

6.a secção: 19set (resumo)

6.1 Se $w(t) = u(t) + iv(t)$ é uma função da variável real t a valores complexos, então define-se

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t),$$

desde que as derivadas u' e v' existam em t . Verificam-se facilmente a validade das regras usuais de derivação de somas e produtos.

6.2 Se $f(t) = u(t) + iv(t)$ é uma função contínua definida no intervalo (a, b) , definimos

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Valem as propriedades usuais em relação à adição de funções e à multiplicação por uma constante (complexa). Além disso, se $a \leq b$, então

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt. \quad (1)$$

De fato, escrevendo $\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta}$ temos:

$$\begin{aligned} r &= \Re \left[e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt \right] \\ &= \int_a^b \Re [e^{-i\theta} f(t)] dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(t)| dt, \end{aligned}$$

como desejado.

6.3 Mais geralmente, se C é uma curva de classe \mathcal{C}^1 (por partes), parametrizada por meio de

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b,$$

e f é uma função contínua a valores complexos definida sobre $z([a, b])$, definimos a *integral de linha complexa*

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

Valem as propriedades usuais em relação à adição de funções e à multiplicação por uma constante (complexa).

6.4 (*Exemplos*) (a) A integral $\int_C \frac{dz}{z}$ vale πi se $C : z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, é o trecho superior do círculo unitário de 1 até i , mas $-\pi i$ se $C : z(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq \pi$, é o trecho inferior.

(b) $\int z dz = \int_a^b z(t)z'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [z(t)^2] dt = \frac{z(b)^2 - z(a)^2}{2}$ para qualquer C . Em particular, a integral depende apenas dos extremos inicial e final de C (mas não do caminho).

(c) Seja $f(z) = e^{\frac{1}{2} \log z}$ (um ramo de $z^{1/2}$) para $|z| > 0$, $0 < \arg(z) < 2\pi$, e tomemos $C : z(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Note que f não está definida em 3. Mesmo assim, $f(z(t)) = \sqrt{3}e^{it/2}$ e $\int_C f(z) dz = 3i\sqrt{3} \int_0^\pi e^{3it/2} dt = -2\sqrt{3}(1+i)$.

6.5 A propriedade mais importante da integral de linha complexa é sua invariância por mudança de parâmetro. Seja $t = \varphi(s)$ onde $c \leq s \leq d$, onde φ é de classe C^1 . Então pela fórmula de mudança de variável de integração,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t))z'(t) dt &= \int_c^d f(z(\varphi(s)))z'(\varphi(s))\varphi'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\tilde{z}(s))\tilde{z}'(s) ds \end{aligned}$$

onde $\tilde{z}(s) = z(\varphi(s))$ é outra parametrização de C .

6.6 O caminho *oposto* de C é denotado $-C$ e tem parametrização $\tilde{z}(t) = z(-t)$, $-b \leq t \leq a$. Temos

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z) dz &= \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t)) dt \\ &= \int_b^a f(z(t))z'(t) dt \\ &= - \int_C f(z) dz, \end{aligned}$$

onde usamos a fórmula de mudança de variável novamente (para a segunda igualdade).

6.7 Finalmente, a integral de linha complexa também é aditiva em relação à concatenação de curvas, denotada por $C_1 + \dots + C_n$:

$$\int_{C_1 + \dots + C_n} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

Ex. 6.1 Calcular $\int_C x dz$ onde C é o segmento de reta de 0 a $1+i$.

Ex. 6.2 Calcular $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ onde C é o círculo $|z| = 2$ orientado no sentido anti-horário.

Ex. 6.3 Calcular $\int_C z^{a-1} dz$, onde a é um número real não-nulo, usamos o valor principal de $f(z) = z^{a-1}$, e C é o círculo $z = Re^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) orientado no sentido anti-horário.

Ex. 6.4 Sendo f holomorfa num domínio contendo uma curva fechada simples C , mostrar que $\int_C \overline{f(z)} f'(z) dz$ é puramente imaginário. (Usar o Fato 3.8, se necessário.)