5.a aula: 14set (resumo)

5.1 A *exponenciação* de números complexos pode ser agora definida usando o logaritmo. Para z, $w \in \mathbb{C}$, pomos

$$z^w = e^{w \log z} \tag{1}$$

onde log, como usualmente, é multivalente. O *valor principal* de z^w é obtido usando-se o logaritmo principal Por exemplo:

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i \log i} \\ &= e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

pois $\log i = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, e o valor principal é $e^{-\frac{\pi}{2}}$. Fixando w em (1) e tomando um ramo de $\log z$, obtemos uma função holomorfa $z \mapsto z^w$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z^w) &= \frac{d}{dz}(e^{w \log z}) \\ &= (e^{w \log z})\frac{d}{dz}(w \log z) \\ &= z^w \frac{w}{z} \\ &= wz^{w-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, fixando z em (1) e escolhendo um valor de $\log z$, obtemos uma função holomorfa $w \mapsto z^w$ e

$$\frac{d}{dw} z^w = z^w \log z. \tag{2}$$

5.2 Para $y \in \mathbb{R}$, note que $\cos y = \Re e^{iy}$ e $\sin y = \Im e^{iy}$. Estendemos assim as funções trigonométricas ao campo complexo pondo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

para $z \in \mathbb{C}$. Estas são funções inteiras e

$$(\cos z)' = -\sin z, \qquad (\sin z)' = \cos z.$$

As identidades algébricas usuais envolvendo cosseno e seno continuam valendo no campo complexo, inclusive a periodicidade de 2π. As outras funções trigonométricas tais como tangente, cotangente, secante, cossecante são definidas da forma usual, mas têm importância secundária.

5.3 As *funções trigonométricas hiperbólicas* são definidas como a seguir:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Estas são funções inteiras e periódicas de período $2\pi i$. Temos

$$(\cosh z)' = \sinh z, \qquad (\sinh z)' = \cosh z. \tag{3}$$

A relação fundamental é

$$\cosh z^2 - \sinh z^2 = 1.$$

Ex. 5.1 Verificar a identidade (2).

Ex. 5.2 Se $z \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}$, mostre que $|z^a| = |z|^a$ para o valor principal de z^a.

Ex. 5.3 Calcular os valores de $\cos i$ e $\sin i$. Para que valores de $z \in \mathbb{C}$ é $\cos z$ real? Para que valores está no intervalo real $[-1, 1]$? Para que valores se anula?

Ex. 5.4 Verificar as identidades (3).

Ex. 5.5 Mostrar que $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ e $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$.

Ex. 5.6 Mostrar que $\sinh(iz) = i \sin z$ e $\cosh(iz) = \cos z$.

Ex. 5.7 Mostrar que $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

Ex. 5.8 Calcular todos as soluções de $\tanh z = 0$.

Ex. 5.9 Mostrar que $\cos w = z$ se e somente se $w = -i \log[z + i(1 - z^2)^{1/2}]$. (Assim podemos definir a função multivalente $\arccos z$.)