int_a^b |f(z(t))z'(t)|\,dt \\ &= \int_C |f(z)|\,|dz|. \end{aligned}$$
Em particular, se $|f(z)| \le M$ para todo $z \in C$ e L denota o comprimento de C, então $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M \cdot L$. Por exemplo, sendo C o quarto de círculo $|z| = 2$ de 2 a $2i$ que se situa no primeiro quadrante, podemos estimar
$$\left|\int_C \frac{z-2}{z^4+1}\,dz\right| \le \frac{4\pi}{15}$$
notando que
$$|z-2| \le |z| + 2 = 4, \quad |z^4+1| \ge ||z^4| - 1| = |z|^4 - 1| = 15$$
e que o comprimento de C é π.

7.2 Dizer que uma integral $\int_C f(z)\,dz$ independe do caminho entre dois pontos significa que ela tem o mesmo valor ao longo de curvas (de classe $\mathcal{C}^1$ por partes) que têm pontos incial e final fixados. Essa propriedade é equivalente a dizer que a integral ao longo de qualquer curva fechada é zero. De fato, se C é uma curva fechada, então C e $-C$ têm os mesmos pontos extremos, e se a integral independe do caminho,
$$\int_C = \int_{-C} = -\int_C$$

implicando que $\int_C = 0$. Reciprocamente, se C_1 e C_2 têm os mesmos extremos, então $C_1 - C_2$ é uma curva fechada, e se a integral ao longo de curvas fechadas é zero, segue que

$$\int_{C_1} = \int_{C_2} + \int_{C_1 - C_2} = \int_{C_2}.$$

7.3 Proposição. $\int_C f(z)\, dz$ *independe do caminho se e somente se* f *possui uma primitiva (ou anti-derivada).*

Dem. Sejam z_1, z_2 os extremos de C. Se F é uma primitiva de f, então

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[F(z(t))]\, dt = F(z_2) - F(z_1)$$

depende apenas dos extremos.

Reciprocamente, supondo que $\int_C f(z)\, dz$ independe do caminho, fixamos $z_0 \in \Omega$ e pomos

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

onde a integral pode ser calculada ao longo de qualquer curva de classe $\mathcal{C}^1$ por partes em Ω unindo z_0 a z. Temos

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)]\, d\xi$$

onde o caminho entre z e $z + \Delta z$ é tomado como sendo o segmento de reta. Como f é contínua em z, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\xi - z| < \delta$ implica $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$. Se $|\Delta z| < \delta$ temos agora que

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \epsilon.$$

Provamos que $F'(z) = f(z)$. q.e.d.

Ex. 7.1 Calcular $\int_{|z|=1} |z-1| \cdot |dz|$.

Ex. 7.2 Calcular, usando uma antiderivada: (a) $\int_i^{i/2} e^{\pi z}\, dz$; (b) $\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right)\, dz$; (c) $\int_1^3 (z-2)^3\, dz$.

Ex. 7.3 Seja $P(z)$ um polinômio e C o círculo $|z - z_0| = R$. Mostre que

$$\int_C \overline{P(z)}\, dz = 2\pi i R^2 \overline{P'(z_0)}.$$

Ex. 7.4 Seja Ω o domínio de $\mathbb{C}$ que exclui uma semi-reta se originando na origem. Mostre que

$$\int_C \frac{dz}{z} = 0$$

para toda curva fechada C em Ω.